ネットワーク符号化とある種の線型変換

— ロバストでセキュアなネットワーク符号化 —

栗原正純 (電気通信大学)

1. **概要 (線型変換，ロバスト，セキュア,「ロバストでセキュアな」)**

2. **線型変換 (行列)**
   - **2-1. ロバスト変換行列**
   - **2-2. セキュア変換行列**
   - **2-3. ロバストでセキュアな変換行列** $\Leftarrow *$

3. **ロバストでセキュアなネットワーク符号化** $\Leftarrow **$

4. **結論**

2006/07/28(東大柏キャンパス)

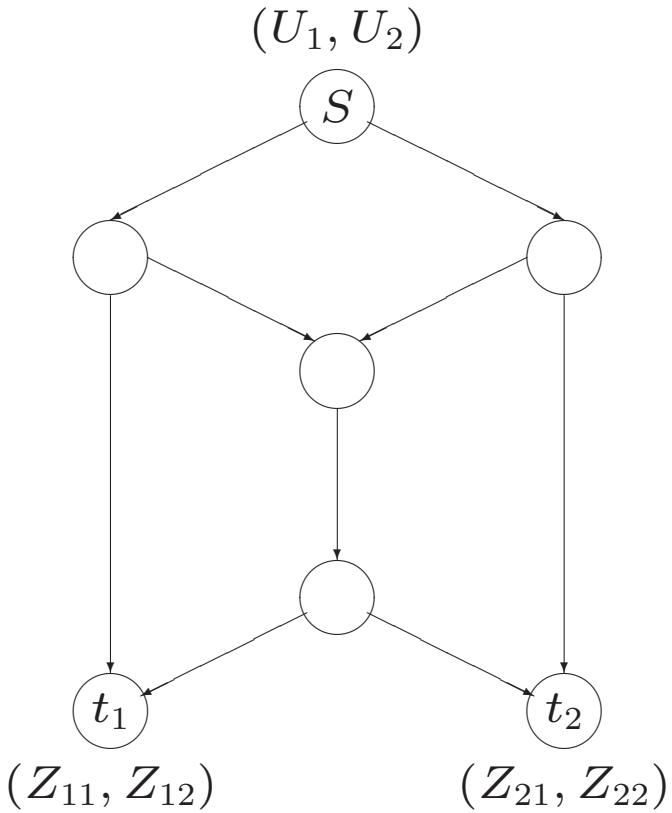
(2006/7/27/21:03 作成日)

概要 (関連研究)

- **ロバスト** で **セキュア** な **ネットワーク符号化** (⇐ **線型変換**)
- **セキュア** な **ネットワーク符号化**
  - N. Cai and R. W. Yeung, "Secure network coding", 2002
  - J. Feldman, *et. al.*,"On the capacity of secure network coding", 2004 (⇐ **線型変換**)
  - K. Bhattad, K. R. Narayanan, "Weakly secure network coding", 2005 (⇐ **線型変換**)
  - 原田邦彦，山本博資, "強いランプ型しきい値特性を持つ安全な ネットワーク符号化法", 2005

  ⋆山本博資, "(k, L, n) しきい値秘密分散システム", 1985
- **ロバスト** な **ネットワーク符号化**
  - Batchuluun Demchig, "マルチキャストネットワークのリンク切断を 考慮したロバストネットワーク符号", 2006 (⇐ **線型変換**)

概要 (ネットワーク符号化)



- (U_1, U_2) : **送信シンボル ; ソースノード** S
- $(Z_{j,1}, Z_{j,2})$: **受信シンボル ;**
  シンクノード t_j, $j = 1, 2$
- **符号化 :**

$$t_1 \quad : \quad (U_1, U_2)M_1 = (Z_{11}, Z_{12})$$
$$t_2 \quad : \quad (U_1, U_2)M_2 = (Z_{21}, Z_{22})$$

M_1, M_2 **: 正則行列** $\Leftarrow$ **伝送行列**

- **復号化 :**

$$t_1 \quad : \quad (Z_{11}, Z_{12})M_1^{-1} = (U_1, U_2)$$
$$t_2 \quad : \quad (Z_{21}, Z_{22})M_2^{-1} = (U_1, U_2)$$

- U_1, U_2 : **送信シンボル**
- $X_1, X_2 \in \mathbf{F}_q$: **情報シンボル**
- $(U_1, U_2) \Leftarrow (X_1, X_2)$: **代入**

$$\begin{aligned}\underline{(U_1, U_2)} &= (X_1, X_2) \\ &= \underline{(X_1, X_2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}\end{aligned}$$

- **符号化・復号化 (シンク t_1)**

$$\begin{aligned}\underline{(X_1, X_2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} M_1 &= \underline{(U_1, U_2)} M_1 \\ &= (Z_{11}, Z_{12})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\underline{(Z_{11}, Z_{12})} M_1^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \underline{(U_1, U_2) M_1} M_1^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= (X_1, X_2)\end{aligned}$$

行列 F で表現

- $F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.

