ルーティング制御定理の証明

2006/03/31 作成

$\binom{n}{m}$NW 上のルーティング制御

- $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$: ソースノードから伝送する n 個の $1/h$ シンボル
- $\boxed{(i_0, i_1, \ldots, i_{m-1})}$: m 個の中間ノード番号
- $\boxed{(h_{i_0}, h_{i_1}, \ldots, h_{i_{m-1}})}$: m 個の各中間ノードから伝送する $1/h$ シンボルの個数
  - h_{i_k} : 番号 i_k の中間ノードから伝送する $1/h$ シンボルの個数 $(1 \leq h_{i_k} \leq h)$
  - $\sum_{k=0}^{m-1} h_{i_k} = n$.

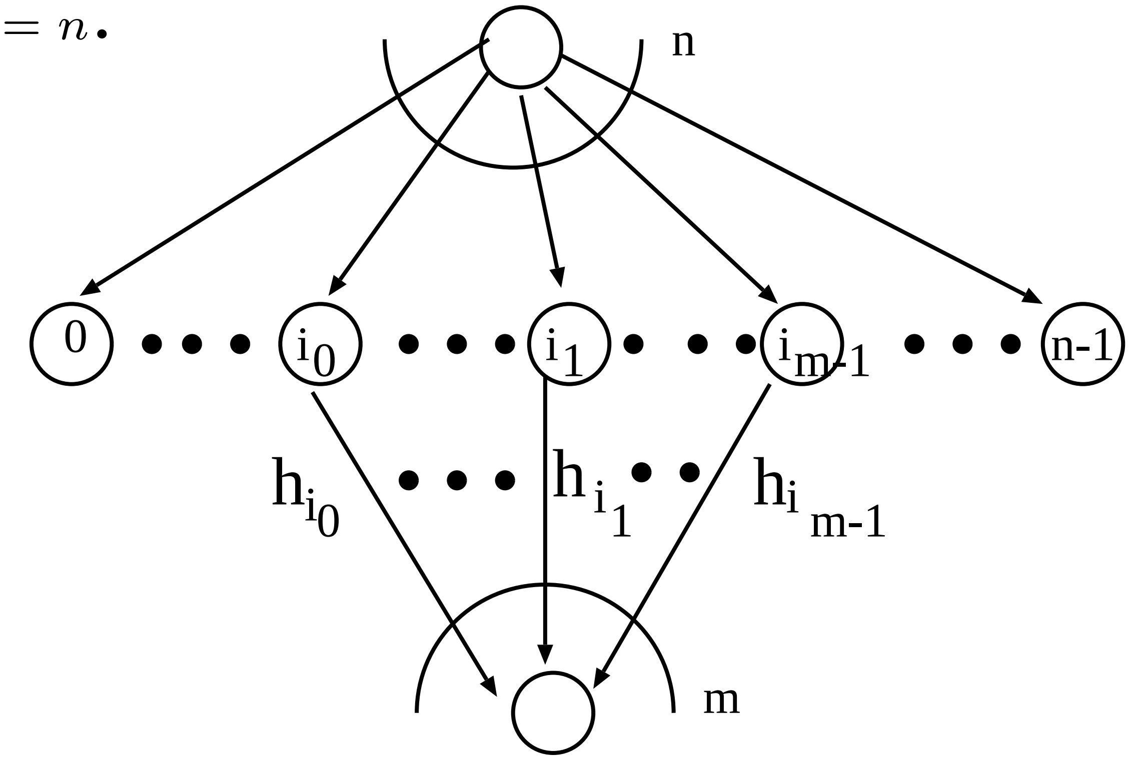
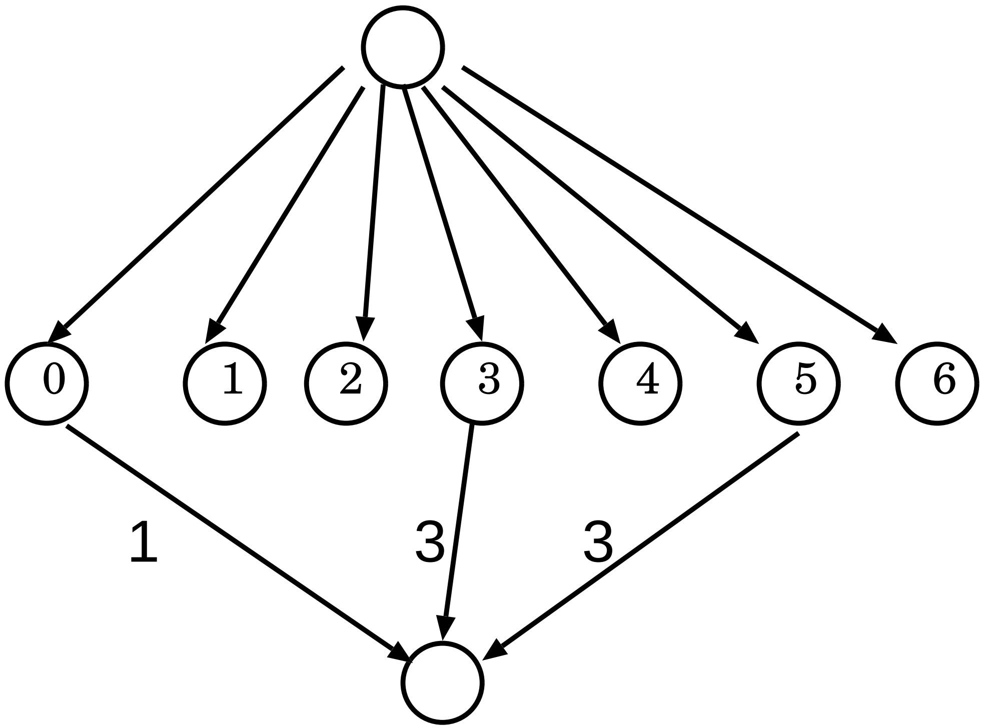


