

線型ネットワーク符号とその構成法

栗原正純*
(電気通信大学)

(電子情報通信学会 2007年ソサイエティ大会 鳥取大学 2007/09/10~14)

(2007/9/10/23:00 作成日)

* 〒182-8585 東京都調布市調布ヶ丘 1-5-1, 電気通信大学情報通信工学科, E-mail: kuri@ice.uec.ac.jp

-
1. まえがき
 2. (数学的) 準備
 3. ネットワーク (V, E) **with** (s, T)
 4. マルチキャスト線型ネットワーク符号
 5. 最大線型ネットワーク符号
 6. ブロードキャスト線型ネットワーク符号
 7. ロバスト線型ネットワーク符号
 8. 結論
-

線型ネットワーク符号 \Leftrightarrow Linear Network Code \Leftrightarrow LNC

1. まえがき

1. 従来研究(参考文献)とキーワード

- i. R. Ahlswede, N. Cai, S.-Y. R. Li, and R. W. Yeung, “Network information flow,” 2000.

ネットワーク符号化, マルチキャスト, 伝送レート

- ii. S.-Y.R.Li, R.W.Yeung, and N.Cai, “Linear network coding,” 2003.

線型ネットワーク符号化(LNC), マルチキャストLNC, ブロードキャストLNC(generic LCM)

- iii. R.Koetter and M.Medard, “An Algebraic Approach to Network Coding”, 2003.

線型ネットワーク符号(LNC)の構成法, マルチキャストLNC, ロバストLNC

- iv. T.Ho and *et. al.*, “Network coding from a network flow perspective,” 2003.

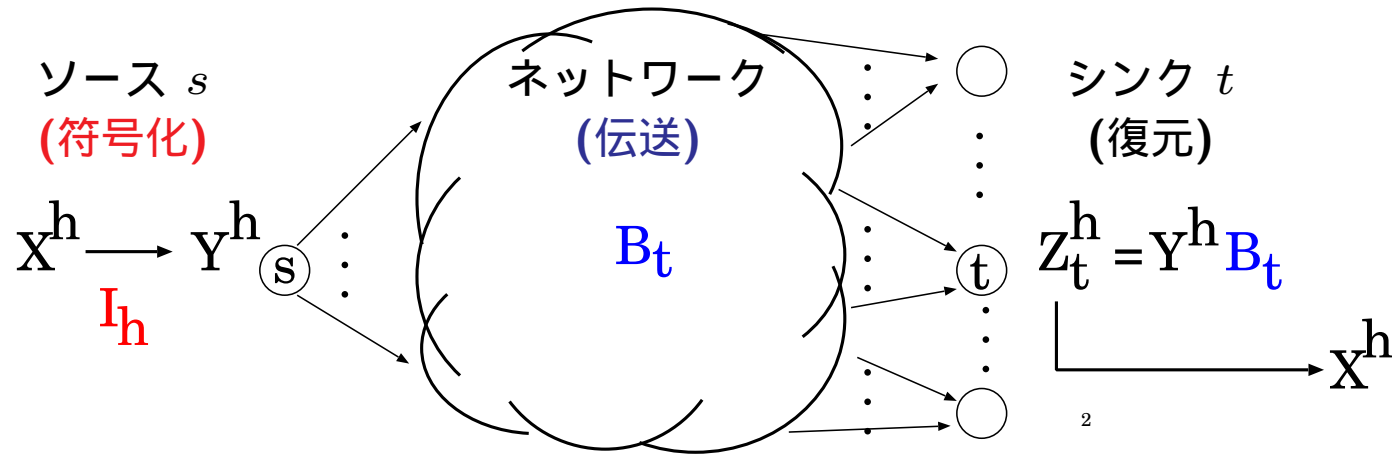
有限体 F のサイズ $|F| > |T|$. (T はシンクノードの集合)

- v. S.Jaggi, and *et. al.*, ”Polynomial time algorithms for multicast network code construction,” 2005.

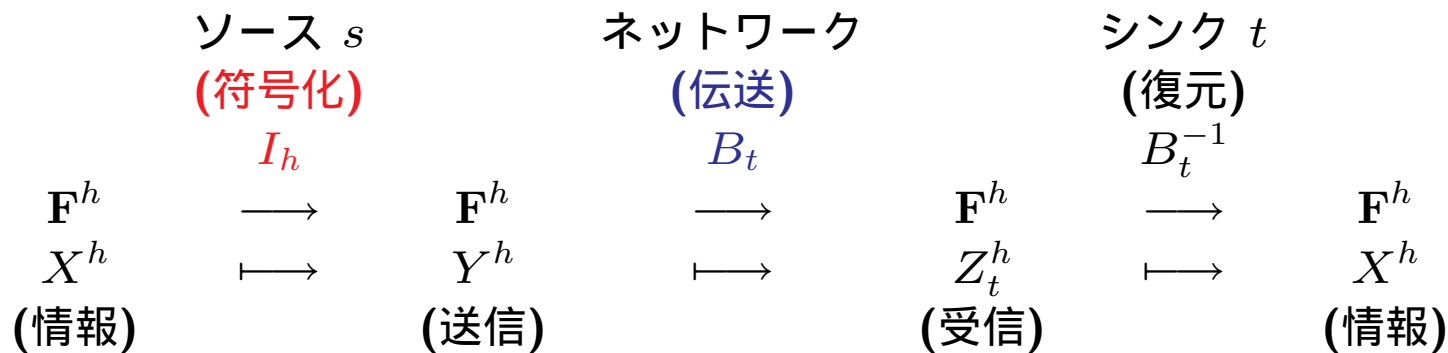
線型ネットワーク符号(LNC)の構成法, マルチキャストLNC, ロバストLNC

2. 本発表では, 線型ネットワーク符号(LNC)を 符号化, 伝送, 復元 の3つの部分に分けて考える.

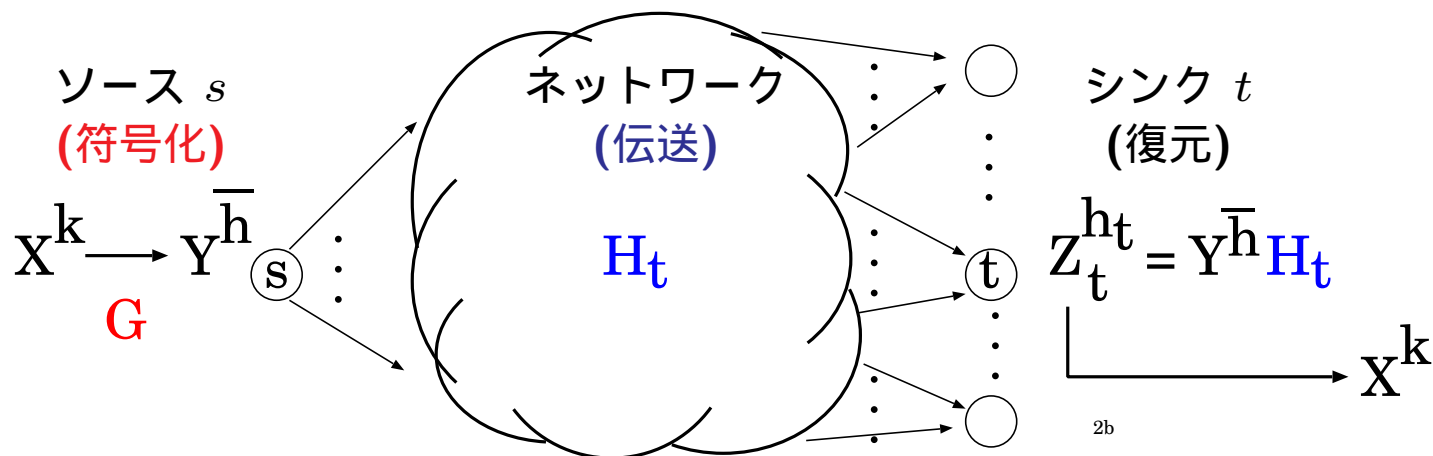
3. たとえば，マルチキャスト LNC では，次のようになる．



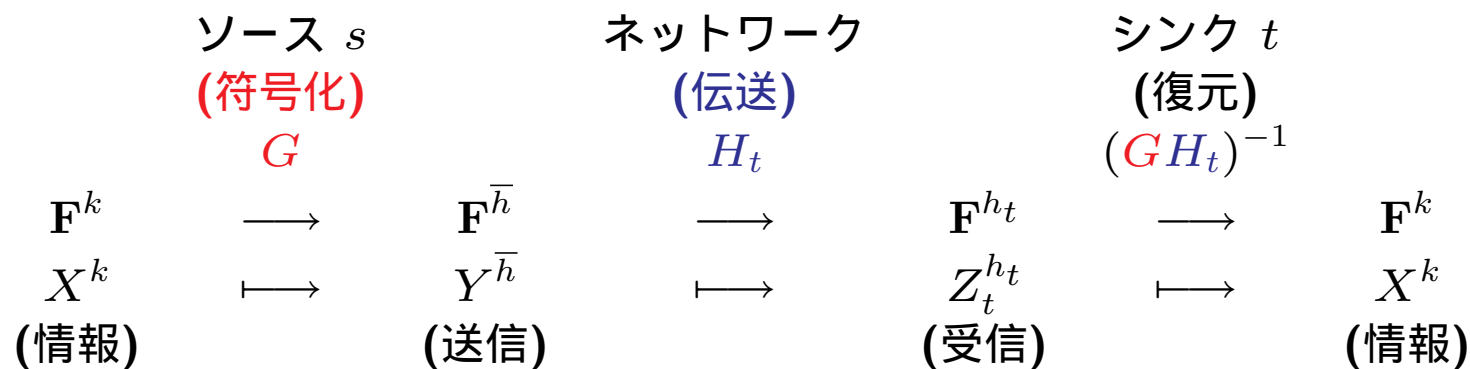
- i. 伝送レート: $\underline{h = \min_{t \in T} h_t}$, **where** $h_t = \text{maxflow}(s, t), t \in T$
- ii. 符号化行列: $h \times h$ 単位行列 I_h
- iii. 送信シンボル列: $Y^h = X^h I_h \in \mathbf{F}^h$
- iv. 伝送行列: $\underline{h \times h}$ 伝送行列 $B_t, t \in T$ (正則, すなわち, $\text{rank } B_t = h$)
- v. 受信シンボル列: $Z_t^h = Y^h B_t, t \in T$



4. 本発表では，次のような 最大線型ネットワーク符号 (最大 LNC) というものを考える．



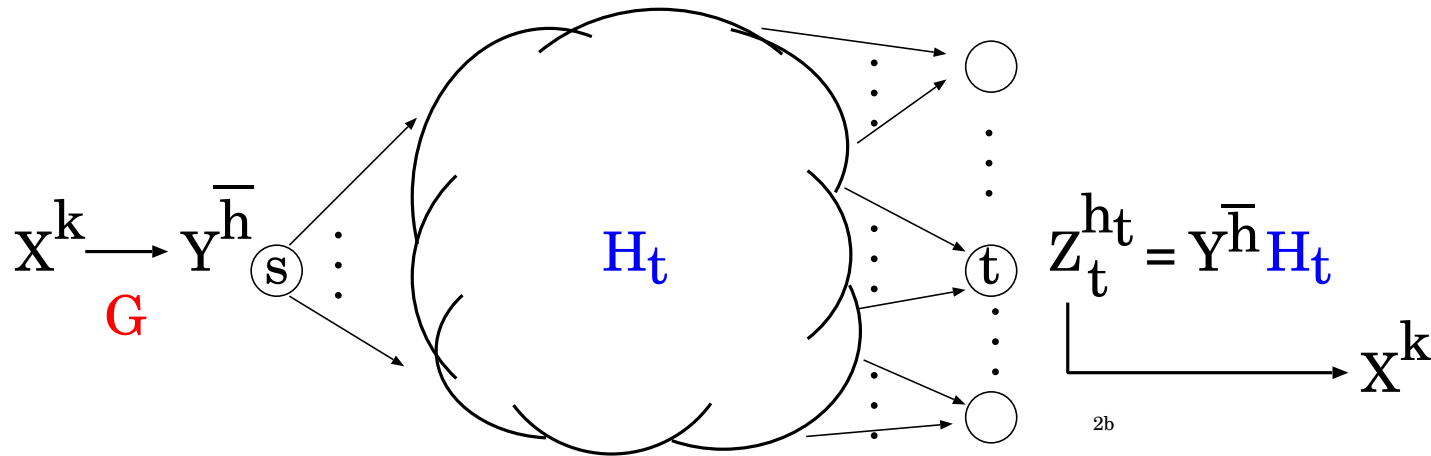
- i. $\bar{h} = \max_{t \in T} h_t$, **where** $h_t = \text{maxflow}(s, t), t \in T$
- ii. 符号化行列: $k \times \bar{h}$ 符号化行列 G
- iii. 送信シンボル列: $Y^{\bar{h}} = X^k G \in \mathbf{F}^{\bar{h}}$
- iv. 伝送行列: $\bar{h} \times h_t$ 伝送行列 $H_t, t \in T$ (rank $H_t = h_t$)
- v. 受信シンボル列: $Z_t^{h_t} = Y^{\bar{h}} H_t, t \in T$



5. 本発表の目的

与えられたネットワーク (V, E) with (s, T) に対し, 前処理として, 最大LNCの伝送行列 H_t , $t \in T$ を構成する.

このとき, 符号化行列 G を目的に応じて設計することで, 伝送行列 H_t , $t \in T$ を変更することなく, 最大LNC から $\left\{ \begin{array}{l} \text{マルチキャスト LNC} \\ \text{ブロードキャスト LNC} \\ \text{ロバスト LNC} \end{array} \right\}$ のそれぞれを構成する方法を示す.



$$\begin{array}{ccccccc}
 & & G & & H_t & & (GH_t)^{-1} \\
 \mathbf{F}^k & \longrightarrow & \mathbf{F}^{\bar{h}} & \longrightarrow & \mathbf{F}^{h_t} & \longrightarrow & \mathbf{F}^k \\
 X^k & \longmapsto & Y^{\bar{h}} & \longmapsto & Z_t^{h_t} & \longmapsto & X^k
 \end{array}$$

伝送行列 H_t , $t \in T$ を変更しないということは, ネットワーク中の中継ノードでの符号化操作を変更しないということ.

1. [AhlsvedeCaiLiYeung2000]

- i. ネットワーク (V, E) with (s, T) : $s \in V$ (ソースノード), $t \in T \subset V$ (シンクノード)
- ii. マルチキャスト (ソースからすべてのシンクへ同じ情報を同時に伝送する)
- iii. Max-Flow(最大流) : $\text{maxflow}(s, t) = h_t$ for $t \in T$; Min-Cut(最小カット)
- iv. ネットワーク符号化 \Rightarrow 伝送レート $h = \min_{t \in T} h_t$
- v. 中継ノードにて、情報の複製(コピー)以外に、符号化も行なう。

2. [LiYeungCai2003]

$$\begin{array}{ccccc} & & B_t & & \\ & & \longrightarrow & & \\ \text{(ソース } s) & \mathbf{F}^h & & \mathbf{F}^h & \text{(シンク } t) \\ \text{(送信シンボル列)} & Y^h & \longmapsto & Z_t^h & \text{(受信シンボル列)} \end{array} \quad (Z_t^h = Y^h B_t)$$

- i. 線型ネットワーク符号化
- ii. 十分大きな有限体 F 上で考える
- iii. F 上の h 次正則 $B_t, t \in T$: ($\Leftarrow h \times h$ 伝送行列)
- iv. 「伝送レート h でマルチキャスト通信が可能」
 - \iff 「マルチキャスト LNC が存在する」
 - \iff 「伝送行列 $B_t, t \in T$ が存在する」
- v. “Generic” Linear-Code Multicast(Generic LCM): ブロードキャスト LNC

3. [KoetterMedard2003]

- i. 線型ネットワーク符号の構成法
- ii. 代数的な処理 \implies 正方な伝送行列の行列式 \implies 多変数多項式の処理
- iii. 有限体 \mathbf{F} のサイズ : $|\mathbf{F}| = 2^m$ s.t. $m \leq \log_2(|T| \times h + 1)$:
 $|\mathbf{F}| > |T| \times h$
- iv. 様々なネットワーク通信に対する線型ネットワーク符号を扱う:
マルチキャスト LNC, ロバスト LNC, etc.

4. [Hoetal2003]

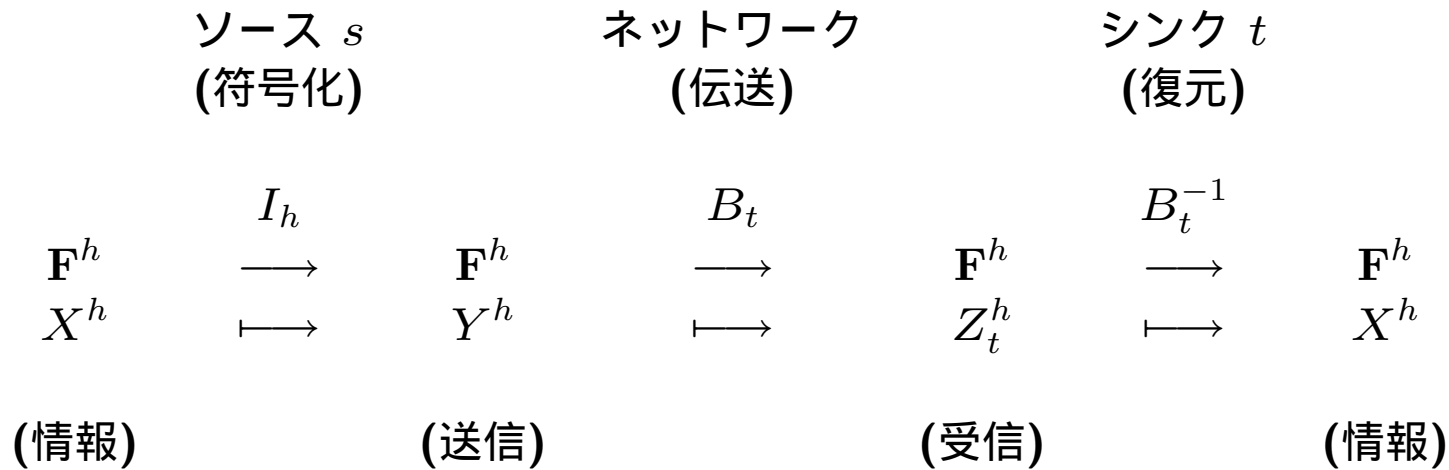
- i. 有限体 \mathbf{F} のサイズ : $|\mathbf{F}| = 2^m$ s.t. $m \leq \log_2(|T| + 1)$:
 $|\mathbf{F}| > |T|$

5. [Jaggietal2005]

- i. 線型ネットワーク符号の構成法
- ii. [LiYeungCai2003] のアイデアを効率良く行なうアルゴリズム
- iii. 最大流 $h_t \iff s$ から t への h_t 本の Link-disjoint-path
- iv. マルチキャスト LNC, ロバスト LNC, etc. を構成可能

1. マルチキャスト LNC (最小 LNC)

- i. (送信シンボル列長) = (伝送レート $h = \min_{t \in T} h_t$)
- ii. 符号化行列 I_h は、 h 次単位行列
- iii. 伝送行列 $B_t, t \in T$ は、 h 次正方行列