$\Downarrow$

- F : 2×2 **正則行列** i.e., $^{\exists} F^{-1}$

- $(U_1, U_2) \Leftarrow (X_1, X_2)$: **代入**

$$(U_1, U_2) = (X_1, X_2) F^{-1}$$

- **符号化・復号化 (シンク t_1)**

$$\begin{aligned}\underline{(X_1, X_2) F^{-1}} M_1 &= \underline{(U_1, U_2)} M_1 \\ &= (Z_{11}, Z_{12})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\underline{(Z_{11}, Z_{12})} M_1^{-1} F \\ &= \underline{(X_1, X_2) F^{-1} M_1} M_1^{-1} F \\ &= (X_1, X_2)\end{aligned}$$

概要 (線型変換 F)

- **ネットワーク符号化が与えられている**

  $\Longrightarrow$ **ソースから各シンク** t_j **への** **伝送行列** M_j **が与えられている**

$$(Z_{j,1}, \ldots, Z_{j,h}) = (U_1, \ldots, U_h) M_j$$

- $F : h \times h$ **正則行列とする**

- $(U_1, \ldots, U_h) \Leftarrow (X_1, \ldots, X_h) \in \mathbf{F}_q^h$: **送信シンボル に 情報シンボル を 代入**

$$(U_1, \ldots, U_h) \quad = \quad (X_1, \ldots, X_h) F^{-1}$$

- **符号化** :

$$\begin{aligned} (X_1, \ldots, X_h) F^{-1} M_1 &= (U_1, \ldots, U_h) M_j \\ &= (Z_{j,1}, \ldots, Z_{j,h}) \end{aligned}$$

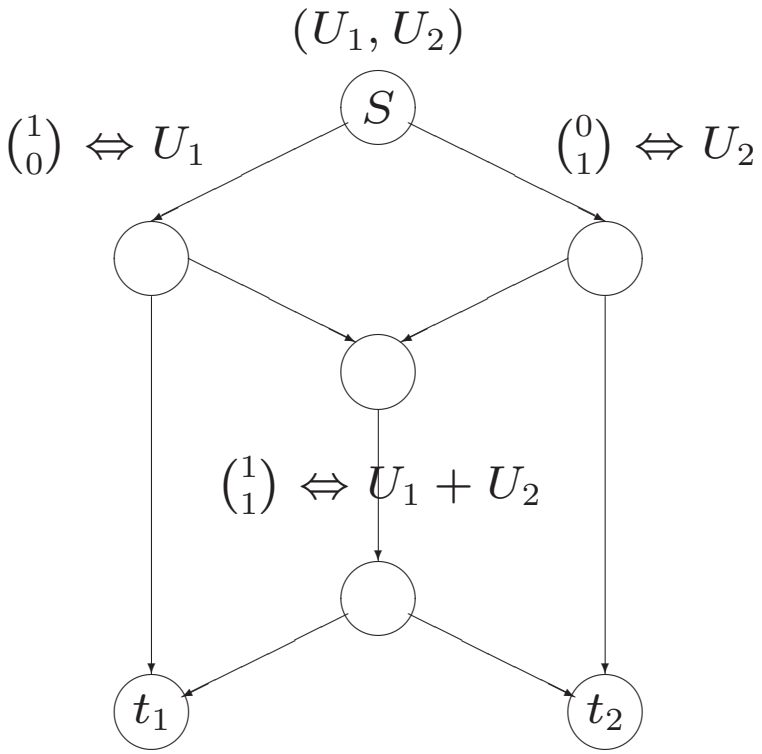
- **復号化** :

$$\begin{aligned} \underline{(Z_{j,1}, \ldots, Z_{j,h})} M_j^{-1} F &= \underline{(X_1, \ldots, X_h) F^{-1} M_1} M_j^{-1} F \\ &= (X_1, \ldots, X_h) \end{aligned}$$

ただし，シンク t_j **は、** M_j **と** F **を既知とする**

$\Longrightarrow$ **この正則行列，すなわち，** **線型変換 (行列)** F **に着目する**

概要 ((与えられた) ネットワーク符号化)