Figure 1: $(i_0, i_1, \ldots, i_{m-1})$ and $(h_{i_0}, h_{i_1}, \ldots, h_{i_{m-1}})$

An Example: $\binom{7}{3}$ NW

- $(n, m) = (7, 3) \Rightarrow (N, h) = (7, 5)$
- $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_6\}$: ソースノードから伝送する 7 個の$1/5$シンボル
- $\boxed{(i_0, i_1, i_2) = (0, 3, 5)}$: 3個の中間ノード番号
- $\boxed{(h_0, h_3, h_5) = (1, 3, 3)}$: m個の各中間ノードから伝送する$1/h$シンボルの個数



$\{h_0, h_3, h_5\}$
$\{0, 2, 5\}$,
$\{0, 3, 4\}$,
$\{1, 1, 5\}$,
$\{1, 2, 4\}$,
$\{1, 3, 3\}$,
$\{2, 2, 3\}$.

Figure 2: $(i_0, i_1, i_2) = (0, 3, 5)$ and $(h_0, h_3, h_5) = (1, 3, 3)$

$\binom{n}{m}$NW 上のルーティング制御定理

定理 3.1[ルーティング制御定理]

$\binom{n}{m}$ NW に対し，ソースから中間ノードへは，サイクリックシフト伝送を行なう．そして，任意のシンクに対し，m 本のリンクによって接続されている m 個の中間ノードからそのシンクへ伝送する $1/h$ シンボルの個数をそれぞれ $h_0, h_1, \ldots, h_{m-1}$ と表す．このとき，任意の値の組 $(h_0, h_1, \ldots, h_{m-1})$ に対し，ルーティング容量 $n/(n-m+1)$ を達成する伝送が可能である．ただし，すべての $k = 0, 1, \ldots, m-1$ に対し，$1 \leq h_k \leq h$ を満たし，$\sum_{k=0}^{m-1} h_k = n$ とする．