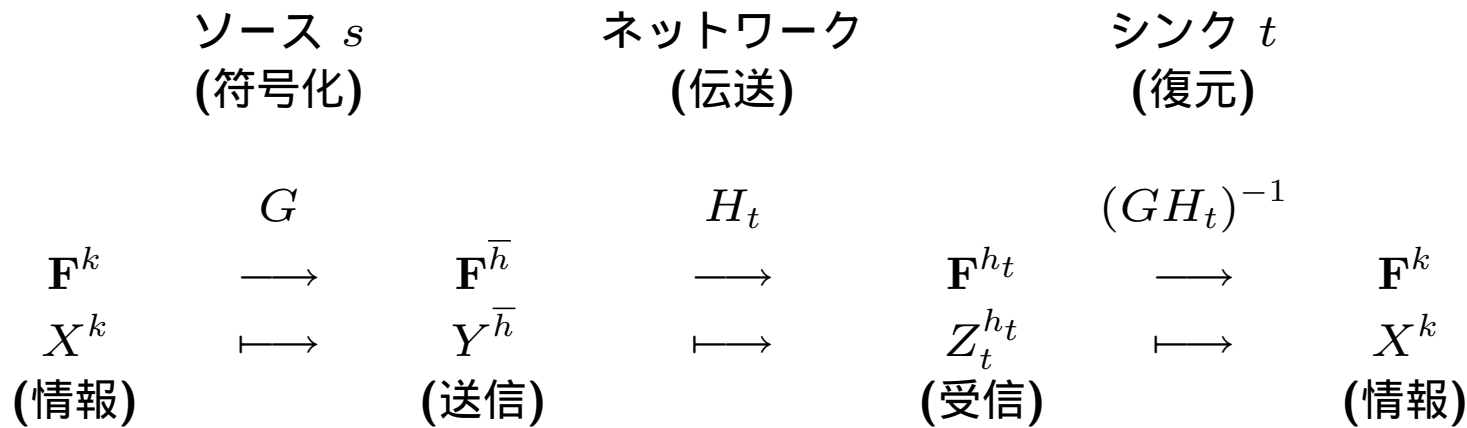
- iv. 符号化と送信シンボル列: $Y^h = X^h I_h$
- v. 受信シンボル列: $Z_t^h = Y^h B_t (= X^h I_h B_t), t \in T$
- vi. 復元: $Z_t^h B_t^{-1} = X^h I_h B_t B_t^{-1} = X^h$ **where** $B_t B_t^{-1} = I_h$

2. 最大線型ネットワーク符号 (最大 LNC)

i. 送信シンボル列長 : $\bar{h} = \max_{t \in T} h_t$

ii. 符号化行列 G は、 $k \times \bar{h}$ 行列

iii. 伝送行列 H_t は、 $\bar{h} \times h_t$ 行列 s.t. $\text{rank } H_t = h_t, t \in T$



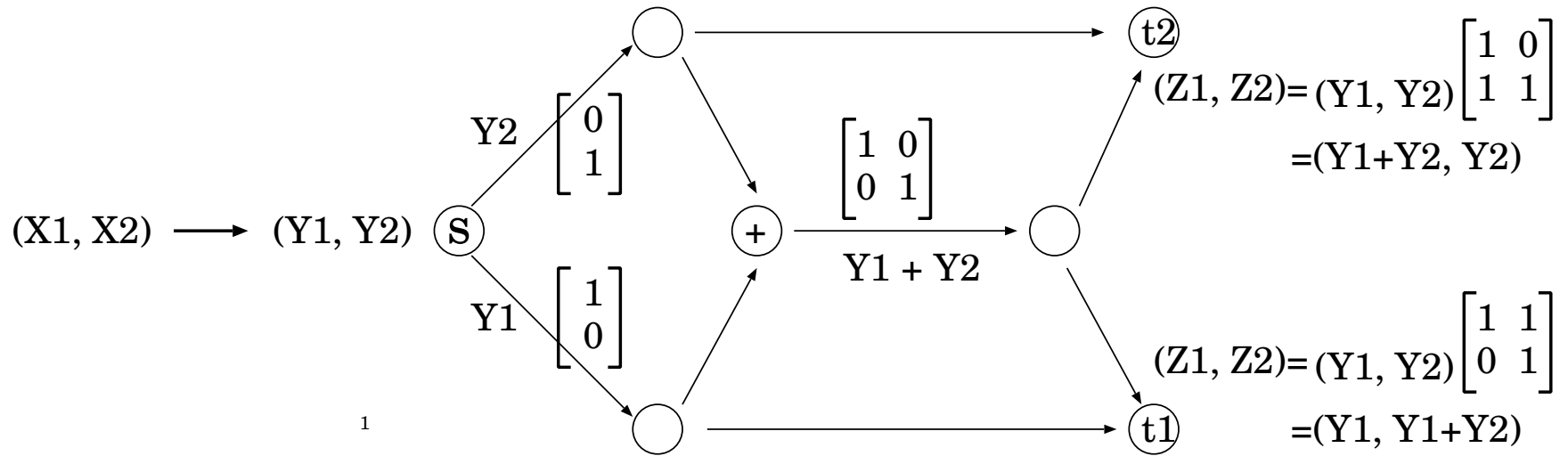
iv. 符号化と送信シンボル列: $Y^{\bar{h}} = X^k G$

v. 受信シンボル列: $Z_t^{h_t} = Y^{\bar{h}} H_t (= X^k G H_t), t \in T$

vi. 復元: $Z_t^{h_t} (GH_t)^{-1} = X^k G H_t (GH_t)^{-1} = X^k$ if $(GH_t)(GH_t)^{-1} = I_k$.

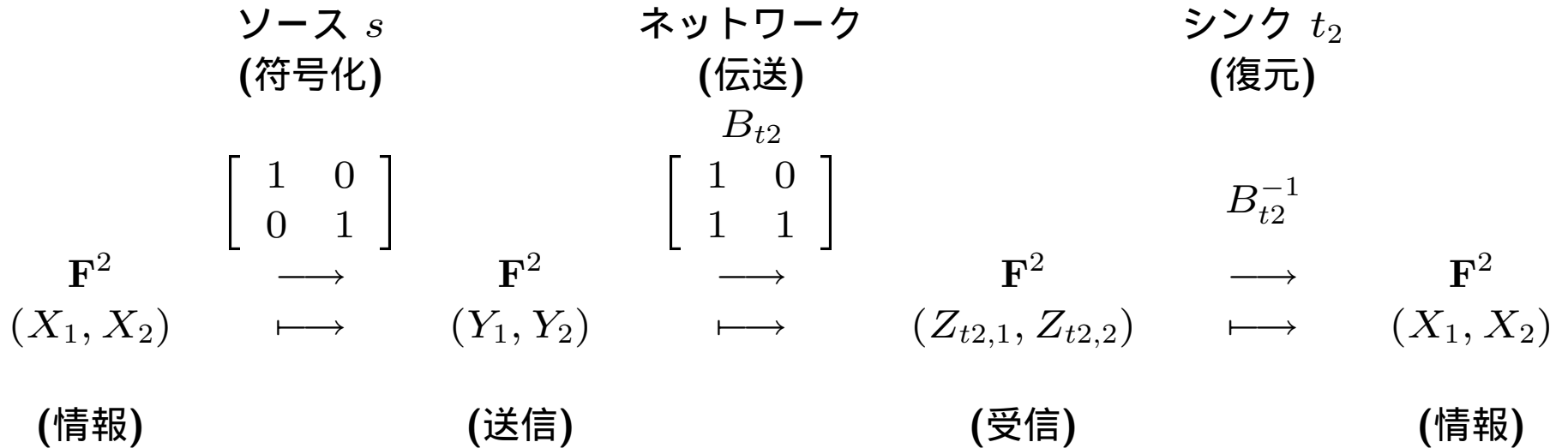
vii. 伝送行列 $H_t, t \in T$ を固定し, 符号化行列 G を工夫することで,

最大 LNC から $\left\{ \begin{array}{l} \text{マルチキャスト LNC (最小 LNC)} \\ \text{ブロードキャスト LNC} \\ \text{ロバスト LNC} \end{array} \right\}$ のそれぞれを構成する方法を考える



1. 伝送レート $h = \min_{t \in T} h_t = 2$

2. 情報伝送の図式



1. まえがき
2. (数学的) 準備
3. ネットワーク (V, E) with (s, T)
4. マルチキャスト線型ネットワーク符号
5. 最大線型ネットワーク符号
6. ブロードキャスト線型ネットワーク符号
7. ロバスト線型ネットワーク符号
8. 結論

2. (数学的) 準備

定理 1:

N 個の有限体 F 上の $m \times n$ 行列 H_1, H_2, \dots, H_N は,

$$\text{rank } H_i = n \text{ for all } i \in \{1, \dots, N\}$$

を満たすとする。ここで, $m \geq n$. このとき,

$$|F| > N$$

ならば,

$$\text{rank } GH_i = n \text{ for all } i \in \{1, \dots, N\}$$

を満たす F 上の $n \times m$ 行列 G が存在する.

$N \Leftrightarrow |T|$ (シンクノードの総数), $H_1, H_2, \dots, H_N \Leftrightarrow$ 伝送行列

$G \Leftrightarrow$ 符号化行列

定理 2:

定理 1 の仮定を満たす N 個の F 上の $m \times n$ 行列 H_1, \dots, H_N が与えられたとする。このとき,

$$|F| > 2N$$

ならば, 定理 1 の条件を満たす F 上の $n \times m$ 行列 G を, 平均時間計算量

$$O((m+n)n^2N) \approx O(mn^2N)$$

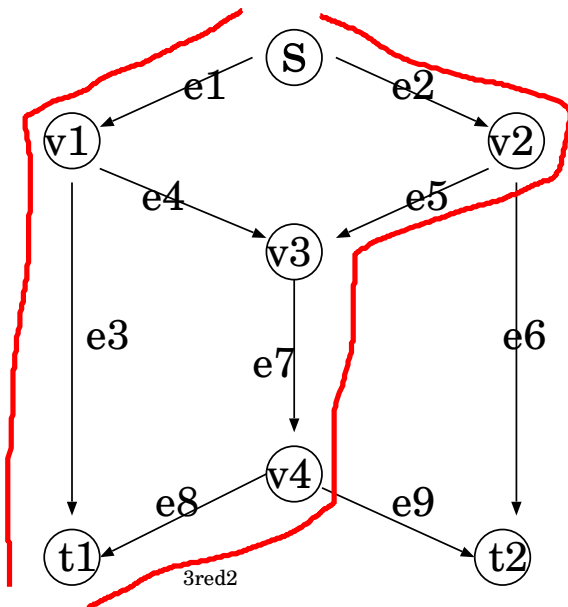
で構成可能である.

1. まえがき
2. (数学的) 準備
3. ネットワーク (V, E) with (s, T)
4. マルチキャスト線型ネットワーク符号
5. 最大線型ネットワーク符号
6. ブロードキャスト線型ネットワーク符号
7. ロバスト線型ネットワーク符号
8. 結論

3. ネットワーク

1. **Unit capacity, directed, acycle multi-graph** (V, E) with (s, T)
2. V : ノードの集合, E : リンクの集合
3. $s \in V$: ソースノード
4. $t \in T \subseteq V$: シンクノードとそれらの集合
5. **Unit capacity**: 1 単位時間に, 有限体 F のシンボル 1 個を伝送可能なリンク容量
6. $h_t = \text{maxflow}(s, t)$: ソース s からシンク t への**最大流 (maxflow)**

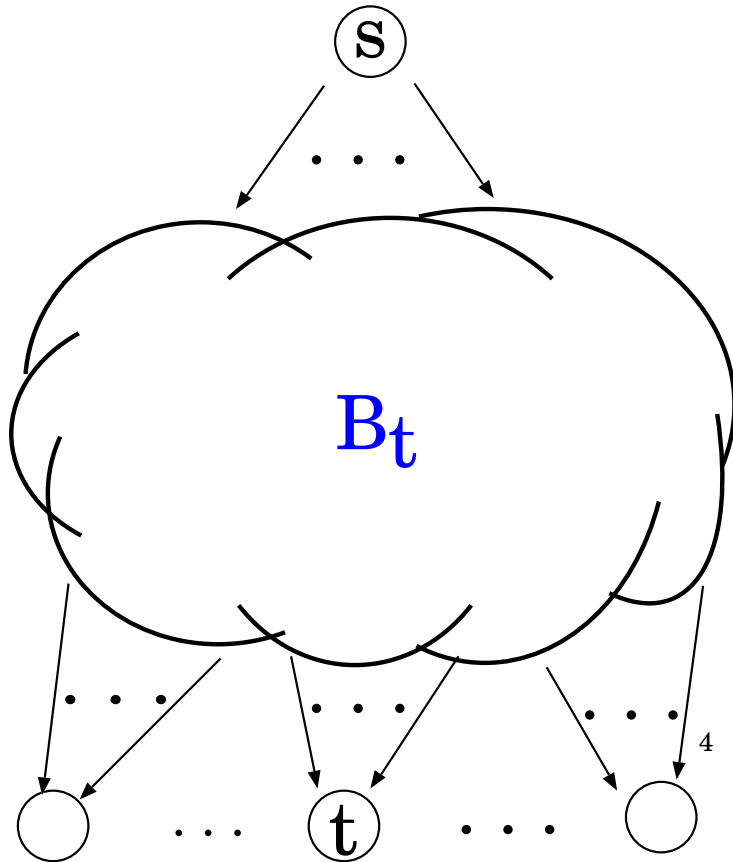
この h_t は, ソース s からシンク t への **Link-disjoint-path** の本数に対応する .



1. ネットワーク (V, E) with (s, T)
2. $V = \{s, t_1, t_2, v_1, v_2, \dots, v_4\}$
3. $E = \{(s, v_1), (s, v_2), \dots, (v_4, t_1), (v_4, t_2)\}$
 $= \{e_1, e_2, \dots, e_8, e_9\}$
4. $s \in V$: ソースノード
5. $T = \{t_1, t_2\} \subset V$: シンクノード集合
6. 最大流 (maxflow) $h_1 = h_2 = 2$

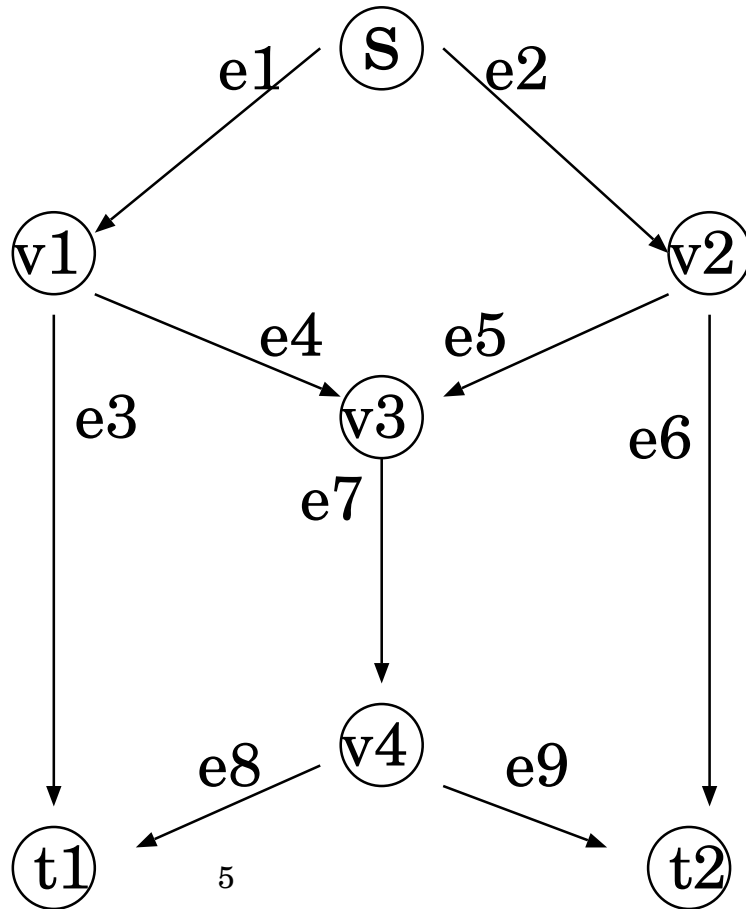
1. まえがき
2. (数学的) 準備
3. ネットワーク (V, E) with (s, T)
4. マルチキャスト線型ネットワーク符号
5. 最大線型ネットワーク符号
6. ブロードキャスト線型ネットワーク符号
7. ロバスト線型ネットワーク符号
8. 結論

4. マルチキャスト線型ネットワーク符号 (マルチキャスト LNC)



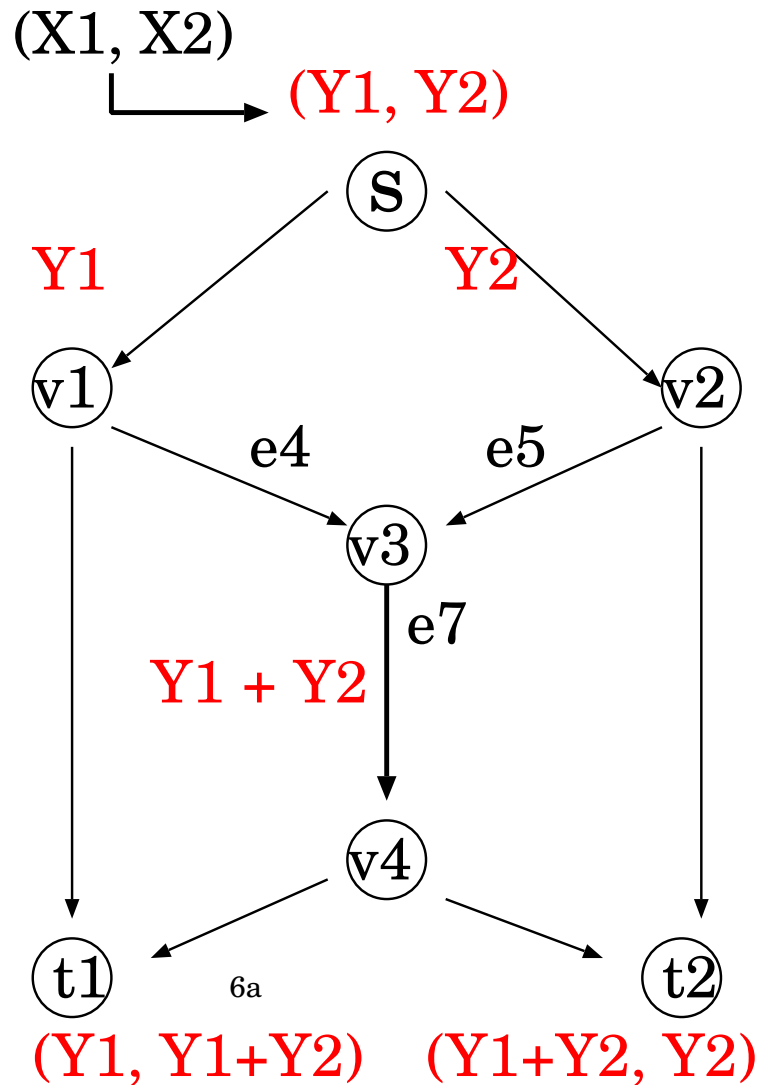
1. ネットワーク (V, E) with (s, T)
2. マルチキャストとは、ソース s からすべてのシンク $t \in T$ に同じ情報を同時に伝送すること。
3. 伝送レート $h = \min_{t \in T} h_t$
4. ネットワーク符号化により、伝送レート h でマルチキャスト通信が可能である。
[AhlsvedeCaiLiYeung2000]
5. すなわち、マルチキャスト LNC が存在する。
 $h \times h$ 伝送行列 $B_t, t \in T$ が存在する。
[LiYeungCai2003]
6. マルチキャスト LNC の構成 ([Jaggi et al 2005])
ネットワークに対し, Topological order の順に,
 - i. Local coding vector
 - ii. Global coding vectorを定めることで, 伝送行列 $B_t, t \in T$ を構成する。

Local coding vector, Global coding vector, 伝送行列



1. ネットワーク (V, E) with (s, T)
2. s : ソースノード
3. $T = \{t_1, t_2\}$: シンクノード
4. 最大流 $h_{t_i} = \maxflow(s, t_i) = 2, i = 1, 2$
 s から t_i への2本の **Link-disjoint-path** が存在する
5. 伝送レート $h = \min_{t \in T} h_t = 2$