$Z_{11} = U_1$ $\quad$ $Z_{21} = U_1 + U_2$

$Z_{12} = U_1 + U_2$ $\quad$ $Z_{22} = U_2$

- **リンクベクトルとその符号シンボル：**

$$(U_1, U_2)\binom{1}{0} = U_1$$

$$(U_1, U_2)\binom{0}{1} = U_2$$

$$(U_1, U_2)\binom{1}{1} = U_1 + U_2$$

- **シンク** 1 **：** t_1

$$(Z_{11}, Z_{12}) = (U_1, U_2)M_1$$

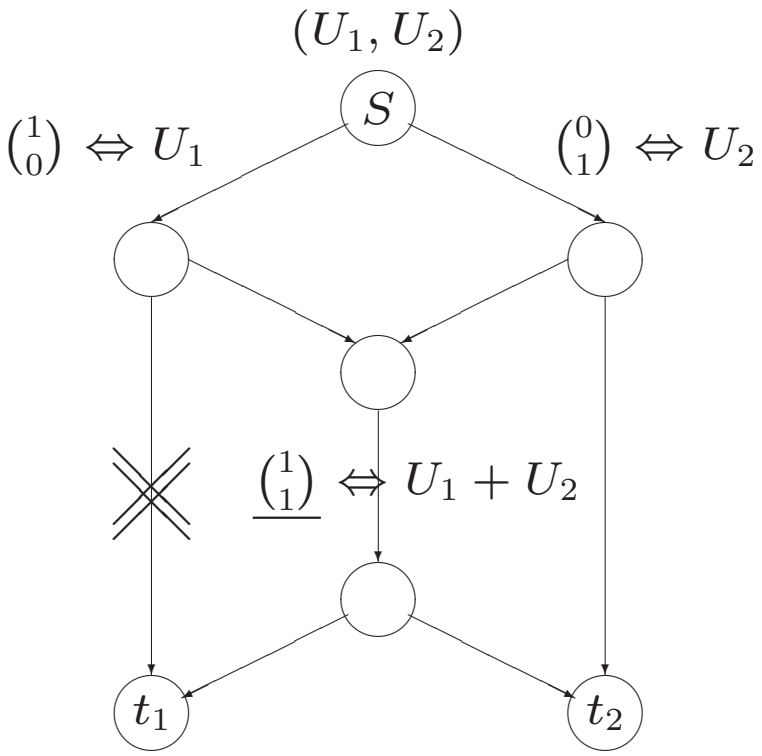
$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **シンク** 2 **：** t_2

$$(Z_{21}, Z_{22}) = (U_1, U_2)M_2$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

概要 (ロバストな場合 (リンク障害))



$\underline{Z_{11} = \emptyset}$ $\quad Z_{21} = U_1 + U_2$

$Z_{12} = U_1 + U_2 \quad Z_{22} = U_2$

- U_1, U_2 : **送信シンボル**
- $X_1, X_2 \in \mathbf{F}_q$: **情報シンボル**
- **ロバスト変換行列** F over $\mathbf{F}_2$ **:**

$$F = [\, \underline{\boldsymbol{f}_1}\ \boldsymbol{f}_2\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \underline{1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $(U_1, U_2) \Leftarrow (X_1, X_2)$: **代入**

$$\begin{aligned} (U_1, U_2) &= (X_1, X_2)F^{-1} \\ &= (X_2, X_1 + X_2) \end{aligned}$$

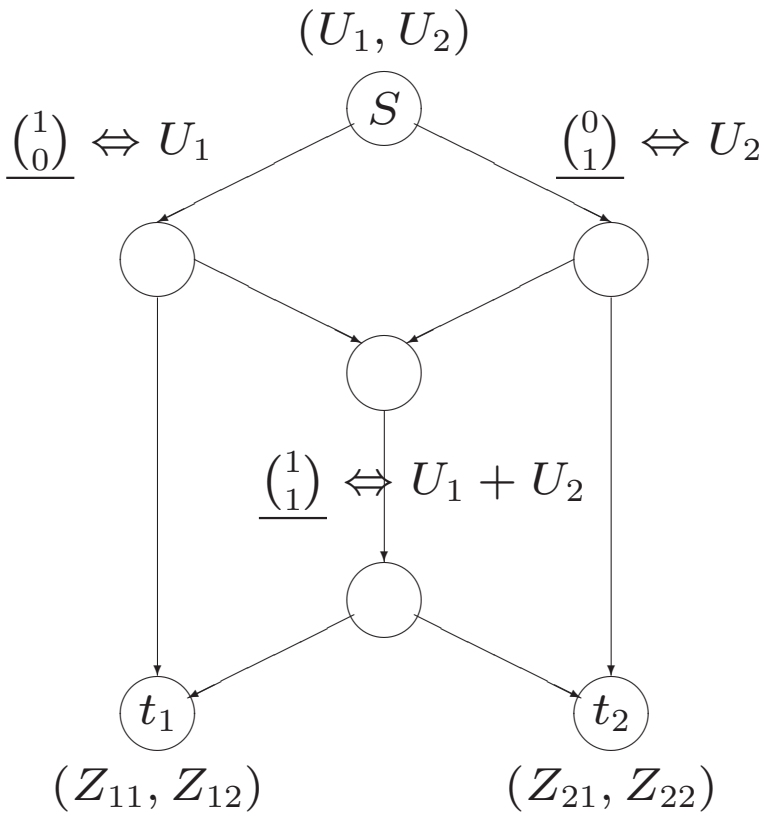
- **シンク** 1 **:** t_1

$$Z_{12} = (X_1, X_2)F^{-1}\binom{1}{0} = X_1$$

- **シンク** 2 **:** t_2

$$\begin{aligned} (Z_{21}, Z_{22}) &= (X_1, X_2)F^{-1}M_2 \\ &= (X_1, X_1 + X_2) \end{aligned}$$

概要 (セキュアな場合： しきい値 $= 1$)



- (U_1, U_2)：**送信シンボル**
- $(X_1, Y_1) \in \mathbf{F}_q^2$：**情報シンボルと乱数**
  X_1：**情報シンボル (等確率に生起)**
  Y_1：**一様乱数**
- **セキュア変換行列** F over $\mathbf{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ **:**

$$F = [\, \underline{\boldsymbol{f}_1}\ \boldsymbol{f}_2\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \underline{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