- $h_k = 0$ の場合を考慮すると、容易に、ルーティング容量を達成できない反例が示せる

$(i_0, i_1, \ldots, i_{m-1}) \Rightarrow (d_0, d_1, \ldots, d_{m-1})$

- $\boxed{(i_0, i_1, \ldots, i_{m-1})\text{：任意の } m \text{ 個の中間ノード番号}}$
- そこで、
- $d_k := i_{k+1} - i_k$(mod n) for $k = 0, 1, \ldots, m-1$：近隣番号間の差の値（間隔）
- とすると、
- $\boxed{(d_0, d_1, \ldots, d_{m-1})\text{: } m \text{ 個の中間ノード番号間の間隔}}$

  $1 \le d_k \le h$ and $\sum_{k=0}^{m-1} d_k = n$
- が求まる。
- なぜなら、$d_k \ge 1$ と $\sum_{k=0}^{m-1} d_k = n$ は明らか。
- 次に、$d_k > h$ と仮定すると、 $n = \sum_{k=0}^{m-1} d_k > h + m - 1$. 一方、$h$ の定義より、$n = h + m - 1$ となり、矛盾。ゆえに、$d_k \le h$.

- たとえば、$(i_0, i_1, i_2) = (0, 3, 5) \Rightarrow (d_0, d_1, d_2) = (3, 2, 2)$

$$\boxed{\mathbf{0}} \quad 1 \quad 2 \quad \boxed{\mathbf{3}} \quad 4 \quad \boxed{\mathbf{5}} \quad 6 \quad \boxed{\mathbf{0}} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 0$$

逆に、i_0 and $(d_0, d_1, \ldots, d_{m-1}) \Rightarrow (i_0, i_1, \ldots, i_{m-1})$

準備

- **条件 I を満たす 任意の m 個の正整数の組** $(d_0, d_1, \dots, d_{m-1})$ **と** $(h_0, h_1, \dots, h_{m-1})$ **の 2 組を考える:**

条件 I:

$$1)\qquad 1 \le d_k \le h \text{ for all } 0 \le k \le m-1, \tag{1}$$

$$2)\qquad \sum_{k=0}^{m-1} d_k = n, \tag{2}$$

$$3)\qquad 1 \le h_k \le h \text{ for all } 0 \le k \le m-1, \tag{3}$$

$$4)\qquad \sum_{k=0}^{m-1} h_k = n. \tag{4}$$

- **このとき、整数 p に対し，次の条件 II を考える．ただし，$0 \le p \le m-1$ である：**

条件 II:

$$\sum_{k=p}^{p+u} h_k \ge \sum_{k=p}^{p+u} d_k \text{ for all } 0 \le u \le m-1 \tag{5}$$

ただし，添字は m を法として考える．

条件 II とは、

- ある整数 p, $0 \leq p \leq m-1$ に対し、

  $\boxed{\text{条件 II}}$: $\displaystyle\sum_{k=p}^{p+u} h_k \geq \sum_{k=p}^{p+u} d_k$ for all $0 \leq u \leq m-1$

- $(n, m) = (7, 3)$ の場合を考え、
  たとえば、$(d_0, d_1, d_2) = (3, 2, 2)$, $(h_0, h_1, h_2) = (1, 3, 3)$ とする。

- $\boxed{p = 0}$:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} h_0 & \geq & d_0 & 1 & \ngeq & 3 \\ h_0 + h_1 & \geq & d_0 + d_1 & 1+3=4 & \ngeq & 5 = 3+2 \\ h_0 + h_1 + h_2 & \geq & d_0 + d_1 + d_2 & 1+3+3=7 & \geq & 7 = 3+2+2 \end{array}$$