Local coding vector



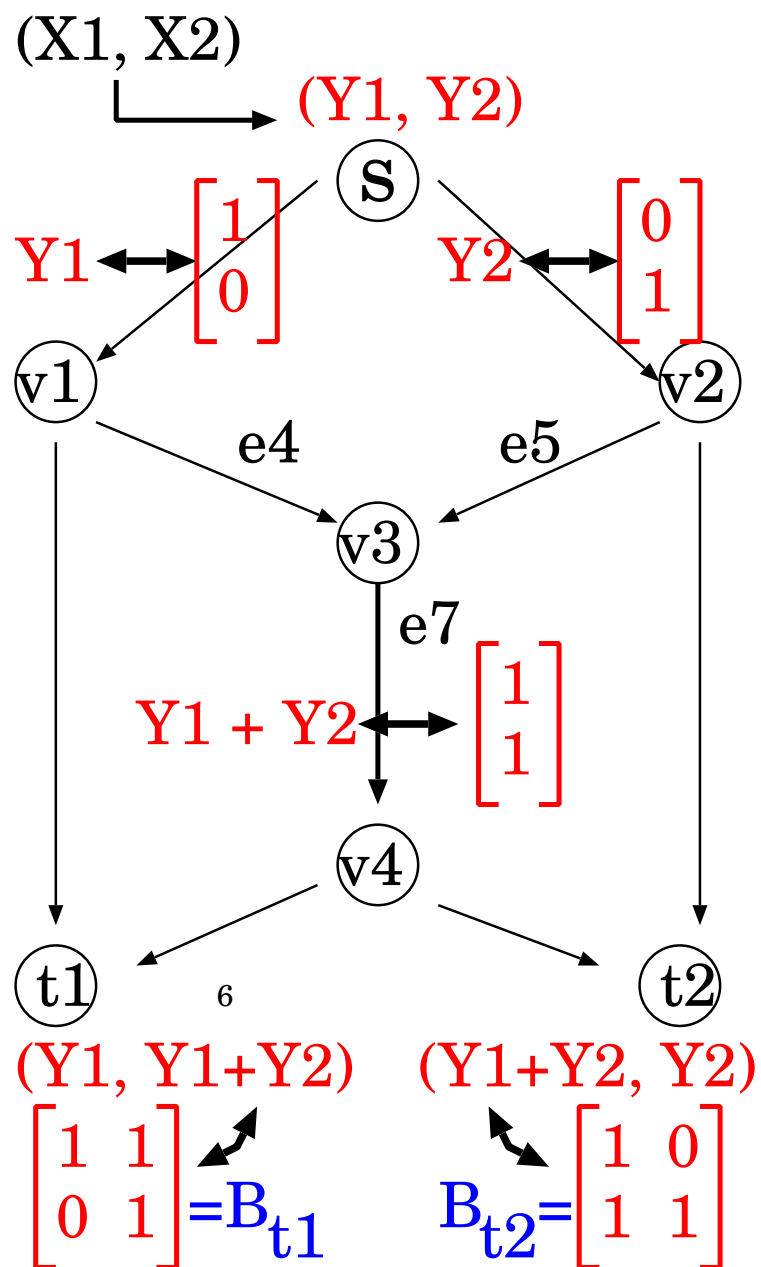
1. $(X_1, X_2) \in \mathbb{F}^2$ 情報シンボル列
2. $(Y_1, Y_2) \in \mathbb{F}^2$ 送信シンボル列
3. $\text{symb}(e)$: リンク e 上の伝送シンボル
4. 中継ノード v_3 でのリンク e_7 に対する符号化:

Local coding vector $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ for Link e_7 :

$$\begin{aligned}
 \text{symb}(e_7) &= \alpha_1 \cdot \text{symb}(e_4) + \alpha_2 \cdot \text{symb}(e_5) \\
 &= (\text{symb}(e_4), \text{symb}(e_5)) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \\
 &= (Y_1, Y_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= Y_1 + Y_2
 \end{aligned}$$

where $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Global coding vector



1. **Global coding vector** $y(e)$ for Link e :

$$y(e) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}: \text{2次元ベクトル}$$

2. リンク e に対する伝送シンボル $\text{symb}(e)$ と **Global coding vector** $y(e)$ の関係:

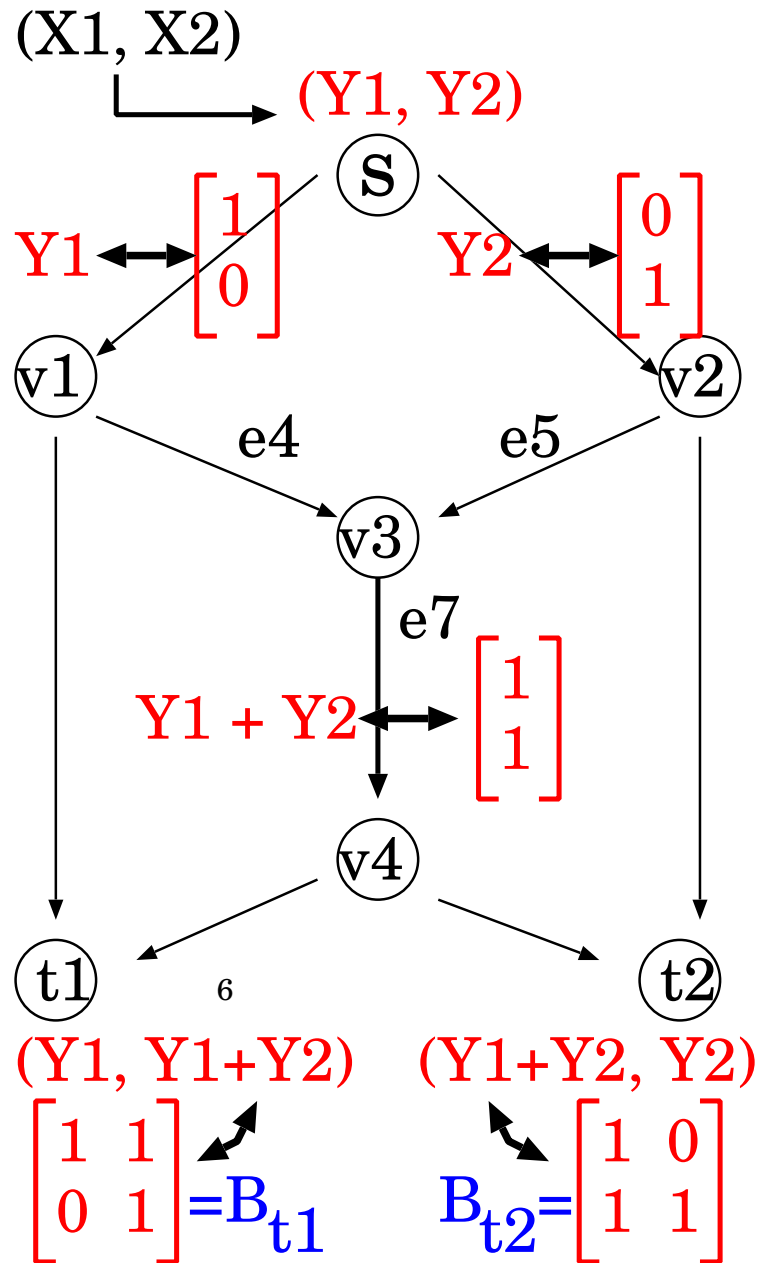
$$\text{symb}(e) = (Y_1, Y_2)y(e) = (Y_1, Y_2) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

3. 中継ノード v_3 でのリンク e_7 に対する符号化:

Global coding vector $y(e_7)$ for Link e_7 :

$$\begin{aligned} y(e_7) &= (y(e_4), y(e_5)) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{symb}(e_7) &= (Y_1, Y_2)y(e_7) = (Y_1, Y_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= Y_1 + Y_2 \end{aligned}$$



4. 2×2 伝送行列 $B_t, t \in T$:

$$B_{t_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_{t_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

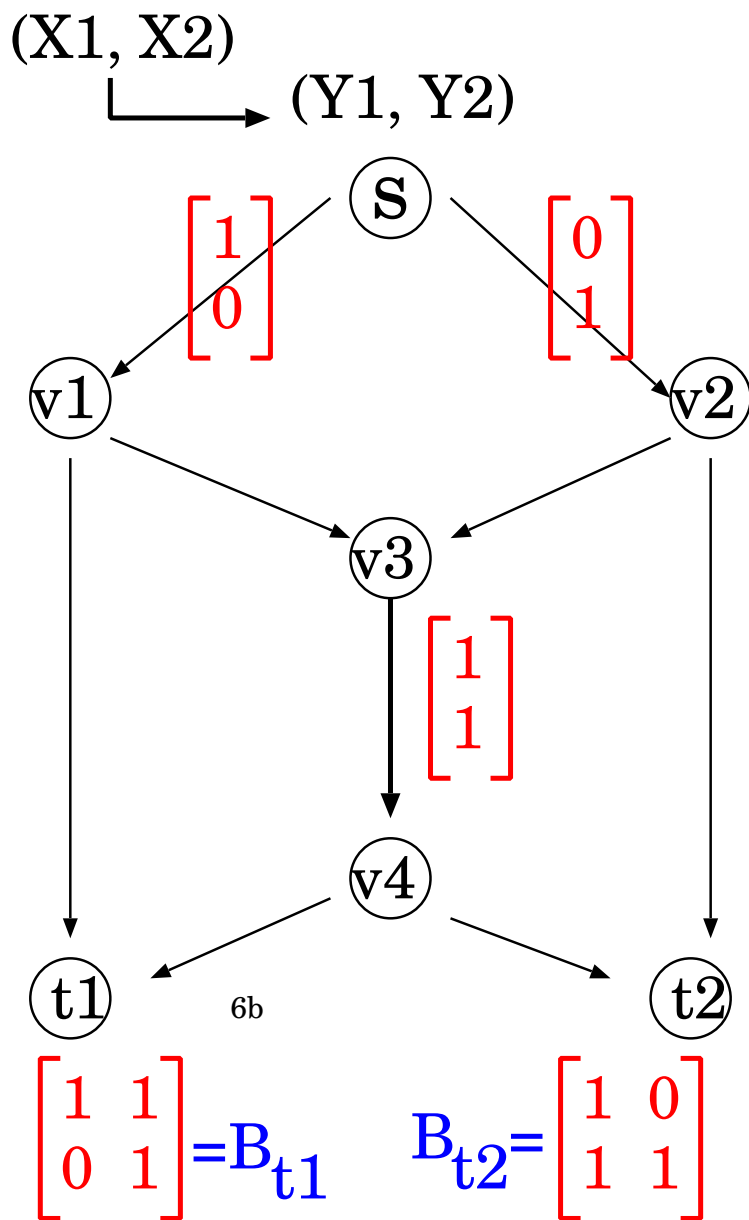
5. 受信シンボル列 $(Z_{t,1}, Z_{t,2}), t \in T$:

$$(Z_{t_1,1}, Z_{t_1,2}) = (Y_1, Y_1 + Y_2),$$

$$(Z_{t_2,1}, Z_{t_2,2}) = (Y_1 + Y_2, Y_2).$$

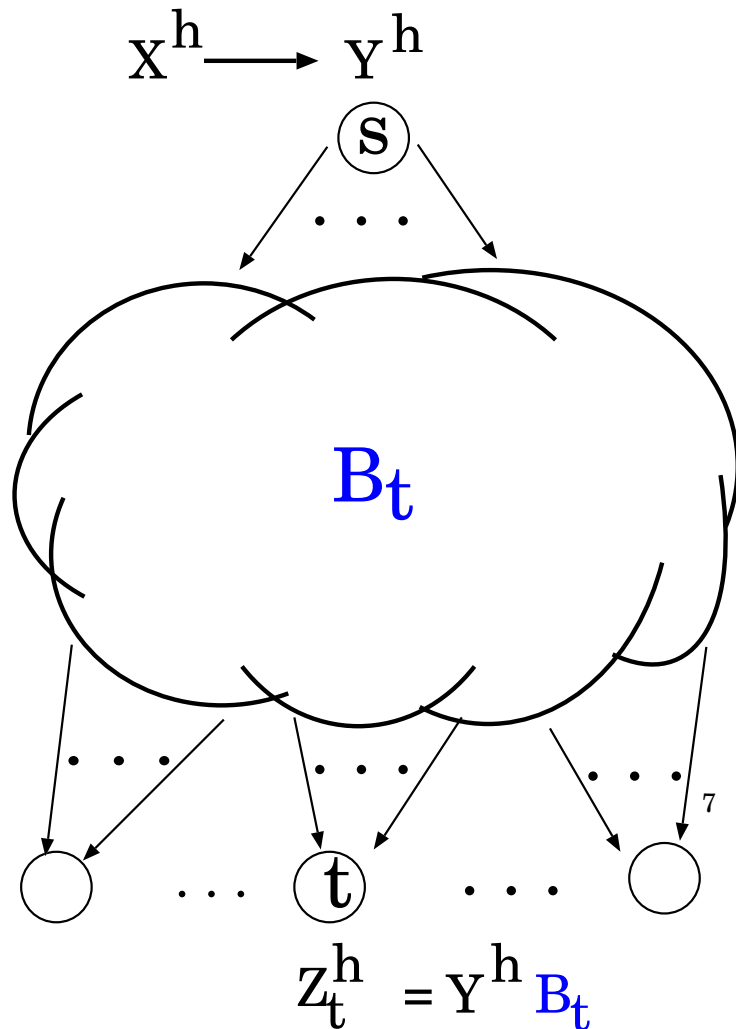
6. 受信シンボル $(Z_{t,1}, Z_{t,2})$ と伝送行列 B_t の関係:

$$\begin{aligned} (Z_{t_1,1}, Z_{t_1,2}) &= (Y_1, Y_1) B_{t_1} \\ &= (Y_1, Y_1) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (Y_1, Y_1 + Y_2) \end{aligned}$$



1. 伝送レート $h = \min_{t \in T} h_t = 2$
2. 情報シンボル列 (X_1, X_2)
3. 符号化行列: 2次の単位行列 I_2
4. 符号化と送信シンボル列: $(Y_1, Y_2) = (X_1, X_2)I_2$
5. 2×2 伝送行列 $B_t, t \in T$ s.t. $\text{rank} B_t = 2$:
 - i. Local coding vector
 - ii. Global coding vector: 2次元ベクトル
6. 受信シンボル列 $(Z_{t,1}, Z_{t,2}) = (Y_1, Y_2)B_t, t \in T$
7. 復元) シンク t は符号化行列 I_2 と伝送行列 B_t を既知とする: $B_t B_t^{-1} = I_2$

$$\begin{aligned}
 (Z_{t,1}, Z_{t,2})B_t^{-1} &= ((Y_1, Y_2)B_t)B_t^{-1} \\
 &= ((X_1, X_2)I_2 B_t)B_t^{-1} \\
 &= (X_1, X_2)
 \end{aligned}$$

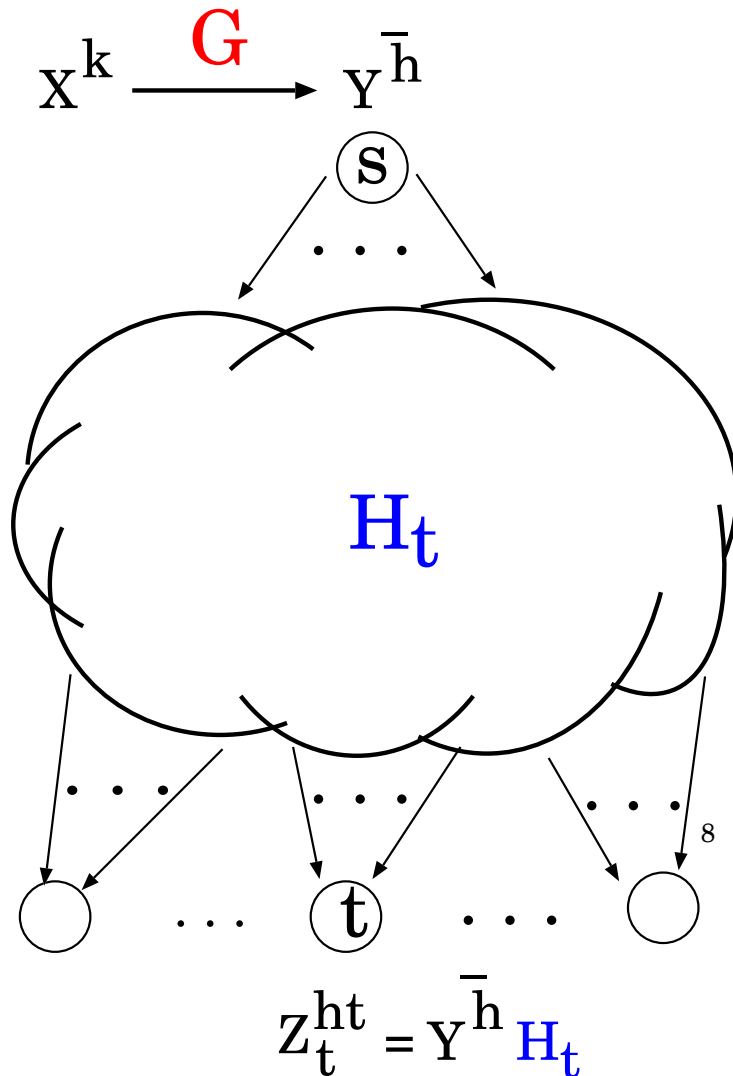


1. 伝送レート $h = \min_{t \in T} h_t$
2. 情報シンボル列 $X^h \in \mathbf{F}^h$
3. 符号化行列: h 次の単位行列 I_h
4. 符号化と送信シンボル列: $Y^h = X^h I_h \in \mathbf{F}^h$
5. $h \times h$ 伝送行列 B_t $t \in T$ s.t. $\text{rank} B_t = h, t \in T$:
 - i. Local coding vector
 - ii. Global coding vector : h 次元ベクトル
6. 受信シンボル列 $Z_t^h = Y^h B_t \in \mathbf{F}^h, t \in T$
7. 復元: シンク t は符号化行列 I_h と伝送行列 B_t を既知とする: $B_t B_t^{-1} = I_h$

$$\begin{aligned}
 Z_t^h B_t^{-1} &= (Y^h B_t) B_t^{-1} \\
 &= (X^h I_h B_t) B_t^{-1} \\
 &= X^h
 \end{aligned}$$

1. まえがき
2. (数学的) 準備
3. ネットワーク (V, E) with (s, T)
4. マルチキャスト線型ネットワーク符号
5. **最大線型ネットワーク符号**
6. ブロードキャスト線型ネットワーク符号
7. ロバスト線型ネットワーク符号
8. 結論

5. 最大線型ネットワーク符号 (最大 LNC)



1. $\bar{h} = \max_{t \in T} h_t$
2. 情報シンボル列 $X^k \in \mathbf{F}^k$ s.t. $k \leq \bar{h}$
3. 符号化行列: $k \times \bar{h}$ 符号化行列 G
4. 符号化と送信シンボル列: $Y^{\bar{h}} = X^k G \in \mathbf{F}^{\bar{h}}$
5. $\bar{h} \times h_t$ 伝送行列 H_t s.t. $\text{rank } H_t = h_t, t \in T$:
 - i. Local coding vector
 - ii. Global coding vector : \bar{h} 次元ベクトル
6. 受信シンボル列:
 $Z_t^{h_t} = Y^{\bar{h}} H_t (= X^k G H_t) \in \mathbf{F}^{h_t}, t \in T$
7. 復元) シンク t は符号化行列 G と伝送行列 H_t を既知とする.

もし, $(GH_t)(GH_t)^{-1} = I_k$ を満たす行列 $(GH_t)^{-1}$ が存在するならば,

$$\begin{aligned}
 Z_t^{h_t} (GH_t)^{-1} &= Y^{\bar{h}} H_t (GH_t)^{-1} \\
 &= X^k G H_t (GH_t)^{-1} = X^k
 \end{aligned}$$

として, X^k を復元できる.