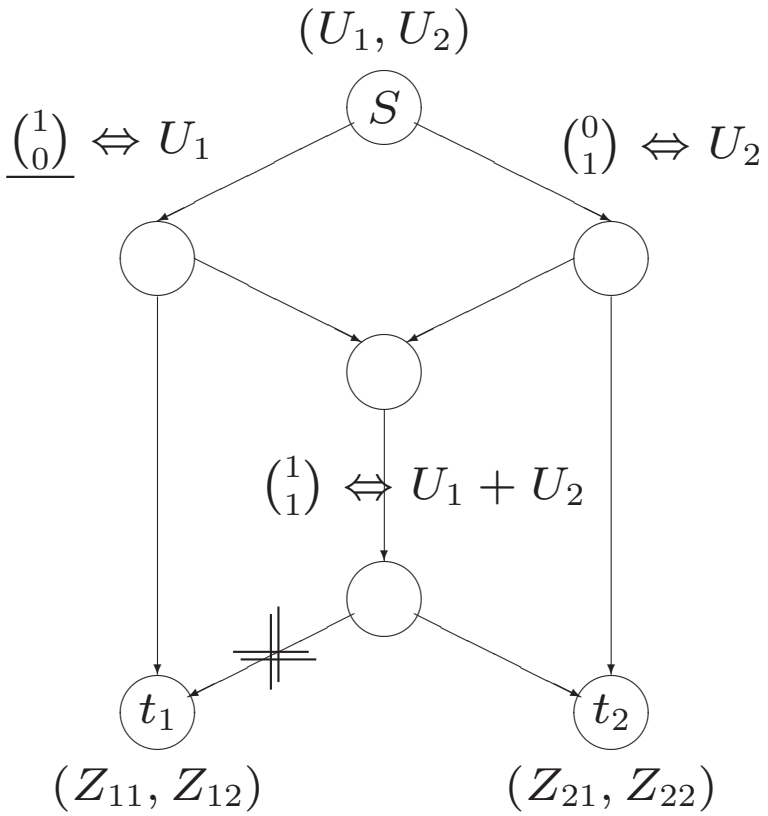
- $(U_1, U_2) \Leftarrow (X_1, Y_1) \in \mathbf{F}_3^2$：**代入**
  $(U_1, U_2) = (X_1, Y_1)F^{-1} = (Y_1, 2X_1 + Y_1)$
- **各リンクの符号シンボル**

$$(U_1, U_2)\binom{1}{0} = Y_1$$

$$(U_1, U_2)\binom{0}{1} = 2X_1 + Y_1$$

$$(U_1, U_2)\binom{1}{1} = 2X_1 + 2Y_1$$

概要 (ロバストでセキュアな場合： しきい値 $= 1$)



- **ロバストでセキュアな変換行列** F over $\mathbf{F}_2 = \{0, 1\}$:

$$F = [\, \underline{\boldsymbol{f}_1}\ \boldsymbol{f}_2\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \underline{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $(U_1, U_2) \Leftarrow (X_1, Y_1) \in \mathbf{F}_2^2$: **代入**

$$(U_1, U_2) = (X_1, Y_1)F^{-1} = (X_1, X_1 + Y_1)$$

- **各リンクの符号シンボル**

$$(U_1, U_2)\binom{1}{0} = X_1$$

$$(U_1, U_2)\binom{0}{1} = X_1 + Y_1$$

$$(U_1, U_2)\binom{1}{1} = Y_1$$

概要 (「ロバストでセキュアな」について)

- (E, V)：マルチキャストネットワーク (E：リンク集合, V: ノード集合)
- h：ネットワーク符号化容量
- $(X_1, \ldots, X_{h-r}, Y_1, \ldots, Y_r)$：情報シンボルと乱数

  しきい値 $= r$

  - $X_1, \ldots, X_{h-r}$：$h - r$ 個の情報シンボル (等確率に生起)
  - $Y_1, \ldots, Y_r$　　：r 個の一様乱数
- セキュアな場合：

$$(X_1, \ldots, X_{h-r})$$

- ロバストでセキュアな場合：
  - $X_{s_1}, \ldots, X_{s_f} \in \{X_1, \ldots, X_{h-r}\}$：

    ロバストで要求される f 個の情報シンボル $\Longrightarrow$ 一意に復号可能
  - $X_{i_1}, \ldots, X_{i_{h-r-f}} \in (\{X_1, \ldots, X_{h-r}\} \setminus \{X_{s_1}, \ldots, X_{s_f}\})$：

    残りの $h - r - f$ 個の情報シンボル

$$(\underbrace{X_{s_1}, \ldots, X_{s_f}}_{\text{ロバスト}}, \underbrace{X_{i_1}, \ldots, X_{i_{h-r-f}}}_{\text{セキュア}})$$

線型変換 F (符号化・復号化 (与えられた符号化))

- $(X_1, \ldots, X_h) \in \mathbf{F}_q^h$: 長さ h の情報シンボル列
- $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n \in \mathbf{F}_q^h$: n 個の符号化用列ベクトル

  性質) $\overset{\forall}{\boldsymbol{g}}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{j_h} \in \{\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n\} \implies \mathrm{rank}[\boldsymbol{g}_{j_1} \cdots \boldsymbol{g}_{j_h}] = h$

- 符号化 : $(X_1, \ldots, X_h) \mapsto V_j$
  (符号シンボル)

$$V_j = (X_1, \ldots, X_h)\boldsymbol{g}_j \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, n$$