- $\boxed{p = 1}$:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} h_1 & \geq & d_1 & 3 & \geq & 2 \\ h_1 + h_2 & \geq & d_1 + d_2 & 3+3=5 & \geq & 4 = 2+2 \\ h_1 + h_2 + h_0 & \geq & d_1 + d_2 + d_0 & 3+3+1=7 & \geq & 7 = 2+2+3 \end{array}$$

- $\boxed{p = 2}$:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} h_2 & \geq & d_2 & 3 & \ngeq & 2 \\ h_2 + h_0 & \geq & d_2 + d_0 & 3+1=4 & \geq & 4 = 2+2 \\ h_2 + h_0 + h_1 & \geq & d_2 + d_0 + d_1 & 3+1+3=7 & \geq & 7 = 2+3+2 \end{array}$$

定理4.1

条件 I を満たす，任意の m 個の正整数の組 $(d_0, d_1, \ldots, d_{m-1})$ と $(h_0, h_1, \ldots, h_{m-1})$ に対し，条件 II を満たす p が少なくとも 1 個は存在する．

An Example: $\binom{7}{3}$ NW

- $(n, m) = (7, 3) \Rightarrow (N, h) = (7, 5)$
- $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_6\}$
- $\boxed{(i_0, i_1, i_2) = (0, 3, 5)}$
- $\boxed{(h_0, h_3, h_5) = (1, 3, 3)}$

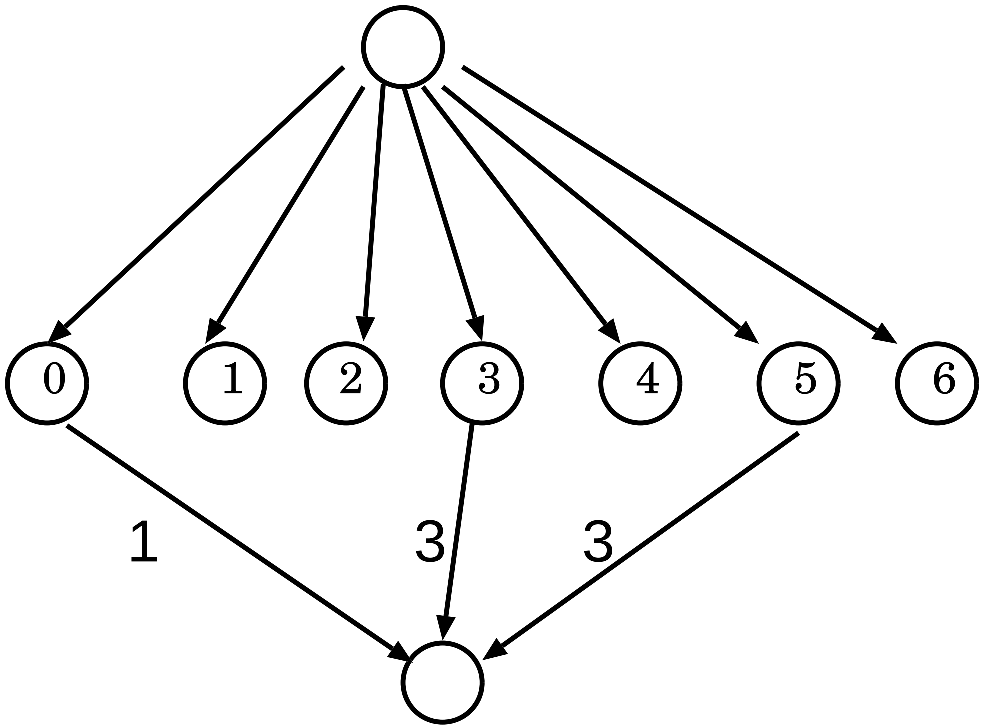


Figure 3: $(i_0, i_1, i_2) = (0, 3, 5)$ and $(h_0, h_3, h_5) = (1, 3, 3)$

- $\boxed{(i_0, i_1, i_2) = (0, 3, 5)} \Rightarrow \boxed{(d_0, d_1, d_2) = (3, 2, 2)}$
- $\boxed{(h_0, h_3, h_5) = (1, 3, 3)} \Rightarrow \boxed{(h_0, h_1, h_2) = (1, 3, 3)}$