最大 LNC を構成したからといって, 一般に, マルチキャスト LNC に勝る情報伝送ができるというわけではない.

マルチキャスト LNC と 最大 LNC の比較

1. ベクトル, 行列のサイズ (GCV = Global Coding Vector)

	送信シンボル列 と GCV の長さ	情報 シンボル列長	符号化行列	伝送行列
マルチキャスト LNC	$h = \min_{t \in T} h_t$	h	$h \times h$ 行列 I_h	$h \times h$ 行列 B_t
最大 LNC	$\bar{h} = \max_{t \in T} h_t$	$k (\leq \bar{h})$	$k \times \bar{h}$ 行列 G	$\bar{h} \times h_t$ 行列 H_t

2. 情報伝送の図式

	ソース s (符号化)		ネットワーク (伝送)		シンク t (復元)	
\mathbf{F}^h	I_h	\mathbf{F}^h	B_t	\mathbf{F}^h	B_t^{-1}	\mathbf{F}^h
X^h	\longmapsto	Y^h	\longmapsto	Z_t^h	\longmapsto	X^h
\mathbf{F}^k	G	$\mathbf{F}^{\bar{h}}$	H_t	\mathbf{F}^{h_t}	$(GH_t)^{-1}$	\mathbf{F}^k
X^k	\longmapsto	$Y^{\bar{h}}$	\longmapsto	$Z_t^{h_t}$	\longmapsto	X^k

ただし, $\text{rank}GH_t = k$ のとき, $(GH_t)(GH_t)^{-1} = I_k$ を満たす行列 $(GH_t)^{-1}$ が存在する.

最大 LNC とその情報伝送

1. 最大 LNC とは，すべてのシンク $t \in T$ に対し， $\text{rank} H_t = h_t$ を満たす $\bar{h} \times h_t$ 伝送行列 H_t を構成すること．

2. 最大 LNC の情報伝送の図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & G & & H_t & & (GH_t)^{-1} \\
 \mathbf{F}^k & \longrightarrow & \mathbf{F}^{\bar{h}} & \longrightarrow & \mathbf{F}^{h_t} & \longrightarrow & \mathbf{F}^k \\
 X^k & \longmapsto & Y^{\bar{h}} & \longmapsto & Z_t^{h_t} & \longmapsto & X^k
 \end{array}$$

3. そこで，情報シンボル列 X^k の長さ k を $k \leq \bar{h}$ を満たすように設定する．

4. そして，最大流 h_t が k 以上であるシンクの集合を $T(k) = \{t \in T \mid h_t \geq k\}$ と表す．

5. このとき，すべてのシンク $t \in T(k)$ に対し，伝送レート k でマルチキャスト通信が可能である．

なぜなら， $|\mathbf{F}| > |T(k)|$ ならば，すべての $t \in T(k)$ に対し， $\text{rank} H_t = h_t \geq k$ であることと定理 1 より，

$$\text{rank } GH_t = k \text{ for all } t \in T(k)$$

を満たす \mathbf{F} 上の $k \times \bar{h}$ 符号化行列 G が存在する．

これより， $(GH_t)(GH_t)^{-1} = I_k$ を満たす $h_t \times k$ 行列 $(GH_t)^{-1}$ が存在する．したがって，受信シンボル列 $Z_t^{h_t}$ に $(GH_t)^{-1}$ を掛けることで情報シンボル列 X^k を得ることが可能となるから．

$$Z_t^{h_t} (GH_t)^{-1} = Y^{\bar{h}} H_t (GH_t)^{-1} = X^k GH_t (GH_t)^{-1} = X^k$$

6. 特に, $k = h = \min_{t \in T} h_t$ ならば, $T(h) = T$ である.

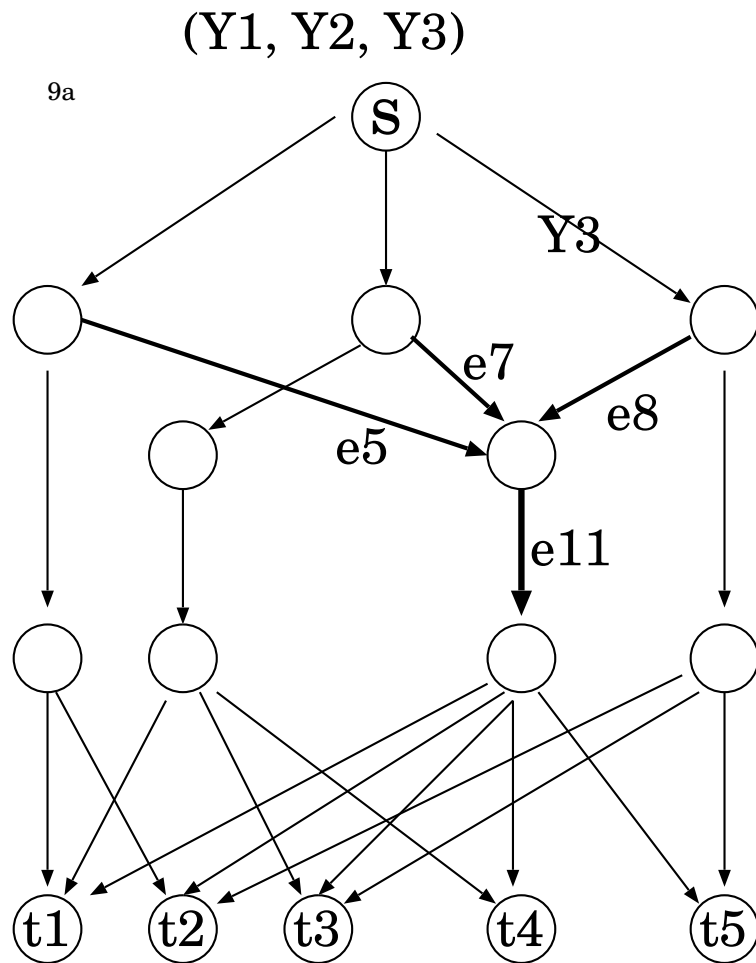
したがって, $|F| > |T(h)| = |T|$ ならば, 定理 1 より, すべてのシンク $t \in T$ に対し, 伝送レート h でマルチキャスト通信を可能とする $h \times \bar{h}$ 符号化行列 G が存在する.

7. すなわち, 符号化行列 G を適切に設計することで, 最大 LNC から マルチキャスト LNC を構成することが可能である.

(“適切に” とは, “rank $GH_t = h$ for all $t \in T$ ” を満たすこと)

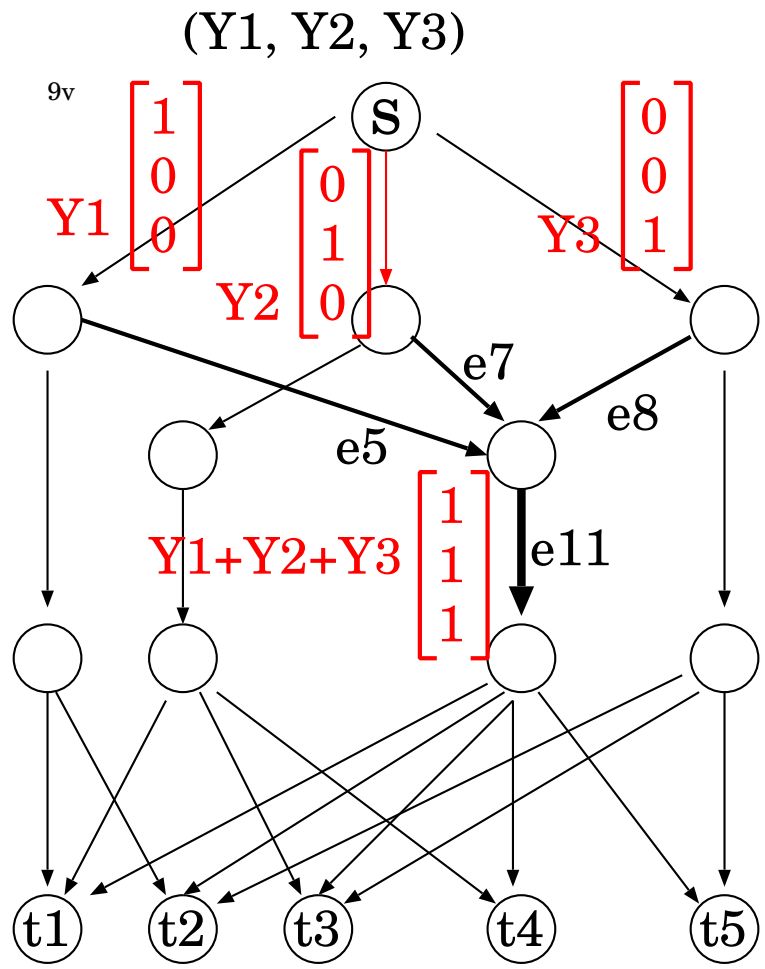
最大 LNC から $\left\{ \begin{array}{l} \text{マルチキャスト LNC} \\ \text{ブロードキャスト LNC} \\ \text{ロバスト LNC} \end{array} \right\}$ を構成可能である.

最大LNCの例 (1/)



1. s : ソースノード
2. $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$: シンクノード
3. $h_1 = h_2 = h_3 = 3,$
 $h_4 = h_5 = 2$
4. $\bar{h} = \max_{t \in T} h_t = 3$
5. 送信シンボル列 と Global coding vector は 3次元ベクトル
 $Y^3 = (Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathbf{F}^3$
6. $3 \times h_t$ 伝送行列 H_t s.t. $\text{rank } H_t = h_t, t \in T$ を構成する .

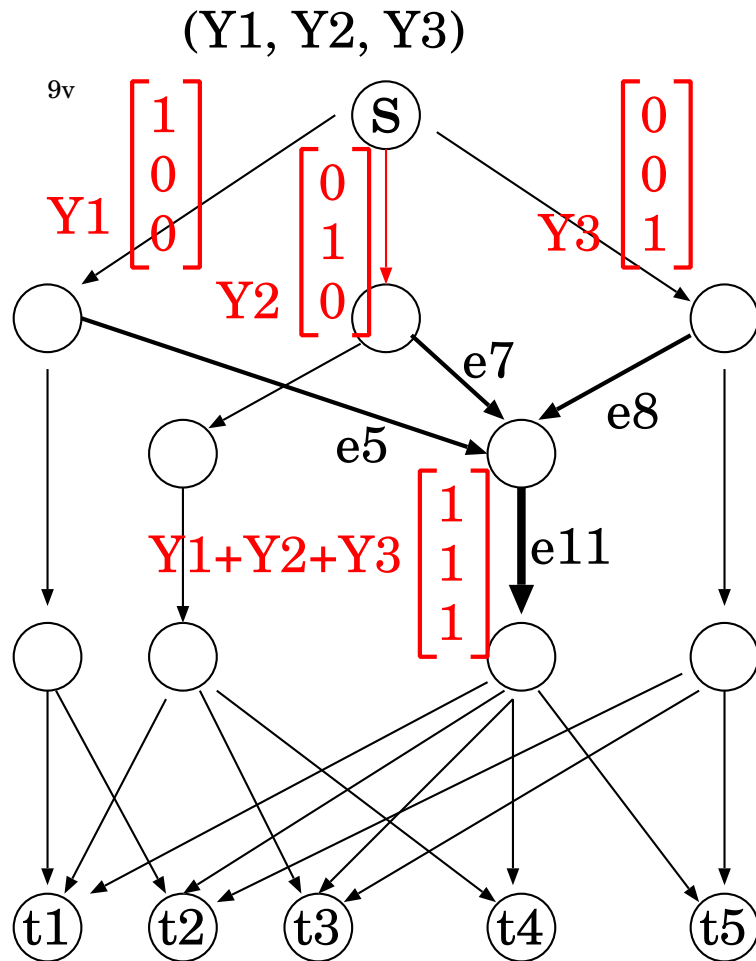
7. リンク e_{11} に対する Local coding vector と Global coding vector:



$$\begin{aligned}
 y(e_{11}) &= (y(e_5), y(e_7), y(e_8)) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

where $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

8. $3 \times h_t$ 伝送行列 $H_t, t \in T$:



$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

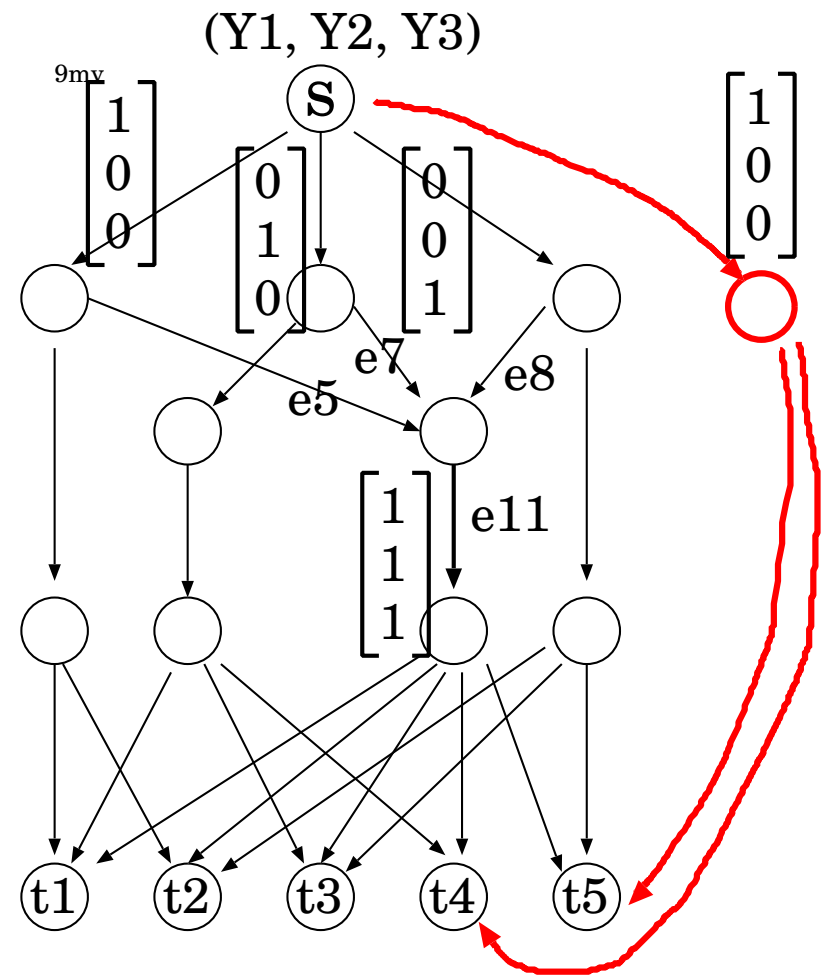
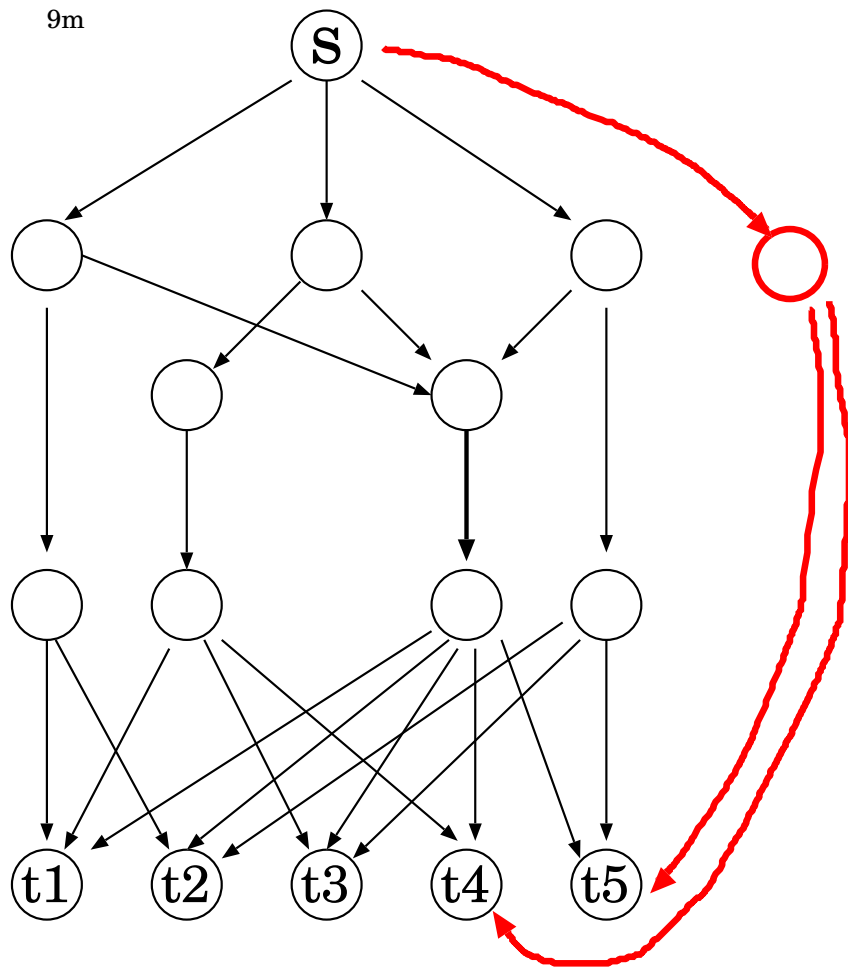
$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

最大LNCの例 (4/)



最大LNCの例 (5/)

1. $k = 3$ のとき, $h_t \geq 3$ を満たすシンクは $\{t_1, t_2, t_3\}$ である。

このとき, s から $\{t_1, t_2, t_3\}$ へ, 伝送レート 3 でマルチキャストを可能にする

3×3 符号化行列 G のひとつは,

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。ここで, $\text{rank } GH_t = 3$, for all $t \in \{t_1, t_2, t_3\}$.

2. 情報シンボル列 (X_1, X_2, X_3) に対し, 送信シンボル列 (Y_1, Y_2, Y_3) は,

$$(Y_1, Y_2, Y_3) = (X_1, X_2, X_3)G = (X_1, X_2, X_3)$$

となる。

3. このとき, シンク t_1 では, 受信シンボル列 $(Z_{t_1,1}, Z_{t_1,2}, Z_{t_1,3})$ として

$$\begin{aligned} (Z_{t_1,1}, Z_{t_1,2}, Z_{t_1,3}) &= (Y_1, Y_2, Y_3)H_{t_1} \\ &= (X_1, X_2, X_1 + X_2 + X_3) \end{aligned}$$

を受信する。

4. 復元には, GH_{t_1} の逆行列 $(GH_{t_1})^{-1}$ を用いて,

$$(Z_{t_1,1}, Z_{t_1,2}, Z_{t_1,3})(GH_{t_1})^{-1} = (X_1, X_2, X_3)$$

として, 情報シンボル列を得る。

最大LNCの例 (6/)

1. $k = 2$ のとき, $h_t \geq 2$ を満たすシンクはすべてのシンク $T = \{t_1, \dots, t_5\}$ である。
このとき, s から $T = \{t_1, t_2, \dots, t_5\}$ へ, 伝送レート 2 でマルチキャストを可能にする

2×3 符号化行列 G のひとつは,

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

である。ここで, $\text{rank } GH_t = 2, \text{ for all } t \in T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$.