- 復号化 : $(V_{j_1}, \ldots, V_{j_h}) \mapsto (X_1, \ldots, X_h)$

$$\overset{\forall}{V}_{j_1}, \ldots, V_{j_h} \in \{V_1, \ldots, V_n\}$$
$$(X_1, \ldots, X_h) = (V_{j_1}, \ldots, V_{j_h})[\boldsymbol{g}_{j_1} \cdots \boldsymbol{g}_{j_h}]^{-1}$$

ただし, $\{\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n\}$ を既知とする

線型変換 (ロバスト変換 F) $1/2$

- **ロバストからの要求：** $\{W_1, \ldots, W_n\}$ **符号シンボル**

  ∘ $T = \{t_1, \ldots, t_g\} \subset \{1, \ldots, n\}$: **符号シンボル用添字集合** $(g < h)$
  $\Longrightarrow (W_{t_1}, \ldots, W_{t_g})$

  ∘ $S = \{s_1, \ldots, s_f\} \subset \{1, \ldots, h\}$: **情報シンボル用添字集合** $(f \leq g)$
  $\Longrightarrow (X_{s_1}, \ldots, X_{s_f})$

- **性質：**

  P1) $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_g}) \quad \mapsto \quad (X_{s_1}, \ldots, X_{s_f})$ **ロバスト**

  P2) $^{\forall} W_{j_1}, \ldots, W_{j_h} \in \{W_1, \ldots, W_n\}$ **任意の** h **個の符号シンボル**
  $(W_{j_1}, \ldots, W_{j_h}) \mapsto (X_1, \ldots, X_h)$

- **条件：** $h \times h$ **変換行列** $F = [\boldsymbol{f}_1 \cdots \boldsymbol{f}_h]$ **は次の条件を満たす**

  C1) rank $F = h$
  C2) **次のような** $g \times f$ **行列** D **が存在する：**

$$\left[\boldsymbol{g}_{t_1} \cdots \boldsymbol{g}_{t_g}\right] D = \left[\boldsymbol{f}_{s_1} \cdots \boldsymbol{f}_{s_f}\right]$$

線型変換 (ロバスト変換 F) $2/2$

- **符号化** :

$$W_j = (X_1, \ldots, X_h)F^{-1}\boldsymbol{g}_j \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, n$$

- **復号化** : ($\{\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n\}$, F, D **を既知とする**)

1) $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_g})$ **の場合** (P1) :

ロバスト (特定の g 個)

$$\begin{aligned}(W_{t_1}, \ldots, W_{t_g})D &= (X_1, \ldots, X_h)F^{-1}[\boldsymbol{g}_{t_1} \cdots \boldsymbol{g}_{t_g}]D \\ &= (X_1, \ldots, X_h)F^{-1}[\boldsymbol{f}_{s_1} \cdots \boldsymbol{f}_{s_f}] \\ &= (X_{s_1}, \ldots, X_{s_f})\end{aligned}$$

2) $^{\forall}W_{j_1}, \ldots, W_{j_h} \in \{W_1, \ldots, W_n\}$ **の場合** (P2) :

任意の h 個

$$\begin{aligned}&\underline{(W_{j_1}, \ldots, W_{j_h})}[\boldsymbol{g}_{j_1} \cdots \boldsymbol{g}_{j_h}]^{-1}F \\ &= (X_1, \ldots, X_h)F^{-1}\underline{[\boldsymbol{g}_{j_1} \cdots \boldsymbol{g}_{j_h}]}[\boldsymbol{g}_{j_1} \cdots \boldsymbol{g}_{j_h}]^{-1}F \\ &= (X_1, \ldots, X_h)\end{aligned}$$

線型変換 (セキュア変換 F) $1/2$

- $(X_1, \ldots, X_{h-r}, Y_1, \ldots, Y_r) \in \mathbf{F}_q^h$: **情報シンボルと乱数 (しきい値** $= r$**)**
  - $X_1, \ldots, X_{h-r}$ **: 情報シンボル (等確率で生起)**
  - $Y_1, \ldots, Y_r$ **: 一様乱数**

- **性質** [山本, 1985] **:** (P3-3)

$^{\forall}X_{i_1}, \ldots, X_{i_m} \in \{X_1, \ldots, X_{h-r}\}$ **: 情報シンボル**
$^{\forall}W_{j_1}, \ldots, W_{j_k} \in \{W_1, \ldots, W_n\}$ **: 符号シンボル**

$$\Longrightarrow \boxed{H(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m} \mid W_{j_1}, \ldots, W_{j_k}) = H(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})}$$

ただし, $m + k \leq h,\ k < h,\ m \leq h - r$

- **条件** [山本, 1985] **:** $h \times h$ **変換行列** $F = [\boldsymbol{f}_1 \cdots \boldsymbol{f}_h]$ **は次の条件を満たす**

C1) rank $F = h$
C5) $^{\forall}\boldsymbol{g}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{j_k} \in \{\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n\}$ **に対し, 以下が成立する :**

$$^{\forall}\boldsymbol{f}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{f}_{i_m} \in \{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_{h-r}\}$$
$$\Longrightarrow \mathrm{rank}[\boldsymbol{f}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{f}_{i_m}\boldsymbol{g}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{j_k}] = m + k$$