- $\boxed{p = 1}$ **:**

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
h_1 & \geq & d_1 & 3 & \geq & 2 \\
h_1 + h_2 & \geq & d_1 + d_2 & 3 + 3 = 5 & \geq & 4 = 2 + 2 \\
h_1 + h_2 + h_0 & \geq & d_1 + d_2 + d_0 & 3 + 3 + 1 = 7 & \geq & 7 = 2 + 2 + 3
\end{array}
$$

No.i		a_3 3	a_4 4	a_5 5	a_6 6	a_0 0	a_1 1	a_2 2	a_3 3	a_4 4	h_i
	$h_1 + h_2 + h_0 = 7$	$\leftarrow$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\rightarrow$			
	$h_1 + h_2 = 5$	$\leftarrow$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\rightarrow$				
	$h_1 = 3$	$\leftarrow$	$-$	$\rightarrow$							
$p = 1 \rightarrow 3$		●	●	●	○	○					3
5				○	●	●	●	○			3
0						○	○	●	○	○	1
	$d_1 = 2$	$\leftarrow$	$\rightarrow$								
	$d_1 + d_2 = 4$	$\leftarrow$	$-$	$-$	$\rightarrow$						
	$d_1 + d_2 + d_0 = 7$	$\leftarrow$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\rightarrow$			

予備

No.i	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_0	h_i
	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	
$p=0 \to 0$	●	○	○	○	○											1
3				●	●	●	○	○								3
5						○	●	●	●	○						3
$p=1 \to 3$				●	●	●	○	○								3
5						○	●	●	●	○						3
0								○	○	●	○	○				1
$p=2 \to 5$						●	●	●	○	○						3
0								○	●	○	○	○				1
3											●	●	●	○	○	3

- いま，条件IIを満たすような整数 p が存在することを証明したい．
- そのために，次のような 2 進系列 $(b_0 b_1 \cdots b_{m-1})$ を考える．
  各 $k = 0, 1, \ldots, m-1$ に対し，b_k を次のように定義する．

$$b_k := \begin{cases} 1 & (\text{if} \quad h_k \geq d_k) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{6}$$

- 条件 I より，常に，$(b_0 b_1 \cdots b_{m-1}) \neq (00 \cdots 0)$ である．

- $(n, m) = (7, 3) \Rightarrow (N, h) = (7, 5)$
- 例えば，正整数の組として，$(d_0, d_1, d_2) = (3, 2, 2)$，$(h_0, h_1, h_2) = (1, 3, 3)$ とする．
- このとき，2 進系列は $(b_0 b_1 b_2) = (011)$ となる．

$$\begin{aligned} (d_0, d_1, d_2) &= (3, 2, 2) && (7) \\ (h_0, h_1, h_2) &= (1, 3, 3) && (8) \\ (b_0, b_1, b_2) &= (0, 1, 1) && (9) \end{aligned}$$

- 2 進系列 $(b_0 b_1 \cdots b_{m-1})$ の長さ：$1 \leq m \leq n$

- 自然数 m に関する数学的帰納法を用いて，条件 II を満たすような p が存在することを示す．
- $\boxed{m=1 \text{ の場合}}$：$h_0 = d_0$ より，系列は $(b_0)=(1)$ となる．このとき，$p=0$ は，条件IIを満たす．
- $\boxed{m=2 \text{ の場合}}$：系列 $(b_0 b_1)$ は $(11),(10),(01)$ のいずれかである．
  - (11) の場合：$p=0$ または 1 のどちらでも，条件 II を満たす．
  - (10) の場合：$p=0$ とすることで，条件 II を満たす．
  - (01) の場合：$p=1$ とすることで，条件 II を満たす．