2. 例えば, シンク t_1 と t_4 では,

$$GH_{t_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, GH_{t_4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。

3. $(GH_t)(GH_t)^{-1} = I_2$ を満たす行列 $(GH_t)^{-1}$ は,

$$(GH_{t_1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, (GH_{t_4})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。

4. 情報シンボル列 (X_1, X_2) に対し, 送信シンボル列 (Y_1, Y_2, Y_3) は,

$$\begin{aligned} (Y_1, Y_2, Y_3) &= (X_1, X_2)G \\ &= (X_1, X_1 + X_2, X_1 + X_2) \end{aligned}$$

となる。

5. このとき , シンク t_1 と t_4 では , 受信シンボル列として

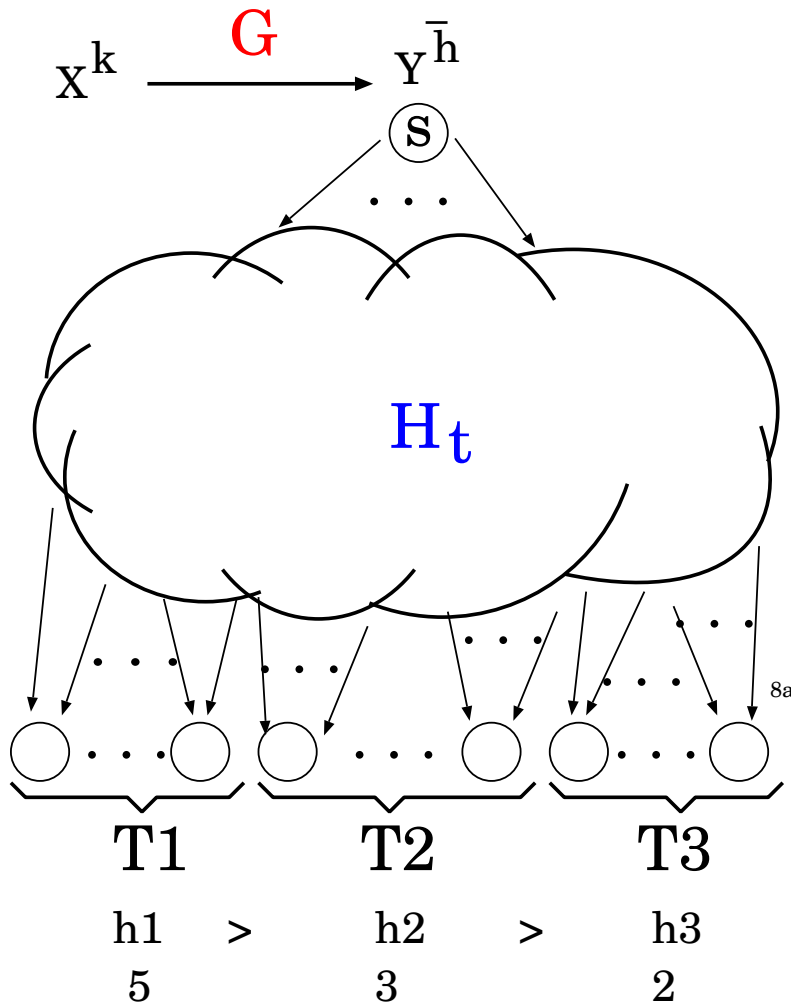
$$\begin{aligned}(Z_{t_1,1}, Z_{t_1,2}, Z_{t_1,3}) &= (Y_1, Y_2, Y_3)H_{t_1} \\ &= (X_1, X_1 + X_2, X_2) \\ (Z_{t_4,1}, Z_{t_4,2}) &= (Y_1, Y_2, Y_3)H_{t_4} \\ &= (X_1 + X_2, X_2)\end{aligned}$$

を受信する .

6. 復元には , GH_t の逆行列 $(GH_t)^{-1}$ を用いて , 情報シンボル列 (X_1, X_2) を得る .

$$\begin{aligned}(Z_{t_1,1}, Z_{t_1,2}, Z_{t_1,3})(GH_{t_1})^{-1} &= (X_1, X_2) \\ (Z_{t_4,1}, Z_{t_4,2})(GH_{t_4})^{-1} &= (X_1, X_2)\end{aligned}$$

最大LNCと情報伝送の例 ($h_1 > h_2 > h_3$)



1. ネットワーク (V, E) with (s, T)
 - i. 3種類の最大流: $h_1, h_2, h_3 = (5, 3, 2)$
 - ii. シンク: $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$, where

$$T_i = \{t \in V \text{ s.t. } h_t = h_i\} \text{ for } i = 1, 2, 3$$
2. $\bar{h} = \max\{h_1, h_2, h_3\} = 5$
3. 最大LNCの構成, すなわち, $\bar{h} \times h_t$ 伝送行列 $H_t, t \in T$ の構成
4. $h_i \times \bar{h}$ 符号化行列 $G_i, i = 1, 2, 3$ の設計
 - i. $\text{rank} G_1 H_t = 5$ for all $t \in T(5) = T_1$,
 - ii. $\text{rank} G_2 H_t = 3$ for all $t \in T(3) = T_1 \cup T_2$,
 - iii. $\text{rank} G_3 H_t = 2$ for all $t \in T(2) = T_1 \cup T_2 \cup T_3$.
5. マルチキャスト可能なシンクの集合 $T(k)$:

i	符号化行列 G_i	伝送レート k	シンク集合 $T(k)$
1	G_1	5	T_1
2	G_2	3	$T_1 \cup T_2$
3	G_3	2	$T_1 \cup T_2 \cup T_3$

1. まえがき
2. (数学的) 準備
3. ネットワーク (V, E) with (s, T)
4. マルチキャスト線型ネットワーク符号
5. 最大線型ネットワーク符号
6. **ブロードキャスト線型ネットワーク符号**
7. ロバスト線型ネットワーク符号
8. 結論

6. ブロードキャスト線型ネットワーク符号 (ブロードキャスト LNC)

1. 本発表で扱うブロードキャストとは, [LiYeungCai2003]において示されたブロードキャストと同じ枠組である.

ブロードキャストとは,

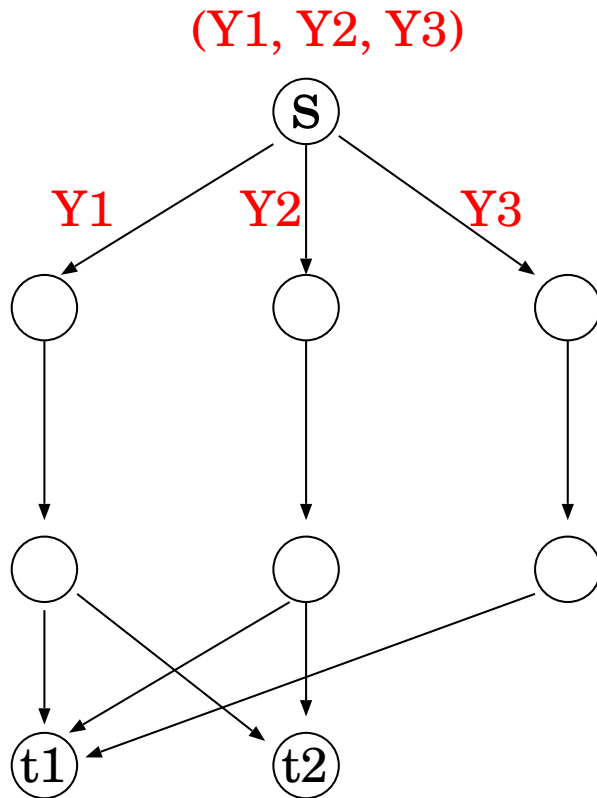
「各シンク $t \in T$ に対し, ソース s からシンク t へ, 同じメッセージを
(平均) 伝送レート h_t で伝送すること」

2. 一方, マルチキャストとは,

「すべてのシンク $t \in T$ に対し, ソース s からシンク t へ, 同じ情報を
同時に伝送すること, すなわち, 同じ伝送レートで伝送すること」

特に, マルチキャスト LNC により, 伝送レート $h = \min_{t \in T} h_t$ を達成することが可能である.

ブロードキャストの例 (1/)



1. s : ソース
2. $T = \{t_1, t_2\}$: シンク
3. 最大流: $h_1 = 3, h_2 = 2$
4. 最大流の最小公倍数 $L = \text{L.C.M}(h_1, h_2) = 6$
5. メッセージ長 $L = 6$ のメッセージ

$$(X_1, X_2, \dots, X_6) \in \mathbb{F}^6$$

6. $\bar{h} = \max_{t \in T} h_t = 3$

$$(Y_1, Y_2, X_3) \in \mathbb{F}^3 : \text{送信シンボル列}$$

7. ソースからの送信データ

clk	(Y_1, Y_2, Y_3)
1	(X_1, X_2, X_3)
2	(X_4, X_5, X_6)
3	$(X_3, X_6, *)$

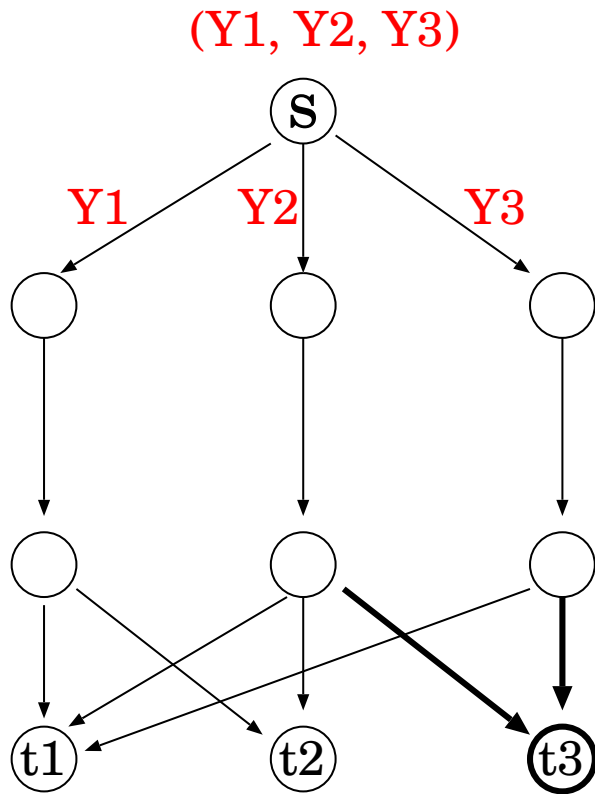
8. シンク t_1 と t_2 での受信結果

clk	Z_{t1}^3	Z_{t2}^2
1	(X_1, X_2, X_3)	(X_1, X_2)
2	(X_4, X_5, X_6)	(X_4, X_5)
3		(X_3, X_6)

10

9. 各シンクは, (平均) 伝送レート h_t で受信可能である.

ブロードキャストの例 (2/)



1. s : ソース
2. $T = \{t_1, t_2, t_3\}$: シンク
3. 最大流: $h_1 = 3, h_2 = h_3 = 2$
4. 最大流の最小公倍数 $L = \text{L.C.M}(h_1, h_2, h_3) = 6$
- 11 5. メッセージ長 $L = 6$ のメッセージ

$$(X_1, X_2, \dots, X_6) \in \mathbb{F}^6$$

$$6. \bar{h} = \max_{t \in T} h_t = 3$$

$$(Y_1, Y_2, X_3) \in \mathbb{F}^3 : \text{送信シンボル列}$$

7. ソースからの送信データ (先の例と同じ)

clk	(Y ₁ , Y ₂ , Y ₃)
1	(X ₁ , X ₂ , X ₃)
2	(X ₄ , X ₅ , X ₆)
3	(X ₃ , X ₆ , *)

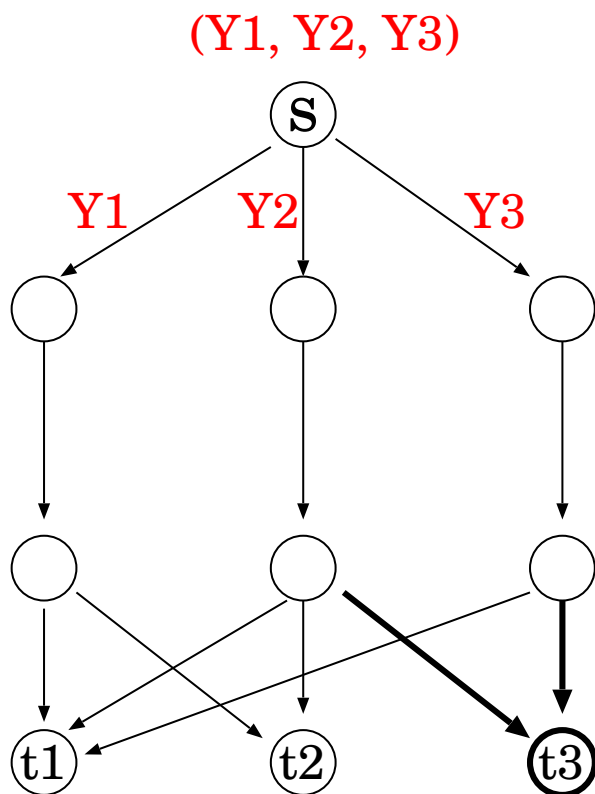
8. シンク t_2 と t_3 での受信結果

clk	$Z_{t_2}^3$	$Z_{t_3}^2$
1	(X ₁ , X ₂)	(X ₂ , X ₃)
2	(X ₄ , X ₅)	(X ₅ , X ₆)
3	(X ₃ , X ₆)	(X ₆ , *)

11

9. シンク t_3 は, 正しく受信できない.

ブロードキャストの例 (3/)



10. そこで, $clock\ 3$ での送信データを次のように変更する.

clk	(Y_1, Y_2, Y_3)
1	(X_1, X_2, X_3)
2	(X_4, X_5, X_6)
3	$(X_1 + X_3, X_4 + X_6, X_1 + X_3)$

11

11. すると, シンク t_2 と t_3 での受信結果は,

clk	$Z_{t_2}^3$	$Z_{t_3}^2$
1	(X_1, X_2)	(X_2, X_3)
2	(X_4, X_5)	(X_5, X_6)
3	$(X_1 + X_3, X_4 + X_6)$	$(X_4 + X_6, X_1 + X_3)$

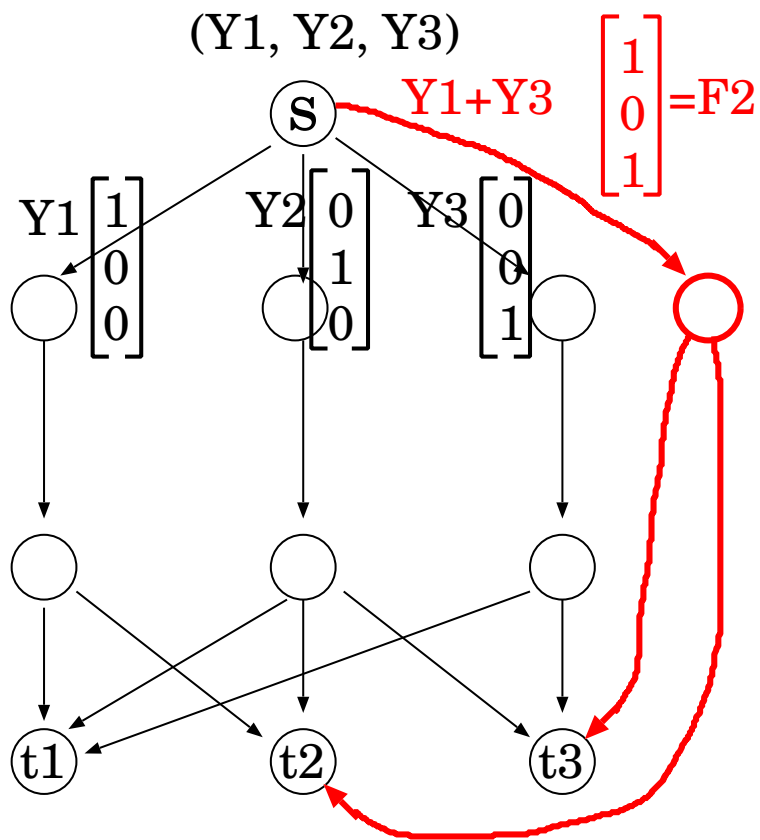
12. ゆえに, シンク t_2 と t_3 はともに, (平均) 伝送レート 2 で正しくメッセージを受信できる.

13. これより, 異なる最大流をもつシンクの集合 T

11

に対し, 送信するデータを工夫すれば, すなわち, 線型符号化すればブロードキャスト通信が可能である.

ブロードキャスト LNC と情報伝送の例 (1/)



12

1. すべてのシンク $t \in T$ に対し, 最大流が $\bar{h}(= 3)$ になるように**仮想の ノード と リンク** を追加する .
2. その上で, 伝送レート \bar{h} のマルチキャスト LNC を構成する . すなわち, 3×3 伝送行列を構成する .

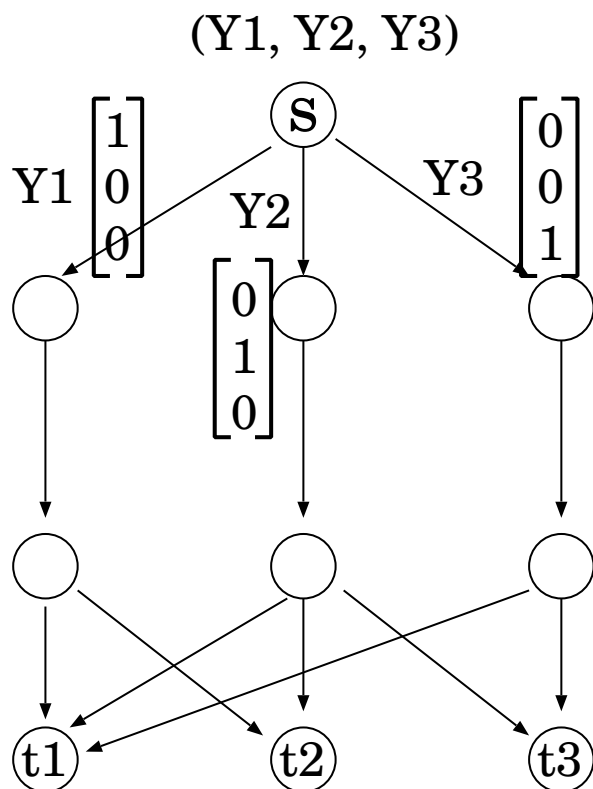
$$H_1 = I_3 \text{ for } t_1,$$

$$[H_2 | F_2] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ for } t_2,$$

$$[H_3 | F_2] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \text{ for } t_3.$$

3. 行列 H_1, H_2, H_3 は, 最大 LNC に対応する各シンク t_i の $\bar{h} \times h_i$ 伝送行列になっている .
4. そして, 仮想リンクに付随する **Global coding vector** を **補助行列 F_2** とする .

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



13

5. 伝送行列) 最大 LNC による, 各シンク t_i の $h_i \times \bar{h}$ 伝送行列, $i = 1, 2, 3$: 3×3 伝送行列: $H_1 = I_3$,

$$2 \times 3 \text{ 伝送行列: } H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$2 \times 3 \text{ 伝送行列: } H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. 補助行列) シンク t_2 と t_3 に対する補助行列 F_2 :

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. 最大 LNC より, 伝送レート 3, 2 のマルチキャスト通信を可能にする符号化行列が存在する:

i. 伝送レート 3: $s \longrightarrow \{t_1\}$

ii. 伝送レート 2: $s \longrightarrow T = \{t_1, t_2, t_3\}$

13

8. 符号化行列) 次のように伝送行列 H_t , $t \in T$ と補助行列 F_2 に対応するような符号化行列 G_1, G_2 を構成する:

i. 伝送レート 3: $G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ s.t. $\underline{\text{rank}G_1H_1 = \text{rank}G_1[H_2|F_2] = \text{rank}G_1[H_3|F_2] = 3}$

ii. 伝送レート 2: $G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ s.t. $\underline{\text{rank}G_2H_2 = \text{rank}G_2H_3 = 2}$

9. データ行列) メッセージ (X_1, \dots, X_6) , 補助行列 F_2 , 符号化行列 G_1 の 3 種類のデータから情報シンボル列 X^k に対応するデータ行列 D_1, D_2 というものを構成する:

i. 2×3 データ行列 $D_1 = \begin{bmatrix} 1(X_1, X_2, X_3) \\ 2(X_4, X_5, X_6) \end{bmatrix} \Rightarrow (\text{clock } 1, 2 \text{ の情報シンボル列 } X^3)$

ii. 1×2 データ行列 $D_2 = [3(X_1 + X_3, X_4 + X_6)] \Rightarrow (\text{clock } 3 \text{ の情報シンボル列 } X^2)$

D_2 は, 2×1 補助データ行列 $D_2^{(1)} = D_1G_1F_2$ の並べ換えで得られる:

$$D_2^{(1)} = D_1G_1F_2 = \begin{bmatrix} X_1, X_2, X_3 \\ X_4, X_5, X_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 + X_3 \\ X_4 + X_6 \end{bmatrix}$$

ブロードキャスト LNC と情報伝送の例 (4/)

8. 符号化と送信シンボル $Y^{\bar{h}} = X^k G$)

各 *clock* 毎に, ソース s から送信するデータ (Y_1, Y_2, Y_3) は, 次の行列の各行ベクトルに対応する:

$$\left[\begin{array}{c} D_1 G_1 \\ D_2 G_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 1(X_1, X_2, X_3) \\ 2(X_4, X_5, X_6) \\ 3(X_1 + X_3, X_4 + X_6, X_1 + X_3) \end{array} \right] \Rightarrow (Y_1, Y_2, Y_3)$$

9. 受信)

i. シンク t_1)

1. clock 1, 2 の間に以下のデータを受信する:

$$Z_1^{(1)} = D_1 G_1 H_1 = \left[\begin{array}{c} 1(X_1, X_2, X_3) \\ 2(X_4, X_5, X_6) \end{array} \right]$$

ii. シンク t_2)

1. clock 1, 2 の間に以下のデータを受信する:

$$Z_2^{(1)} = D_1 G_1 H_2 = \left[\begin{array}{c} 1(X_1, X_2) \\ 2(X_4, X_5) \end{array} \right]$$

2. clock 3 で以下のデータを受信する:

$$Z_2^{(2)} = D_2 G_2 H_2 = \left[3(X_1 + X_3, X_4 + X_6) \right]$$

10. 復元)

i. シンク t_1) G_1, H_1 を既知とする .