ただし, $m + k \leq h,\ k < h,\ m \leq h - r$

線型変換 (セキュア変換 F) $2/2$

- **符号化** :

$$W_j = (X_1, \ldots, X_h)F^{-1}\boldsymbol{g}_j \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, n$$

- **復号化** : ($\{\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n\}$, F **を既知とする**)

$$^{\forall}W_{j_1}, \ldots, W_{j_h} \in \{W_1, \ldots, W_n\} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&(W_{j_1}, \ldots, W_{j_h})[\boldsymbol{g}_{j_1} \cdots \boldsymbol{g}_{j_h}]^{-1}F \\
&\quad = \quad (X_1, \ldots, X_h)F^{-1}[\boldsymbol{g}_{j_1} \cdots \boldsymbol{g}_{j_h}][\boldsymbol{g}_{j_1} \cdots \boldsymbol{g}_{j_h}]^{-1}F \\
&\quad = \quad (X_1, \ldots, X_h)
\end{aligned}$$

線型変換 (ロバストでセキュアな変換 F : 準備 (線型部分空間)) $1/4$

- $G_0 = \{\boldsymbol{g}_j | j \in T\} = \{\boldsymbol{g}_{0,1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{0,g}\} \subset \{\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n\}$, $|G_0| = g$:
  ロバストに対応した列ベクトル : $\{W_j | j \in T\}$
- ${}^{\forall}G_j = \{\boldsymbol{g}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{j,k_j}\} \subset \{\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n\}$, $|G_j| = k_j < h$
- ベクトル $\boldsymbol{g}_{j,p}$ に対応する符号シンボルの表現 : $W_{j,p} \Leftrightarrow \boldsymbol{g}_{j,p}$ for $p = 1, \ldots, k_j$
- $\langle G_j \rangle$: G_j から生成される部分空間

  $\langle G_j \rangle = \langle \boldsymbol{g}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{j,k_j} \rangle := \{\alpha_1 \boldsymbol{g}_{j,1} + \cdots + \alpha_{k_j} \boldsymbol{g}_{j,k_j} | \alpha_1, \ldots, \alpha_{k_j} \in \mathbf{F}_q\}$
- v_j =dim$\langle G_0 \rangle \cap \langle G_j \rangle$: $\langle G_0 \rangle$ と $\langle G_j \rangle$ の共通部分空間の次元
- $\boldsymbol{v}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j,v_j}$: 共通部分空間 $\langle G_0 \rangle \cap \langle G_j \rangle$ の基底 (次元 v_j)
- $\boldsymbol{u}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{j,g-v_j}, \boldsymbol{v}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j,v_j}$: 部分空間 $\langle G_0 \rangle$ の基底 (次元 g)
- $\boldsymbol{v}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j,v_j}, \boldsymbol{w}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{j,k_j-v_j}$: 部分空間 $\langle G_j \rangle$ の基底 (次元 k_j)
- $\boldsymbol{u}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{j,g-v_j}, \boldsymbol{v}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j,v_j}, \boldsymbol{w}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{j,k_j-v_j}$: 和空間 $\langle G_0 \rangle + \langle G_j \rangle$ の基底
  (次元 $g + k_j - v_j$)

線型変換 (ロバストでセキュアな変換 F : 性質) $2/4$

- **性質：**

P1) $(W_{0,1}, \ldots, W_{0,g}) \quad \mapsto \quad (X_{s_1}, \ldots, X_{s_f})$ **ロバスト (特定の g 個の符号シンボル)**

P2) $^{\forall} W_{j_1}, \ldots, W_{j_h} \in \{W_1, \ldots, W_n\}$ **任意の h 個の符号シンボル**

$$(W_{j_1}, \ldots, W_{j_h}) \mapsto (X_1, \ldots, X_h)$$

P4) $^{\forall} X_{i_1}, \ldots, X_{i_m} \in \{X_1, \ldots, X_{h-r}\}$ **: 情報シンボル** **セキュア**

$^{\forall} W_{j,1}, \ldots, W_{j,k_j} \in \{W_1, \ldots, W_n\}$ **: 符号シンボル**

$$\Longrightarrow \quad H(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m} \mid W_{j,1}, \ldots, W_{j,k_j})$$

$$= \begin{cases} \dfrac{m-(u+v_j-g)}{m} H(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}) & (u+v_j \geq g) \\ H(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}) & (u+v_j \leq g) \end{cases}$$

ただし， $u = |\{X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}\} \cap \{X_i | i \in S\}|$, $m + k_j \leq h$, $k_j < h$, $m \leq h - r$

- **分子：** $\boxed{m-(u+v_j-g)} = m - u + (g - v_j) \geq \boxed{m-u}$ if $\quad u + v_j \geq g$

線型変換 (ロバストでセキュアな変換 F : 条件) $3/4$

- **条件：** $h \times h$ **変換行列** $F = [\boldsymbol{f}_1 \cdots \boldsymbol{f}_h]$ **は次の条件を満たす**

C1) $\quad \mathrm{rank}\ F = h$

C2) **次のような** $g \times f$ **行列** D **が存在する：** $\boxed{\langle G_0 \rangle}$

$$\left[\boldsymbol{g}_{0,1} \cdots \boldsymbol{g}_{0,g}\right] D = \left[\boldsymbol{f}_{s_1} \cdots \boldsymbol{f}_{s_f}\right]$$