  したがって，いずれの場合にも条件IIを満たす p は存在する．
- いま，$\boxed{m-1 \text{ の場合}}$において，長さ $m-1$ の任意の系列 $(b_0 \cdots b_{m-2})$ に対し，条件 II を満たす p が存在するものと仮定する．

  このとき，m の場合においても，条件IIを満たす p が存在することを示す．

- $\boxed{m\text{ の場合}}$：長さ m の任意の系列 $\boxed{(b_0 \cdots b_{m-1})}$ に対し，その成分として $\boxed{(b_k b_{k+1}) = (00), (11), (10)}$ のいずれかを満たす2個のビットの列が必ず存在する．ここで，k は $0 \leq k \leq m-1$ であり，b_k の添字は m を法として考える．そのような k を 1 個選び，固定して考える．
- そして，$h'_k := h_k + h_{k+1}$ と $d'_k := d_k + d_{k+1}$ とし，ビット b'_k を

$$b'_k := \begin{cases} 1 & (\text{if} \quad h'_k \geq d'_k) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{10}$$

と定義する．
- これらの定義より，$\boxed{m\text{ の場合}}$ における，

$(h_0 \cdots\cdots h_{m-1})$ と $(d_0 \cdots d_{m-1})$ および $\boxed{(b_0 \cdots b_{k-1} b_k b_{k+1} b_{k+2} \cdots b_{m-1})}$ から，

$\boxed{m-1\text{ の場合}}$ に相当する次のものをそれぞれ構成することができる：

$(h_0 \cdots h_{k-1} h'_k h_{k+2} \cdots h_{m-1})$ と $(d_0 \cdots d_{k-1} d'_k d_{k+2} \cdots d_{m-1})$

および $\boxed{(b_0 \cdots b_{k-1} b'_k b_{k+2} \cdots b_{m-1})}$.
- このとき，帰納法の仮定より，この $m-1$ の場合に対し，条件IIを満たす p が存在する．

- **すなわち，そのような p を用いて以下のことが成り立つ：添字は m を法として扱うことに注意する．（ $h'_k = h_k + h_{k+1}$，$d'_k = d_k + d_{k+1}$ ）**

$$
\begin{aligned}
(1 \sim k-p) \qquad & h_p + h_{p+1} + \cdots + h_{p+u} \geq d_p + d_{p+1} + \cdots + d_{p+u} \\
& \quad \text{for all } 0 \leq u \leq k-1-p \ , \qquad (11) \\
(k-p+2) \qquad & h_p + h_{p+1} + \cdots + h_{k-1} + h'_k \\
& \geq d_p + d_{p+1} + \cdots + d_{k-1} + d'_k \ , \qquad (12) \\
(k-p+3 \sim m) \qquad & h_p + h_{p+1} + \cdots + h_{k-1} + h'_k + h_{k+2} + \cdots + h_{p+u} \\
& \geq d_p + d_{p+1} + \cdots + d_{k-1} + d'_k + d_{k+2} + \cdots + d_{p+u} \\
& \quad \text{for all } k+2-p \leq u \leq m-1 \ . \qquad (13)
\end{aligned}
$$

- **したがって，m の場合でも条件 II が成り立つことを示すには，次の不等式が成り立つことを示せばよい．**

$$
\begin{aligned}
(k-p+1) \qquad & h_p + h_{p+1} + \cdots + h_{k-1} + h_k \\
& \geq d_p + d_{p+1} + \cdots + d_{k-1} + d_k \qquad (14)
\end{aligned}
$$