1. clock 1, 2 で受信したデータ $Z_1^{(1)}$ より ,

$$Z_1^{(1)}(G_1H_1)^{-1} = D_1G_1H_1(G_1H_1)^{-1} = D_1 \text{ としてデータ行列 } D_1 \text{ を得る .}$$

ii. シンク t_2) G_1, G_2, F_2, H_2 を既知とする .

1. clock 3 で受信したデータ $Z_2^{(2)}$ より ,

$$Z_2^{(2)}(G_2H_2)^{-1} = D_2G_2H_2(G_2H_2)^{-1} = D_2 \text{ を得る .}$$

そして , データ行列 D_2 の並び換えで 補助データ行列 $D_2^{(1)}$ を得る .

2. 次に , 補助データ行列 $D_2^{(1)}$ の構成は , $D_2^{(1)} = D_1G_1F_2$ より ,

clock 1, 2 受信したデータ $Z_2^{(1)}$ と $D_2^{(1)}$ を並べた行列は ,

$$[Z_2^{(1)} | D_2^{(1)}] = [D_1G_1H_2 | D_1G_1F_2] = D_1G_1[H_2 | F_2] \text{ と表される .}$$

3. 以上より , その行列 $[Z_2^{(1)}, D_2^{(1)}]$ に対し , $(G_1[H_2, F_2])^{-1}$ を用いることで ,

次のように , データ行列 D_1 を得ることが可能である .

$$[Z_2^{(1)} | D_2^{(1)}](G_1[H_2 | F_2])^{-1} = D_1G_1[H_2 | F_2](G_1[H_2 | F_2])^{-1} = D_1$$

ブロードキャスト LNC (定理)

与えられたネットワーク (V, E) with (s, T) に対し, 前処理として **最大 LNC** を構成する, すなわち, $h_t \times \bar{h}$ 伝送行列 $H_t, t \in T$ を構成する. このとき, 次のことが成り立つ.

定理 3:

$|F| > |T|$ ならば, 伝送行列 $H_t, t \in T$ を変更することなく, ブロードキャスト通信が可能である.

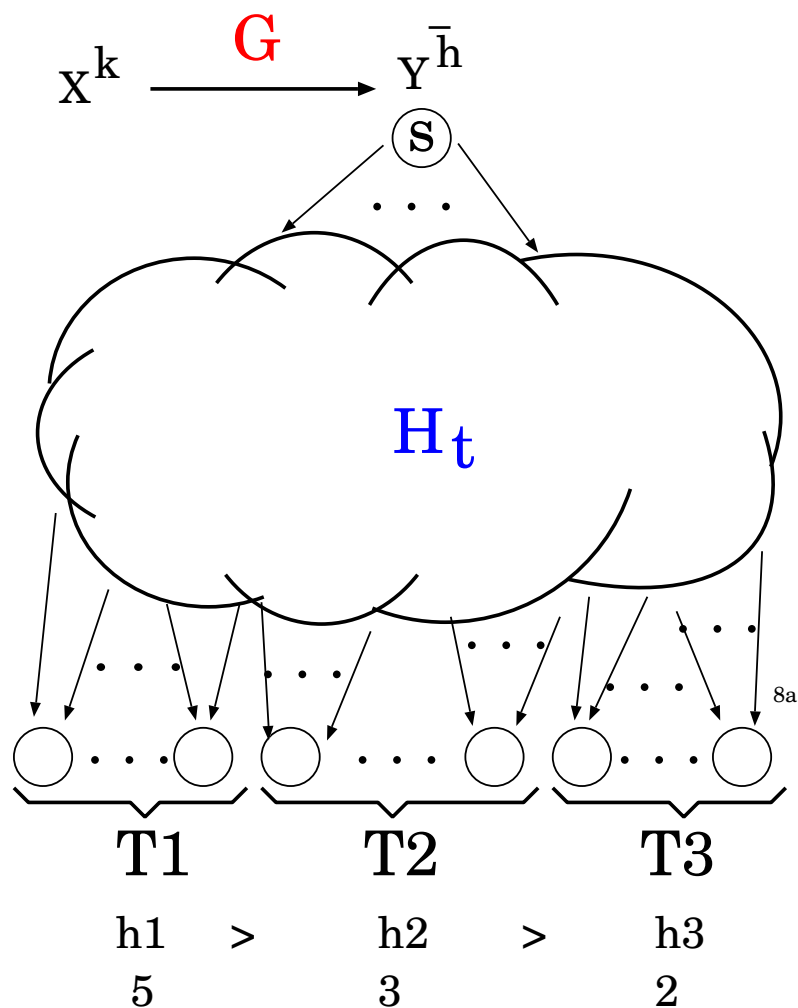
(すなわち, 最大 LNC より, ブロードキャスト通信を可能とする **符号化行列** 及び **blue** データ行列 を組織的構成することが可能である.)

上記の定理より, **符号化行列** を適切に設計することで, 最大 LNC からブロードキャスト LNC を構成することが可能である.

“適切に” とは, $\left\{ \begin{array}{l} \text{“rank } G_1 H_1 = \text{rank } G_1 [H_2 | F_2] = \text{rank } G_1 [H_3 | F_2] = 3”} \\ \text{“rank } G_2 H_2 = \text{rank } G_2 H_3 = 2”} \end{array} \right\}$ を満たすこと.

最大 LNC から $\left\{ \begin{array}{l} \text{マルチキャスト LNC(最小 LNC)} \\ \text{ブロードキャスト LNC} \\ \text{ロバスト LNC} \end{array} \right\}$ を構成可能である.

ブロードキャスト LNC と情報伝送の例 ($h_1 > h_2 > h_3$) (1/)



1. ネットワーク (V, E) with (s, T)

i. 3種類の最大流: $(h_1, h_2, h_3) = (5, 3, 2)$

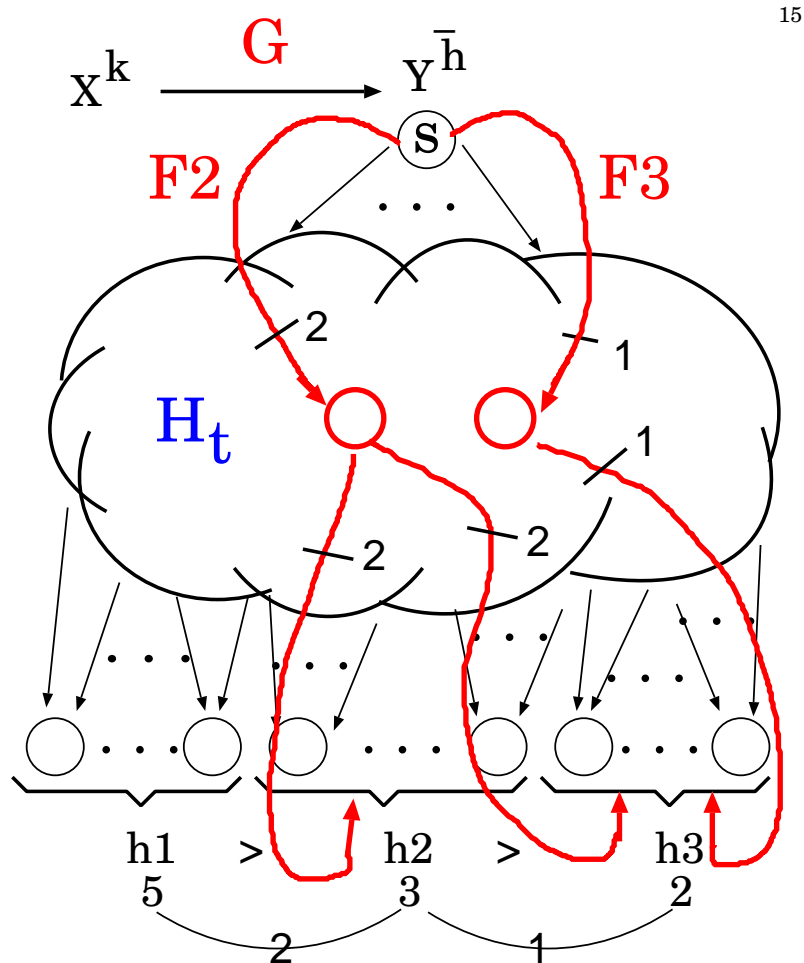
ii. シンク: $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$, where

$$T_i = \{t \in V \text{ s.t. } h_t = h_i\} \text{ for } i = 1, 2, 3$$

2. $\bar{h} = \max\{h_1, h_2, h_3\} = 5$

3. したがって, 送信シンボル列 及び **Global coding vector** は, 5次元ベクトル.

ブロードキャスト LNC と情報伝送の例 ($h_1 > h_2 > h_3$) (2/)



15

3. 伝送行列と補助行列の構成)

すべてのシンク $t \in T$ の最大流が 5 になるように，図のような仮想リンクを追加する．そして，伝送レート 5 のマルチキャスト LNC を構成する．その結果，

- i. 最大 LNC の $5 \times h_t$ 伝送行列 $H_t, t \in T$ と，
- ii. 補助行列 F_2, F_3 を得ることができる．

4. 符号化行列の構成)

伝送行列と補助行列より，次の条件を満たす

$h_i \times \bar{h}$ 符号化行列 $G_i, i = 1, 2, 3$ を設計する．

- i. $\text{rank } G_1 H_{t_1} = \text{rank } G_1 [H_{t_2} | F_2]$
 $= \text{rank } G_1 [H_{t_3} | F_3 | F_2] = 5$
for $t_1 \in T_1, t_2 \in T_2, t_3 \in T_3$,
- ii. $\text{rank } G_2 H_{t_2} = \text{rank } G_2 [H_{t_3} | F_3] = 3$
for $t_2 \in T_2, t_3 \in T_3$,
- iii. $\text{rank } G_3 H_{t_3} = 2$ for $t_3 \in T_3$.

14

ブロードキャスト LNC と情報伝送の例 ($h_1 > h_2 > h_3$) (3/)

7. 一方, 最大流の最小公倍数 $L = \text{L.C.M}(5, 3, 2) = 30$ より, メッセージを $(X_1, X_2, \dots, X_{30}) \in \mathbb{F}^{30}$ とする.
8. データ行列の構成)
メッセージ, 符号化行列, 補助行列を用いて, データ行列 D_1, D_2, D_3 を組織的に構成する.
9. *clock* と送信データ $D_i G_i, i = 1, 2, 3$ と受信するシンクの集合:

<i>clock</i>	情報長 k	D_i	G_i	受信する シンクの集合
1 ~ 6(6)	5	D_1	G_1	$T_1 \cup T_2 \cup T_3$
7 ~ 10(4)	3	D_2	G_2	$T_2 \cup T_3$
11 ~ 15(5)	2	D_3	G_3	T_3

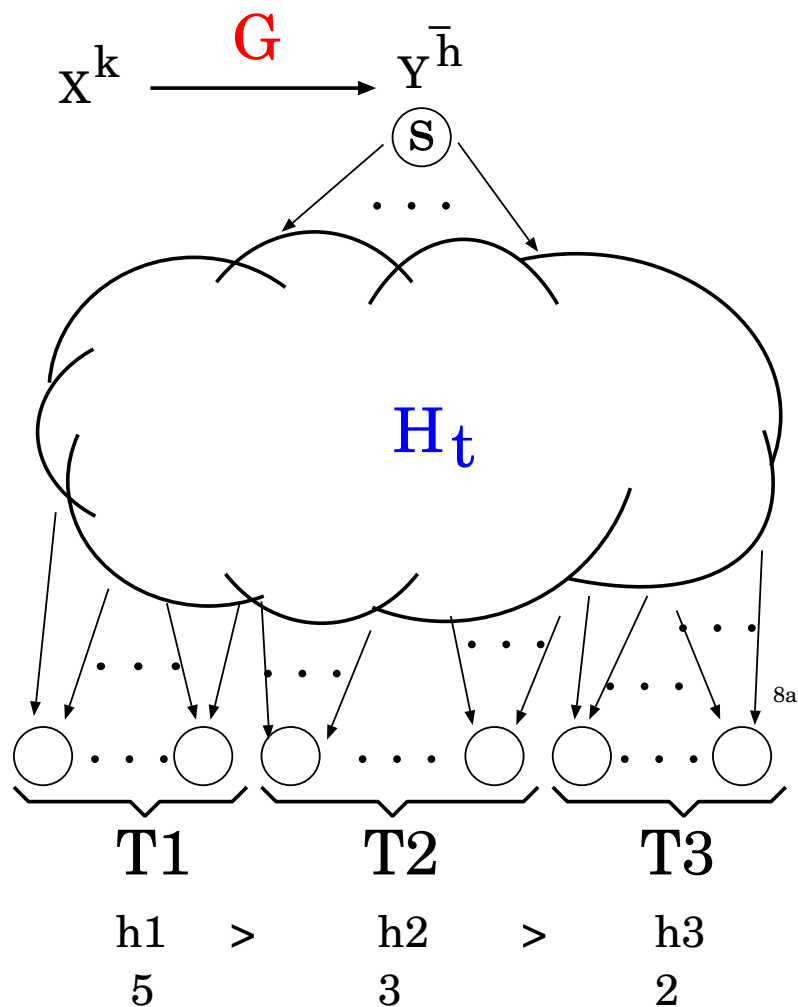
10. (平均) 伝送レート

$$= (\text{受信したシンボルの個数}) / (\text{受信した } clock \text{ 数})$$

$$T_1: (5 \times 6) / 6 = 30 / 6 = 5,$$

$$T_2: (3 \times (6 + 4)) / (6 + 4) = 3,$$

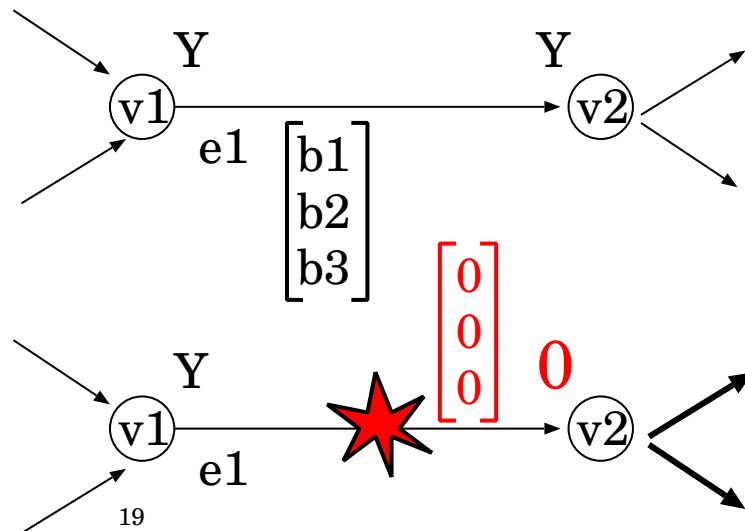
$$T_3: (2 \times (6 + 4 + 5)) / (6 + 4 + 5) = 2.$$



1. まえがき
2. (数学的) 準備
3. ネットワーク (V, E) with (s, T)
4. マルチキャスト線型ネットワーク符号
5. 最大線型ネットワーク符号
6. ブロードキャスト線型ネットワーク符号
7. **ロバスト線型ネットワーク符号**
8. 結論

7. ロバスト LNC (1/)

1. ロバスト LNC の枠組み及び構成法は，最初に，[KoetterMedard2003]において与えられた．構成法の本質は，マルチキャスト LNC と同じ．
2. その後，異なるアプローチでの構成法が [Jaggi et al 2005] においても与えられた．
3. ロバスト LNC とは，Link failure に対応する符号である．
4. ロバスト LNC で仮定する Link failure とは，リンク故障で **伝送データを伝送できないこと**．
 - i. 理論的には，Link failure が発生した unit capacity のリンクでは，そのリンク上を流れる F の要素である伝送シンボルが常に固定値の 零元 $0 \in F$ に変化する と仮定する．
 - ii. このことは，Link failure の発生により，リンクに付随する Global coding vector が零ベクトルに変化する こととしても処理できる．



$$(Y_1, Y_2, Y_3) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = Y$$

$$(Y_1, Y_2, Y_3) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

ロバスト LNC (2/)

5. シンク側では、受信データから送信データを復元するための 補助情報 として、発生した複数の **Link failure** の位置情報を示す Link failure pattern F を知ることができる と仮定する.
6. ネットワーク上で発生する **Link failure pattern** の全体の集合を \mathcal{F} と表す.
7. このとき、ロバスト LNC として、次のような問題設定を考える.

ネットワーク (V, E) with (s, T) とその上での **Link failure pattern** の集合 \mathcal{F} が与えられているとする .

このとき、任意の **Link failure pattern** $F \in \mathcal{F}$ に対し、ソース s からすべてのシンク $t \in T$ へ、伝送レート k で、情報を伝送可能とする 符号を求めよ .

そして、伝送レート k と **Link failure pattern** の集合 \mathcal{F} との 関係を示せ .

ロバストLNCの構成 (1/)

1. ネットワーク (V, E) with (s, T) と Link failure patternの集合 \mathcal{F} が与えられる .
2. まず , ネットワーク (V, E) with (s, T) に対し , 最大LNCを構成する .

すなわち , 伝送行列 $H_t, t \in T$ を構成する:

i. $\bar{h} = \max_{t \in T} h_t$

ii. $\bar{h} \times h_t$ 伝送行列 H_t

最大LNCを構成する ということは , 中継ノードでの Local coding vector を定める ということに注意する .

3. 次に , Link failure 伝送行列 $M_t^F, t \in T$ というものについて考える:

Link failureの仮定より , Link failureが発生したリンクの Global coding vector は 零ベクトルに変化する . 一方 , Local coding vector は , Link failure の影響を受けることなく変更されず , 固定したままである .

したがって , Topological order の順に従って , Link failure pattern F が発生した後の Global coding vector を , 最大LNCで定めた Local coding vector を用いて一意に定めることができる .

すなわち , 各シンク t の伝送行列 H_t は , Link failure pattern F の影響を受けて変化するが , 一意に定まる . その行列を , Link failure 伝送行列 M_t^F として表す .

4. 言い換えると , **Link failure pattern** F の影響を受けたネットワークにおいて , ソース s から送信した送信シンボル列 $Y^{\bar{h}}$ に対し , 各シンク t での受信シンボル列 $Z_t^{h_t}$ が一意に定まるということ .