C6) $\quad {}^{\forall} G_j = \{\boldsymbol{g}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{j,k_j}\} \subset \{\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n\}$**,** $|G_j| = k_j < h$**, に対し，以下が成り立つ:** $\boxed{\langle G_0 \rangle \cap \langle G_j \rangle}$

$$^{\forall}\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_\ell \in \{\boldsymbol{f}_i \mid i \in S\}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{rank}\left[\boldsymbol{c}_1 \cdots \boldsymbol{c}_\ell \boldsymbol{v}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j,v_j}\right] = \ell + v_j$$

ただし， $\ell \leq g - v_j$

C7) $\quad {}^{\forall} G_j = \{\boldsymbol{g}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{j,k_j}\} \subset \{\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n\}$**,** $|G_j| = k_j < h$**, に対し，以下が成り立つ:** $\boxed{\langle G_0 \rangle + \langle G_j \rangle}$

$$^{\forall}\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_\ell \in \{\boldsymbol{f}_i \mid i \in \{1, \ldots, h-r\} \setminus S\}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{rank}\Big[\boldsymbol{c}_1 \cdots \boldsymbol{c}_\ell \boldsymbol{u}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{j,g-v_j} \boldsymbol{v}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j,v_j}$$

$$\boldsymbol{w}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{j,k_j-v_j}\Big] = \ell + g + k_j - v_j$$

ただし， $\ell \leq h - (\ell + g + k_j - v_j)$

線型変換 (ロバストでセキュアな変換 F) $4/4$

- **情報シンボル** $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})$ **と符号シンボル** $(W_{j,1}, \ldots, W_{j,k_j})$ **の関係：**

$$(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m} | W_{j,1}, \ldots, W_{j,k_j})$$

$$\Updownarrow$$

$$(\boldsymbol{f}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{f}_{i_m} | \boldsymbol{g}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{j,k_j})$$

$$\Updownarrow$$

$$(\underbrace{\boldsymbol{f}_{i'_1}, \ldots, \boldsymbol{f}_{i'_{m-u}}}, \underbrace{\overbrace{\boldsymbol{f}_{s'_1}, \ldots, \boldsymbol{f}_{s'_u}}^{u}}_{\{\boldsymbol{f}_i | i \in S\}} | \underbrace{\overbrace{\boldsymbol{g}_{j,t_1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{j,t_{v_j}}}^{v_j}}_{\langle G_0 \rangle \cap \langle G_j \rangle}, \underbrace{\boldsymbol{g}_{j,p_1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{j,p_{k_j - v_j}}}_{\langle G_0 \rangle + \langle G_j \rangle})$$

$$\Updownarrow$$

$$(\underbrace{X_{i'_1}, \ldots, X_{i'_{m-u}}}, \underbrace{\underbrace{X_{s'_1}, \ldots, X_{s'_u}}_{\langle G_0 \rangle,\ \dim\langle G_0 \rangle = g} | \underbrace{W_{j,t_1}, \ldots, W_{j,t_{v_j}}}_{\langle G_0 \rangle + \langle G_j \rangle}}, \underbrace{W_{j,p_1}, \ldots, W_{j,p_{k_j - v_j}}})$$

「線型変換 (ロバストでセキュアな変換 F) $4/4$」の言い換え

1. $X_{i_1}, \ldots, X_{i_m} \in \{X_1, \ldots, X_{h-r}\}$: **情報シンボル**
$W_{j,1}, \ldots, W_{j,k_j} \in \{W_1, \ldots, W_n\}$: **符号シンボル**

$$\Longrightarrow H(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m} \mid W_{j,1}, \ldots, W_{j,k_j}) = \textbf{?}$$

2. $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})$:

$$X_{i_p} \begin{cases} \in \{X_i \mid\in S\} \Longrightarrow \underline{X_{i_p}} \\ \\ \notin \{X_i \mid\in S\} \Longrightarrow X_{i_p} \end{cases}$$

3. $(W_{j,1}, \ldots, W_{j,k_j}) \rightleftharpoons (\boldsymbol{g}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{j,k_j}) \rightleftharpoons \langle G_j \rangle$:

$$W_{j,p} \rightleftharpoons \boldsymbol{g}_{j,p} \begin{cases} \in \langle G_0 \rangle \cap \langle G_j \rangle \Longrightarrow \underline{W_{j,p}} \\ \\ \notin \langle G_0 \rangle \cap \langle G_j \rangle \Longrightarrow W_{j,p} \end{cases}$$

4.

$$H(X_{i'_1}, \ldots, X_{i'_{m-u}}, \underbrace{\overbrace{\underline{X_{s'_1}, \ldots, X_{s'_u}}}^{u} \mid \overbrace{\underline{W_{j,t'_1}, \ldots, W_{j,t'_{v_j}}}}^{v_j}}_{u + v_j \leq \text{ (or } \geq) \ g}, W_{j,p_1}, \ldots, W_{j,p_{k_j - v_j}})$$

$$= \begin{cases} \dfrac{m - (u + v_j - g)}{m} H(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}) & (u + v_j \geq g) \\ \\ H(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}) & (u + v_j \leq g) \end{cases}$$