- そこで，$(b_k b_{k+1})$ の値を場合分けし，m の場合でも不等式 (14) が成り立つことを示す．
- $\boxed{(b_k b_{k+1}) = (00), (10) \text{ の場合}}$：不等式 (12) より，$h_{k+2} + h_{k+3} + \cdots + h_{p-1} \leq d_{k+2} + d_{k+3} + \cdots + d_{p-1}$ である．そして，$b_{k+1} = 0$ より，$h_{k+1} < d_{k+1}$ であるから，$h_{k+1} + h_{k+2} + h_{k+3} + \cdots + h_{p-1} < d_{k+1} + d_{k+2} + d_{k+3} + \cdots + d_{p-1}$ が成り立つ．したがって，条件 I-2,4) より，不等式 (14) が成り立つことが言える．
- $\boxed{(b_k b_{k+1}) = (11), (10) \text{ の場合}}$：$b_k = 1$ より，$h_k \geq d_k$ である．したがって，不等式 (11) より，不等式 (14) が成り立つことが言える．
  (上記のように，(10) の場合は，2 通りの示し方がある．)
- 以上より，m の場合についても条件 II を満たす p が存在する．ゆえに，定理が成り立つことが言えた．

Q.E.D.(定理 4.1)

- 次に，任意の $\boxed{i}$, $0 \leq i \leq n-1$, を選び，固定する．
- そして，次の m 個の整数を定義する．

$$i_u := \begin{cases} i & (u=0) \\ i + \sum_{k=0}^{u-1} d_k & (1 \leq u \leq m-1) \end{cases} \tag{15}$$

ただし，整数 i_u は n を法として考え，その添字は m を法として考える．

- そして，ある整数 $\boxed{p}$, $0 \leq p \leq m-1$, に対し，次の m 個の整数を定義する．

$$j_{p+u} := \begin{cases} i_p & (u=0) \\ i_p + \sum_{k=p+0}^{p+u-1} h_k & (1 \leq u \leq m-1) \end{cases} \tag{16}$$

ただし，整数 j_{p+u} は n を法として考え，その添字は m を法として考える．

- たとえば、$\boxed{(i,p)=(0,1)}$:

		3	4	5	6	0	1	2	3	4	
	j_{p+u}	j_1			j_2			j_0			
$p=1 \to 3$		●	●	●	○	○					3
5				○	●	●	●	○			3
0						○	○	●	○	○	1
	i_u	i_1		i_2		i_0					
		3	4	5	6	0	1	2	3	4	

定理 4.2

次の 2 個の不等式からなる条件 III を満たす p が少なくとも 1 個は存在する．

$\boxed{\text{条件 III}}$ ：すべての u に対し，

1) $$j_{p+u} \geq i_{p+u}, \tag{17}$$

2) $$j_{p+u} + h_{p+u} - 1 \leq i_{p+u} + h - 1 \tag{18}$$

が成立する．

No.i	a_3 3	a_4 4	a_5 5	a_6 6	a_0 0	a_1 1	a_2 2	a_3 3	a_4 4	h_i
$p = 1 \rightarrow 3$	●	●	●	○	○					3
				j_{p+u}		$j_{p+u} + h_{p+u} - 1$				
				$\downarrow$		$\downarrow$				
5			○	●	●	●	○			3
			$\uparrow$				$\uparrow$			
			i_{p+u}				$i_{p+u} + h - 1$			
0					○	○	●	○	○	1

中間ノードからシンクノードへの伝送方法

- 今後，整数 p を条件 II を満たすものとする．このとき，明らかに，この p は条件 III も満たす．
- 各 $u = 0, 1, \ldots, m-1$ に対し，送信する $1/h$ シンボルの集合 $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ の部分集合

$$M_{i_{p+u}} := \{a_{j_{p+u}}, a_{j_{p+u}+1}, \ldots, a_{j_{p+u}+h_{p+u}-1}\} \tag{19}$$

を定義する．このとき，次の定理が成り立つ．

中間ノードからシンクノードへの伝送方法

- $\binom{n}{m}$ NW
- $(i_0, i_1, \ldots, i_{m-1})$：中間ノードの番号
- $(T_{i_0}, T_{i_1}, \ldots, T_{i_{m-1}})$：サイクリックシフト伝送
- $(M_{i_0}, M_{i_1}, \ldots, M_{i_{m-1}})$：中間ノードからシンクへの伝送