これは , **Link failure** 伝送行列 M_t^F を用いて

$$Y^{\bar{h}} M_t^F = Z_t^{h_t}$$

と表すことができる . **Link failure pattern** F の影響を受けなければ ,

$$Y^{\bar{h}} H_t = Z_t^{h_t}$$

と書くこともできる .

5. 以上より , **Link failure** 伝送行列 M_t^F は , 構成された 最大LNC と Link failure pattern F により , 一意に定めることが可能である .

6. また , **Link failure** 伝送行列 M_t^F の総数は ,

$$M_t^F \text{ for all } t \in T \text{ and } F \in \mathcal{F}$$

より , $|T| \times |\mathcal{F}|$ であることが分かる .

7. このとき , 伝送レート k を ,

$$k \leq \text{rank } M_t^F \text{ for all } t \in T \text{ and } F \in \mathcal{F}$$

を満たすものと仮定する . すると , 定理 1 より ,

$$|\mathbf{F}| > |T| \times |\mathcal{F}|$$

ならば ,

$$\text{rank } G M_t^F = k \text{ for all } t \in T \text{ and } F \in \mathcal{F}$$

を満たす \mathbf{F} 上の $k \times \bar{h}$ 符号化行列 G が存在する .

8. ロバスト LNC の情報伝送の図式) For all $t \in T$ and $F \in \mathcal{F}$,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{(符号化)} & & \text{(伝送)} & & \text{(復元)} \\
 & & G & & M_t^F & & (GM_t^F)^{-1} \\
 \mathbf{F}^k & \longrightarrow & \mathbf{F}^{\bar{h}} & \longrightarrow & \mathbf{F}^{h_t} & \longrightarrow & \mathbf{F}^k \\
 X^k & \longmapsto & Y^{\bar{h}} & \longmapsto & Z_t^{h_t} & \longmapsto & X^k
 \end{array}$$

9. 復元) ロバスト LNC の仮定より, シンク t では, 受信シンボル列 $Z_t^{h_t}$ 以外に, 補助情報として **Link failuer pattern** F を得ることが可能である. この補助情報 F より, **Link failuer 伝送行列** M_t^F を一意に求めることが可能である. 以上より,

$$Z_t^{h_t} (GM_t^F)^{-1} = X^k GM_t^F (GM_t^F)^{-1} = X^k$$

として, 情報シンボル列 X^k を復元することができる.

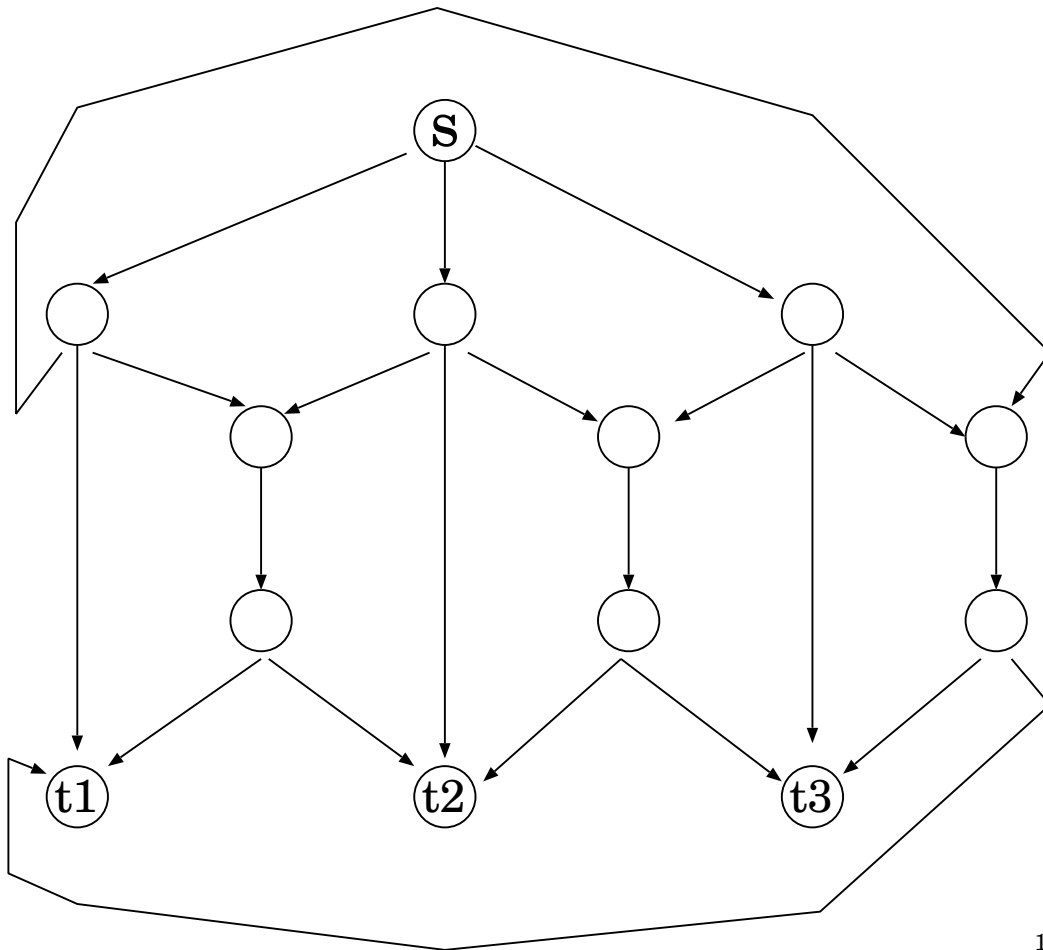
10. ゆえに, **符号化行列** G を適切に設計することで, 最大 LNC から伝送レート k のロバスト LNC を構成することが可能である.

“適切に” とは, “rank $GM_t^F = k$ for all $t \in T$ and $F \in \mathcal{F}$ ” を満たすこと

最大 LNC から $\left\{ \begin{array}{l} \text{マルチキャスト LNC(最小 LNC)} \\ \text{ブロードキャスト LNC} \\ \text{ロバスト LNC} \end{array} \right\}$ を構成可能である.

ロバスト LNC の例 (1/) (Link Failuer 伝送行列 M_t^F の一意性)

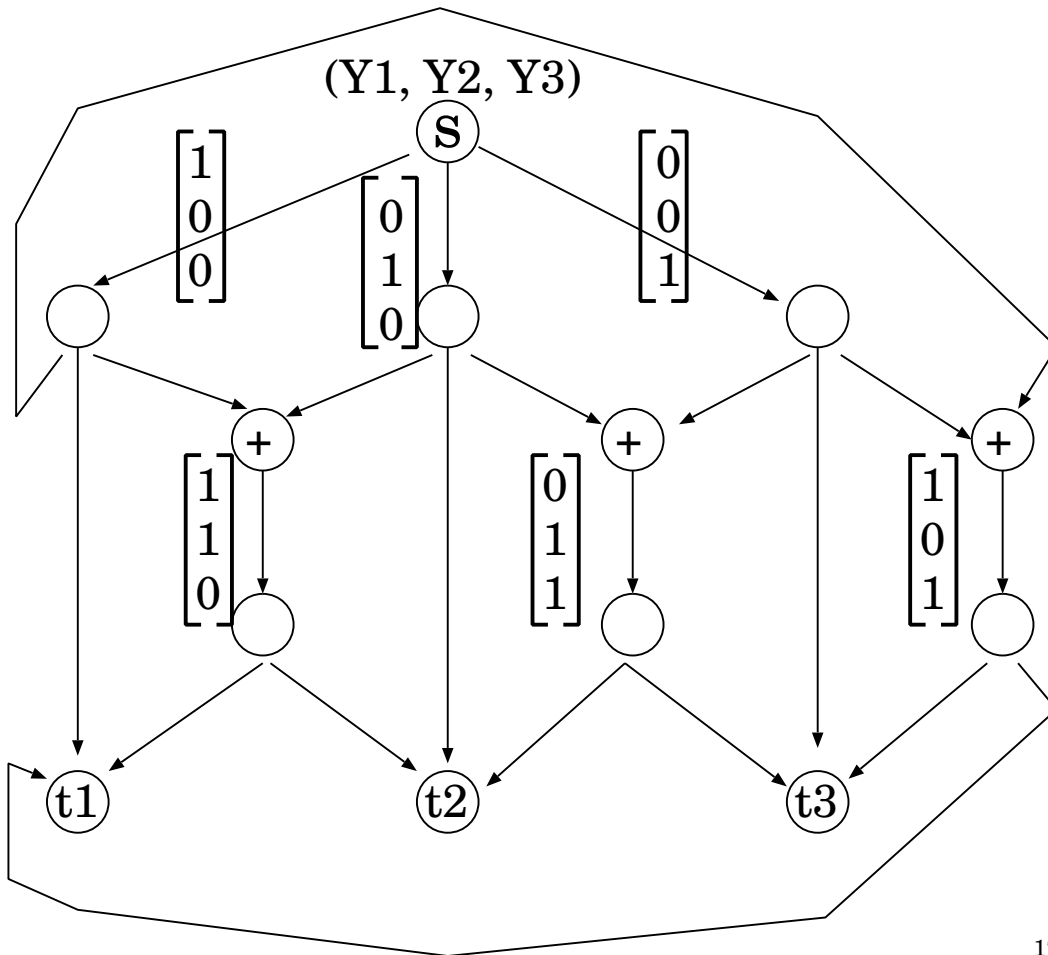
16



1. ネットワーク (V, E) with (s, T)
2. s : ソース
3. $T = \{t_1, t_2, t_3\}$: シンク
4. 最大流: $h_1 = h_2 = h_3 = 3$
5. $\bar{h} = \max_{t \in T} h_t = 3$
6. 送信シンボル列と Global coding vector は 3 次元ベクトル

16

$H(V, E)$



1. 最大LNCを構成したネットワークの符号を $H(V, E)$ と表すことにする .

i. Local coding vector

ii. Global coding vector

2. $\bar{h} \times h_t$ 伝送行列 $H_t, t \in T$:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

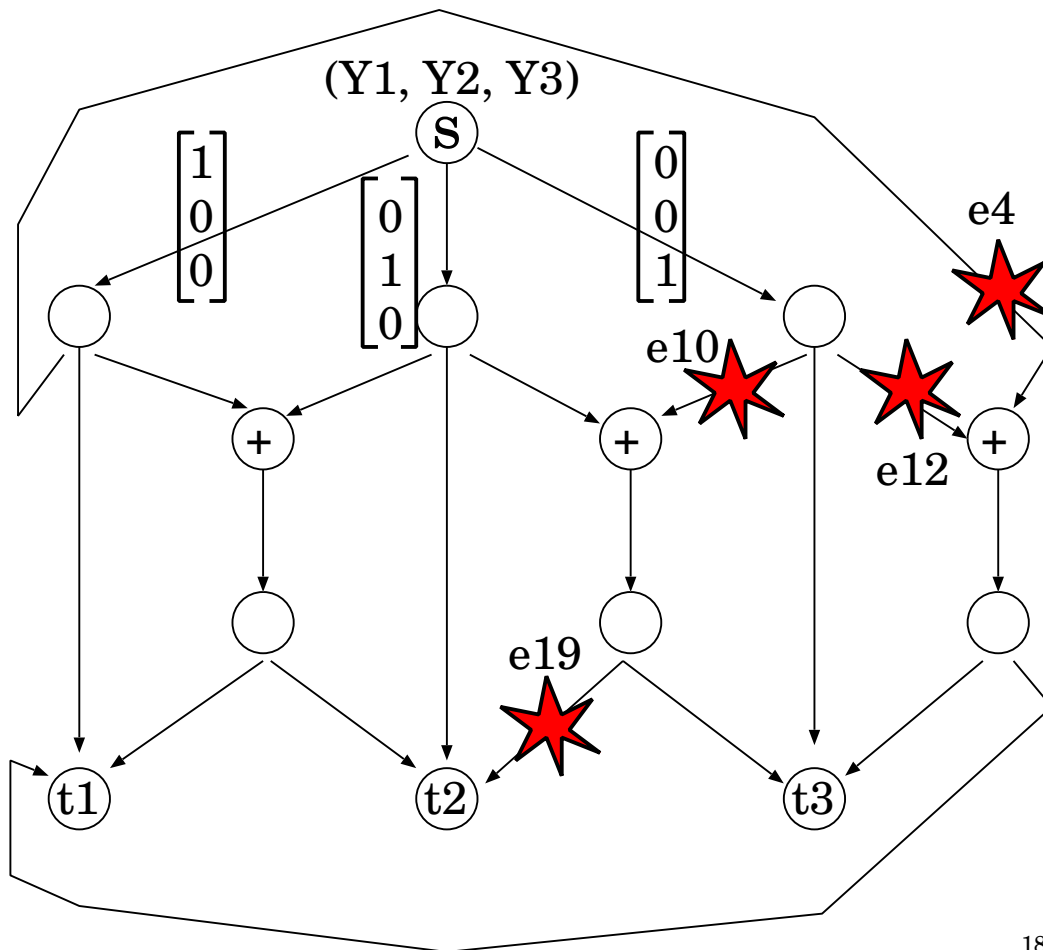
$$H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 受信シンボル列 $Z_t^{ht}, t \in T$:

$$Z_t^{ht} = (Y_1, Y_2, X_3)H_t$$

ロバストLNCの例 (3/) (Link Failuer 伝送行列 M_t^F の一意性)

18a



1. Link failure pattern $F \in \mathcal{F}$:

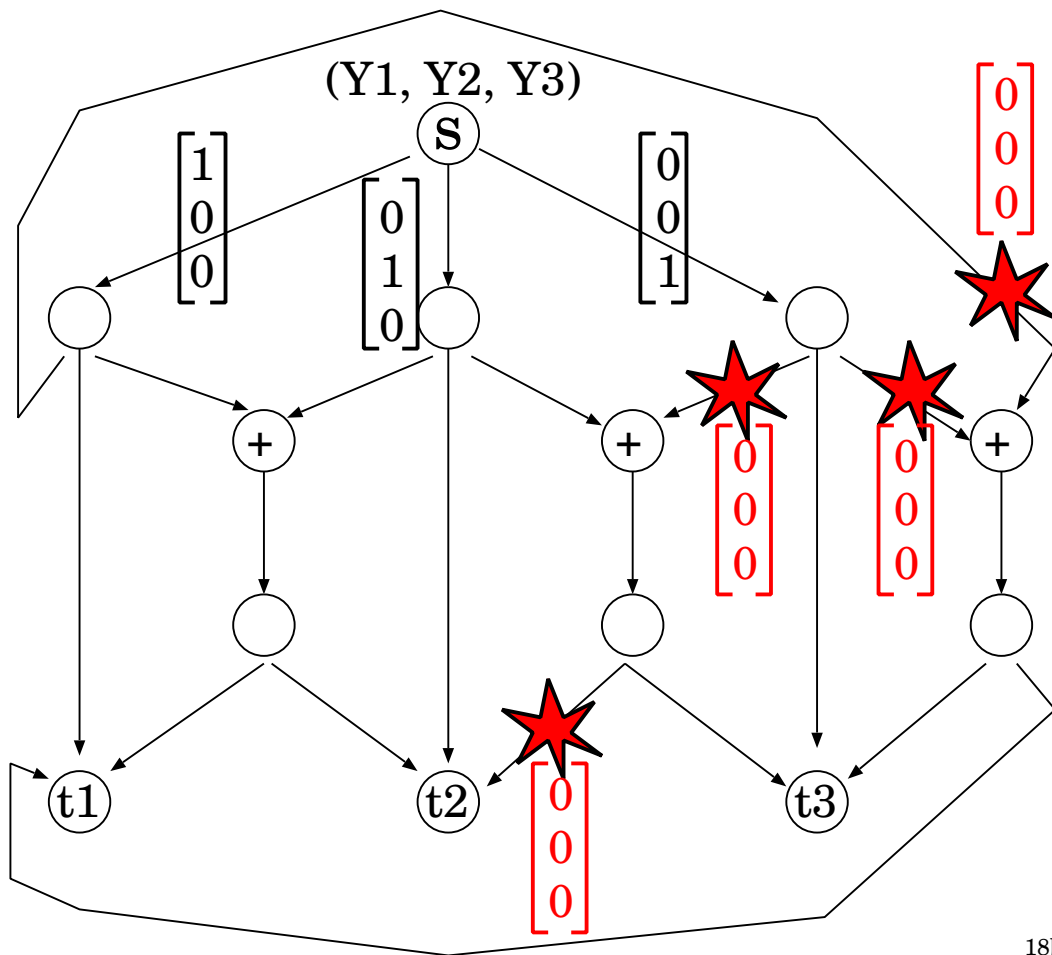
$$F = \{e_4, e_{10}, e_{12}, e_{19}\} \subset E$$

2. 発生した Link failure の個数 $|F| = 4$

18a

ロバスト LNC の例 (4/) (Link Failuer 伝送行列 M_t^F の一意性)

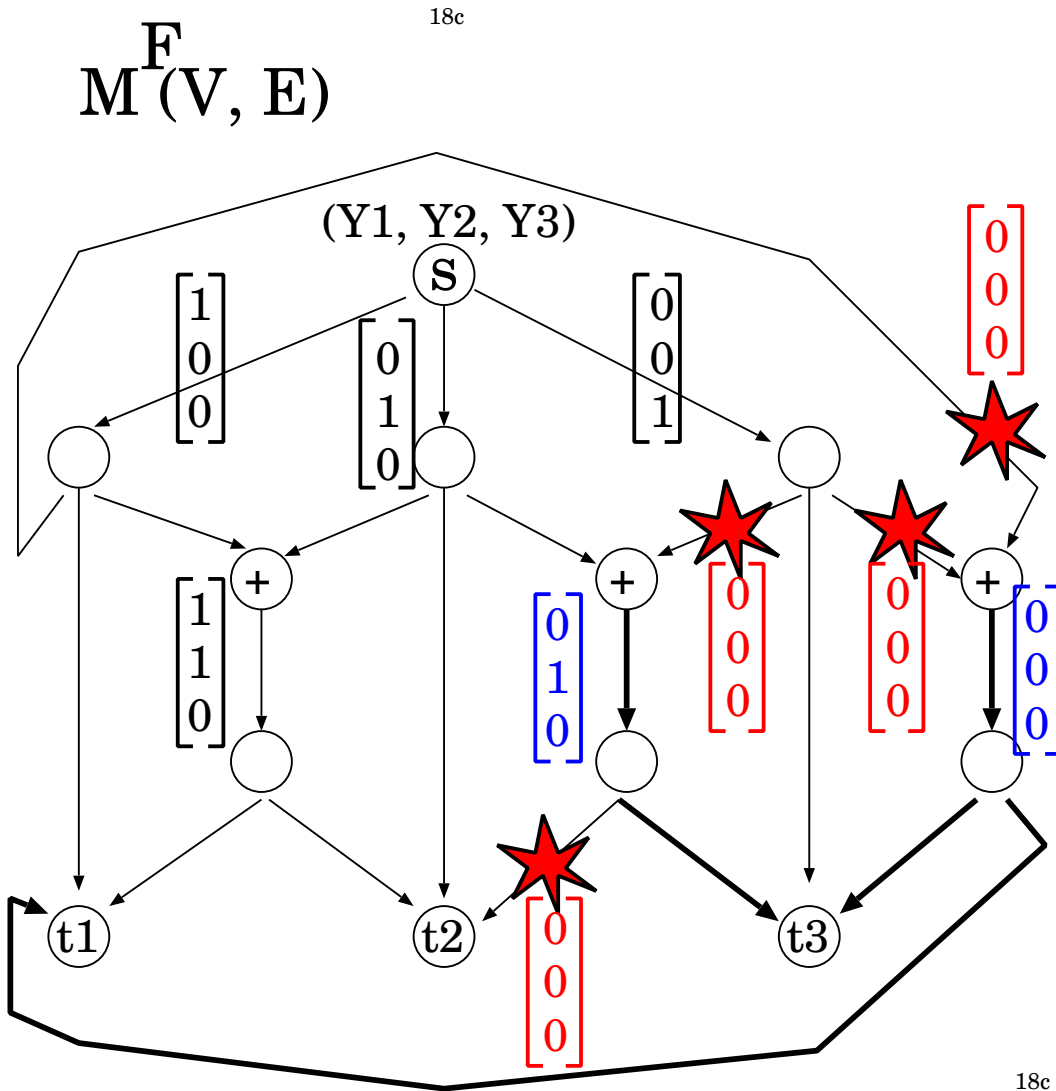
18b



18b

3. Link failure が発生したリンクの Global coding vector は、強制的に零ベクトルとなる。

ロバスト LNC の例 (5/) (Link Failuer 伝送行列 M_t^F の一意性)