ロバストでセキュアなネットワーク符号化 $1/3$

- (E, V)：マルチキャストネットワーク (E：リンク集合, V: ノード集合)
- h：ネットワーク符号化容量
- $(X_1, \ldots, X_{h-r}, Y_1, \ldots, Y_r)$：情報シンボル (等確率に生起) と乱数 (一様乱数)
  - $X_1, \ldots, X_{h-r}$：$h-r$ 個の情報シンボル
  - $Y_1, \ldots, Y_r$　　：r 個の乱数
- $E_0, E_1, \ldots, E_N \subset E$：$N+1$ 個のリンク部分集合

$$E_j = \{e_{j,1}, \ldots, e_{j,k_j}\},\ |E_j| = k_j < h \quad \text{for} \quad j = 0, \ldots, N$$

- 各リンク部分集合 $E_j,\ j = 0, 1, \ldots, N$ に付随するリンクベクトル：

$$G_j = \{\boldsymbol{g}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{j,k_j}\}$$

- E_0：ロバストに対応するリンク部分集合；$|E_0| = k_0 = g$

  $\Rightarrow$ ロバストに対応する情報シンボル：$\{X_i | i \in S\}$,
  $\text{s.t. } S \subset \{1, \ldots, h-r\},\ |S| = f \leq g$
- $E_1, \ldots, E_N$：セキュアなリンク部分集合

ロバストでセキュアなネットワーク符号化 $2/3$

- **条件：** $h \times h$ **変換行列** $F = [\boldsymbol{f}_1 \cdots \boldsymbol{f}_h]$ **は次の条件を満たす**

1) $\operatorname{rank} F = h$

2) **ロバスト対応のリンク部分集合** E_0 **に対し，次のような** $g \times f$ **行列** D **が存在する：** $\langle G_0 \rangle$

$$\left[\boldsymbol{g}_{0,1} \cdots \boldsymbol{g}_{0,g}\right] D = \left[\boldsymbol{f}_{s_1} \cdots \boldsymbol{f}_{s_f}\right]$$

3) **各リンク部分集合** $E_j,\ j = 1, \ldots, N$ **に対し，以下を満たす：** $\langle G_0 \rangle \cap \langle G_j \rangle$

$$\forall \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_\ell \in \{\boldsymbol{f}_i \mid i \in S\}$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{rank}\left[\boldsymbol{c}_1 \cdots \boldsymbol{c}_\ell \boldsymbol{v}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j,v_j}\right] = \ell + v_j$$

ただし， $\ell \leq g - v_j$

4) **各リンク部分集合** $E_j,\ j = 1, \ldots, N$ **に対し，以下を満たす：** $\langle G_0 \rangle + \langle G_j \rangle$

$$\forall \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_\ell \in \{\boldsymbol{f}_i \mid i \in \{1, \ldots, h-r\} \setminus S\}$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{rank}\Big[\boldsymbol{c}_1 \cdots \boldsymbol{c}_\ell \boldsymbol{u}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{j,g-v_j} \boldsymbol{v}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j,v_j} \boldsymbol{w}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{j,k_j-v_j}\Big] = \ell + g + k_j - v_j$$

ただし， $\ell \leq h - (\ell + g + k_j - v_j)$

ロバストでセキュアなネットワーク符号化 $3/3$

- **符号化：各リンク部分集合** $E_j,\ j=0,1,\ldots,N$ **に対し，**

$$W_{j,p}=(X_1,\ldots,X_{h-r},Y_1,\ldots,Y_r)F^{-1}\boldsymbol{g}_{j,p}\quad\text{for}\quad p=1,\ldots,k_j$$

ここで，$\boldsymbol{g}_{j,p}\in G_j$ **はリンク** $e_{j,p}\in E_j$ **に付随するリンクベクトル**

- **性質：**

1) **ロバスト対応のリンク部分集合** E_0 **に対し，以下が成り立つ：**

$$(W_{0,1},\ldots,W_{0,g})\quad\mapsto\quad(X_{s_1},\ldots,X_{s_f})$$

2) **各リンク部分集合** $E_j,\ j=0,1,\ldots,N$ **に対し，以下が成り立つ：**

$$\begin{aligned}&{}^{\forall}X_{i_1},\ldots,X_{i_m}\in\{X_1,\ldots,X_{h-r}\}\\&\qquad\Longrightarrow\quad H(X_{i_1},\ldots,X_{i_m}\mid W_{j,1},\ldots,W_{j,k_j})\\&\qquad\qquad=\begin{cases}\dfrac{m-(u+v_j-g)}{m}H(X_{i_1},\ldots,X_{i_m}) & (u+v_j\geq g)\\[2ex] H(X_{i_1},\ldots,X_{i_m}) & (u+v_j\leq g)\end{cases}\end{aligned}$$

ただし，$u=|\{X_{i_1},\ldots,X_{i_m}\}\cap\{X_i|i\in S\}|,\ m+k_j\leq h,\ k_j<h,\ m\leq h-r$

結論

- 与えられた (ネットワーク) 符号化から構成する様々な線型変換 (ロバスト，セキュア，ロバストでセキュア) について説明した
- ロバストでセキュアなネットワーク符号化の構成法 (線型変換) とその性質について説明した

http://www.coding.ice.uec.ac.jp