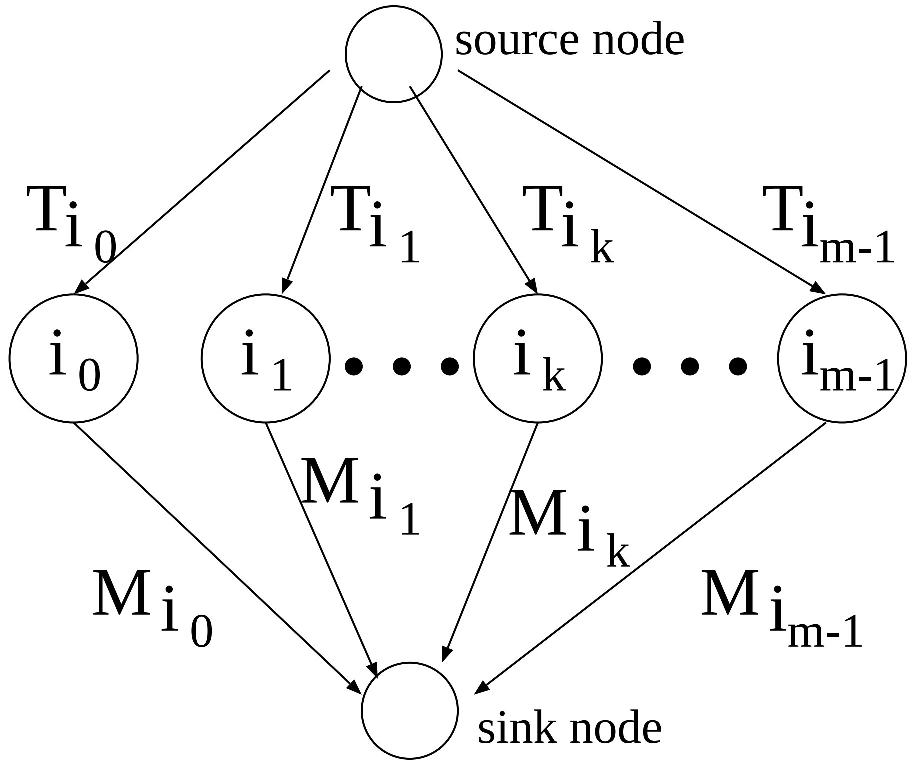


Figure 4: Flow from the souce node to the sink via m intermediate nodes $i_0, i_1, \ldots, i_{m-1}$.

定理4.3

整数 p を条件IIを満たすものとする．このとき，すべての u に対し，$M_{i_{p+u}} \subseteq T_{i_{p+u}}$ が成り立つ．さらに，$\cup_{u=0}^{m-1} M_{i_{p+u}} = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ が成り立つ．

補題4.1

以下の3つの文章は同値である．
i) $\binom{n}{m}$ 個のシンクの中から任意の1個を選ぶこと．
ii) n 個の中間ノードの中から任意の m 個を選ぶこと．
iii) 式(15)に対し，任意の整数 i と 整数の組 $(d_0, \ldots, d_{m-1})$ を選ぶこと．
ただし，$(d_0, \ldots, d_{m-1})$ は，条件I-1,2)を満たす．

定理 3.1(ルーティング制御定理) の証明

補題4.1より，i と iii は同値である．そこで，任意のシンクと整数の組 $(h_0, \ldots, h_{m-1})$ に対し，中間ノードからそのシンクへ伝送する $1/h$ シンボルの集合を式(19)のようにする．すると，定理4.3 より，シンクはソースにおいて生成された n 個のすべての $1/h$ シンボルを受信できる．そして，そのときに伝送されるシンボル量は，ルーティング容量に一致する．ゆえに，定理3.1が成り立つことが証明された．

Q.E.D.(定理3.1)