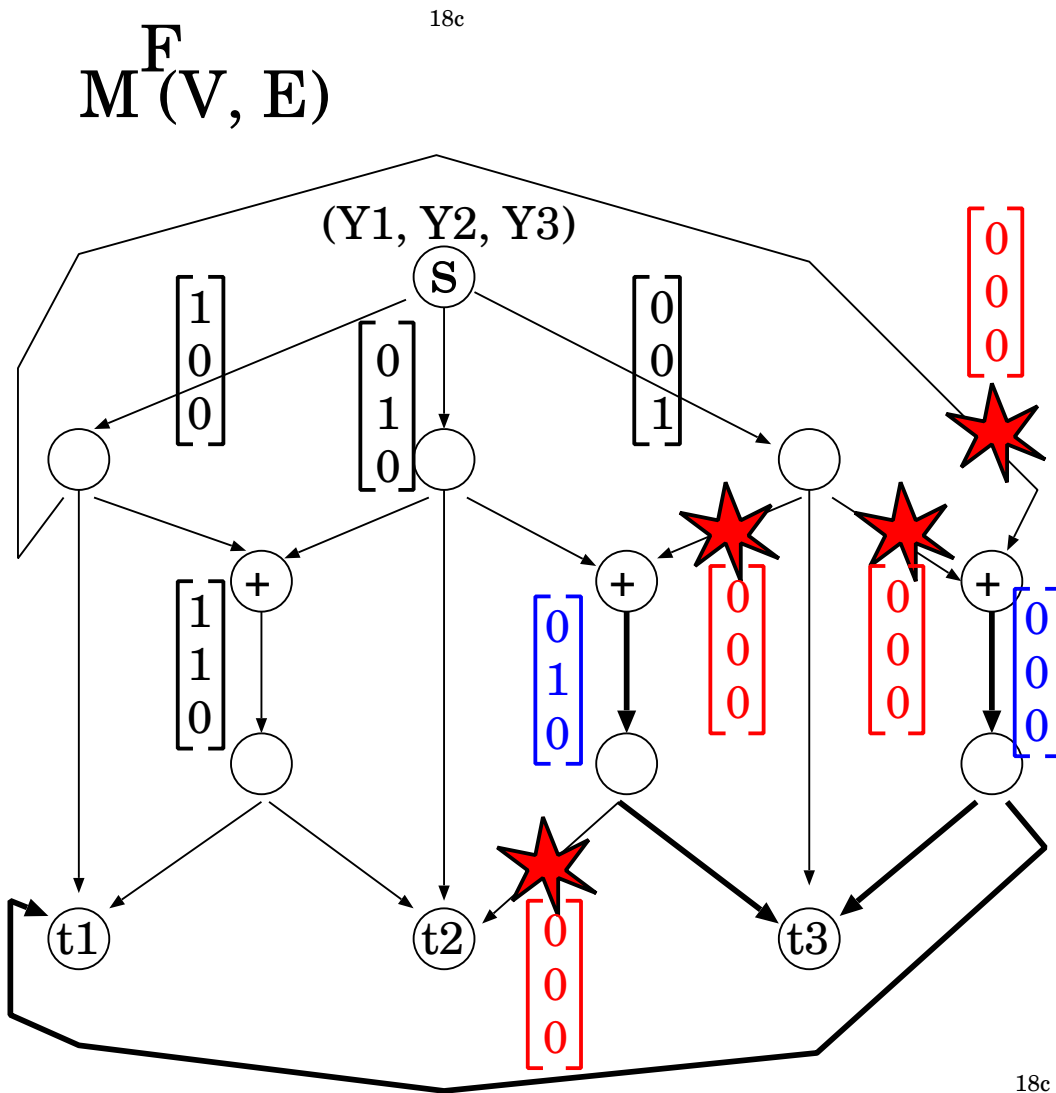


4. Link failure により, 強制的に**零ベクトル**となった Global coding vector を保持したまま, Topological order の順序で, 最大 LNC の Local coding vector に従って, 各リンク $e \in E$ の Global coding vector $y(e)$ を計算する. すなわち,

$$y(e) = \begin{cases} 0, & e \in F \\ \sum_{e_i \in \Gamma_I(\text{start}(e))} \alpha_i y(e_i), & e \notin F \end{cases}$$

5. $y(e)$ は, 一意に定まる.
6. その結果, **Link failuer pattern F** の影響を受けたネットワークの符号は, 一意に定まる. そのネットワークの符号を $M^F(V, E)$ と表す.

ロバスト LNC の例 (6/) (Link Failuer 伝送行列 M_t^F の一意性)



4. **Link failuer pattern F** により , ネットワークの符号 $M^F(V, E)$ が一意に定まるということは , 各リンク $t \in T$ に対応する **Link failuer 伝送行列 M_t^F** も以下のように一意に定まる .

$$M_1^F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} M_1^F = 2$$

$$M_2^F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} M_2^F = 2$$

$$M_3^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} M_3^F = 2$$

5. 伝送レート $k \leq 2$

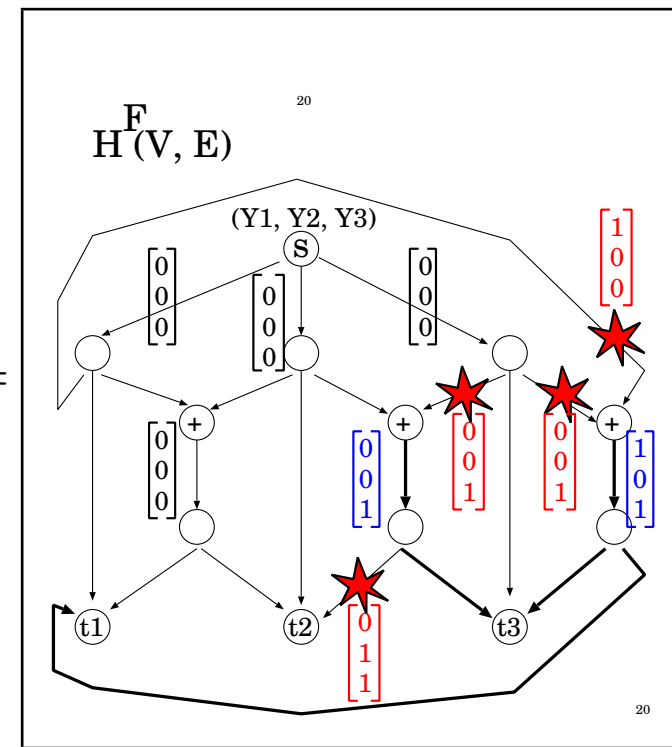
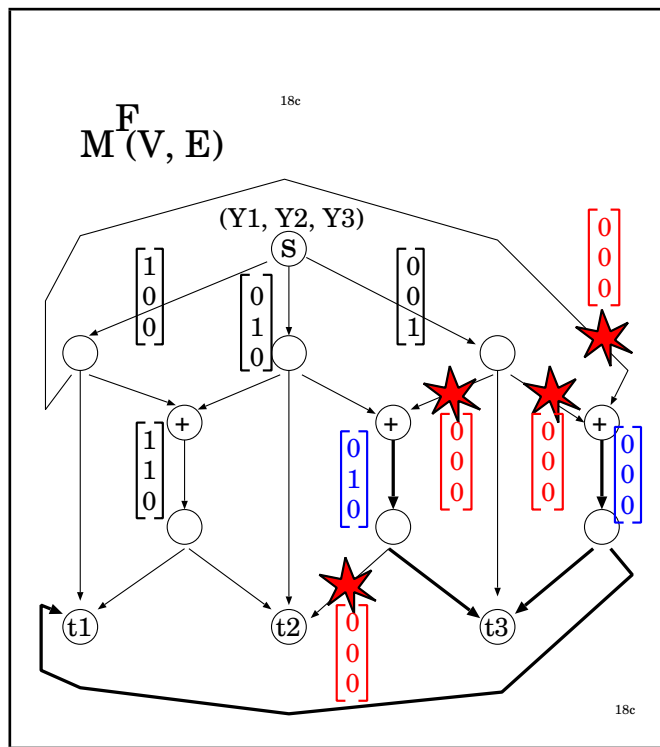
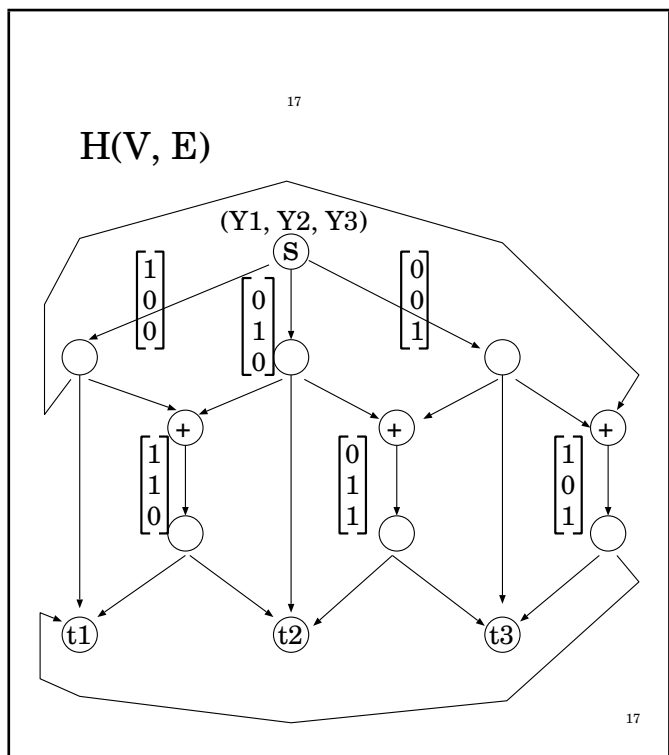
ロバスト LNC の例 (7/) ($H_t^F = H_t - M_t^F$)

一方, **Link failure pattern** F の **Link failuer** が発生する前のネットワーク符号 $H(V, E)$ と, 発生した後のネットワーク符号 $M^F(V, E)$ の各リンク毎の **Global coding vector** の差について考える.

この差によるネットワークの符号を $H^F(V, E)$ と表し,

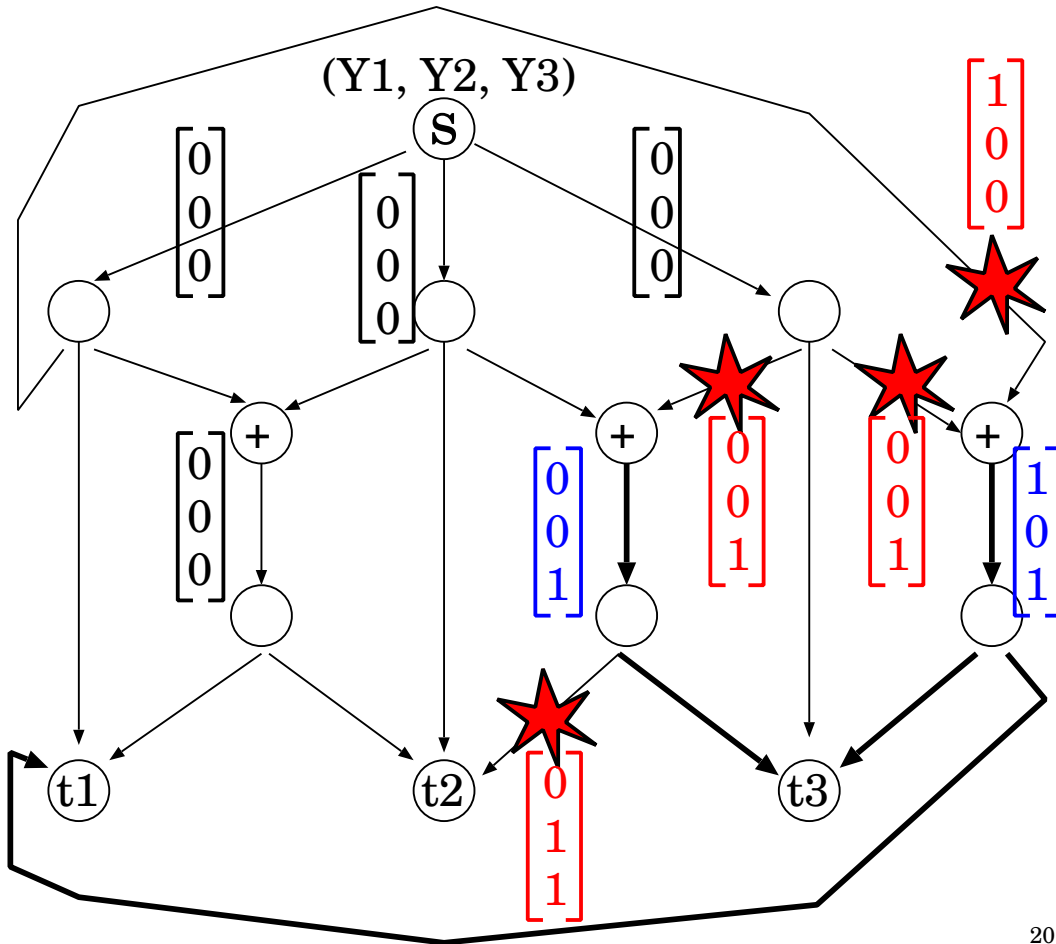
$$H(V, E) - M^F(V, E) = H^F(V, E)$$

と書く.



$H^F(V, E)$

20



20

1. 差によるネットワークの符号 $H^F(V, E) = H(V, E) - M^F(V, E)$ より, 各シンク $t \in T$ に対し, 次のような行列が定まる.

$$H_1^F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} H_1^F = 1$$

$$H_2^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank} H_2^F = 1$$

$$H_3^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank} H_3^F = 2$$

2. 一般に, $\text{rank} H_t^F \leq |F|$
3. $\text{Rank} H_t^F$ は, シンク t が **Link failuer pattern F** の **Link failuer** により, 本質的に影響を受けた受信データの個数そのものではなく, 影響を受ける可能性のある受信データの個数の最大値を表す.

ロバストLNCの例 (9/) ($H_t^F = H_t - M_t^F$)

1. ネットワークの符号の差:

$$H(V, E) - M^F(V, E) = H^F(V, E)$$

2. 伝送行列の差:

$$H_t - M_t^F = H_t^F$$

3. 送信データ $Y^{\bar{h}}$ と受信データ $Z_t^{h_t} = Y^{\bar{h}} M_t^F$ の関係:

$$H_t - H_t^F = M_t^F$$

$$Y^{\bar{h}}(H_t - H_t^F) = Y^{\bar{h}} M_t^F$$

$$Y^{\bar{h}} H_t - Y^{\bar{h}} H_t^F = Y^{\bar{h}} M_t^F = Z_t^{h_t}$$

↓

$$C_t - E_t^F = Z_t^{h_t}$$

4. これより, 行列 H_t^F は, **Link failuer F** がシンク t に 影響を与えるデータを伝送する伝送行列 ともいえる.

ロバスト LNC (まとめ)

1. ネットワーク (V, E) with (s, T) と Link failure pattern の集合 \mathcal{F} が与えられる .
2. ネットワーク (V, E) with (s, T) に対し , 最大 LNC を構成する .
すなわち , 伝送行列 $H_t, t \in T$ を構成する .

3. 各 $t \in T$ and $F \in \mathcal{F}$ に対し , Link failure 伝送行列 M_t^F を計算する .
4. 次の条件を満たす伝送レート k を設定する .

$$k \leq \text{rank } M_t^F \text{ for all } t \in T \text{ and } F \in \mathcal{F}$$

5. 次の条件を満たす $k \times \bar{h}$ 符号化行列 G を構成する .

$$\text{rank } GM_t^F = k \text{ for all } t \in T \text{ and } F \in \mathcal{F}$$

6. 最後に , 符号化 と 復元 の手続きは , 以下のロバスト LNC の情報伝送の図式となる .

For all $t \in T$ and $F \in \mathcal{F}$,

$$\begin{array}{ccccccc} & G & & M_t^F & & (GM_t^F)^{-1} & \\ \mathbf{F}^k & \longrightarrow & \mathbf{F}^{\bar{h}} & \longrightarrow & \mathbf{F}^{h_t} & \longrightarrow & \mathbf{F}^k \\ \mathbf{X}^k & \longmapsto & \mathbf{Y}^{\bar{h}} & \longmapsto & \mathbf{Z}_t^{h_t} & \longmapsto & \mathbf{X}^k \end{array}$$

7. ゆえに , 符号化行列 G を適切に設計することで , 最大 LNC から伝送レート k のロバスト LNC を構成することが可能である . (“適切に” とは , “rank $GM_t^F = k$ for all $t \in T$ and $F \in \mathcal{F}$ ” を満たすこと)

最大 LNC から $\left\{ \begin{array}{l} \text{マルチキャスト LNC(最小 LNC)} \\ \text{ブロードキャスト LNC} \\ \text{ロバスト LNC} \end{array} \right\}$ を構成可能である .

1. まえがき
2. (数学的) 準備
3. ネットワーク (V, E) with (s, T)
4. マルチキャスト線型ネットワーク符号
5. 最大線型ネットワーク符号
6. ブロードキャスト線型ネットワーク符号
7. ロバスト線型ネットワーク符号
8. 結論

結論 (1/2)

1. 与えられたネットワーク (V, E) with (s, T) に対し, 前処理として, **最大LNC** を構成した後, **符号化行列 G** を目的に合わせて設計することで,

最大LNC から $\left\{ \begin{array}{l} \text{マルチキャスト LNC} \\ \text{ブロードキャスト LNC} \\ \text{ロバスト LNC} \end{array} \right\}$ を構成する一方法を示した.

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{(符号化)} & & \text{(伝送)} & & \text{(復元)} & \\ & G & & H_t & & (GH_t)^{-1} & \\ \mathbf{F}^k & \longrightarrow & \mathbf{F}^{\bar{h}} & \longrightarrow & \mathbf{F}^{h_t} & \longrightarrow & \mathbf{F}^k \\ X^k & \longmapsto & Y^{\bar{h}} & \longmapsto & Z_t^{h_t} & \longmapsto & X^k \end{array}$$

2. 提案した構成法では, 前処理として最大LNCを設計すれば, ネットワーク中の**中継ノードでの符号化手続きを変更することなく**, マルチキャスト, ブロードキャスト, ロバーストのそれぞれの線型ネットワーク符号を構成することが可能であるということを示している.

結論 (2/2)

1. 「伝送レート h でマルチキャスト通信が可能」
 - \iff 「伝送レート h を達成するマルチキャスト LNC が存在する」
 - \iff 「最大 LNC と $h \times \bar{h}$ 符号化行列 G が存在する」
2. 「ブロードキャスト通信が可能」
 - \iff 「ブロードキャスト LNC が存在する」
 - \iff 「最大 LNC と $h_t \times \bar{h}$ 符号化行列 $G_t, t \in T$ が存在する」
3. 「伝送レート k でロバストな通信が可能」
 - \iff 「伝送レート k を達成するロバスト LNC が存在する」
 - \iff 「最大 LNC と $k \times \bar{h}$ 符号化行列 G が存在する」

<http://www.coding.ice.uec.ac.jp>