(2008/12/03 「2008 年度 離散数学 講義資料」の追記)

2008 年度 離散数学 講義資料[1]

例題 (全順序集合) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 上の関係 $\preceq$ を次のように定義する。

任意の $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ に対し,

「"$(x_1,x_2)\preceq(y_1,y_2)$" $\Leftrightarrow$ " $((x_1+x_2\neq y_1+y_2)\wedge(x_1+x_2\leq y_1+y_2))\vee((x_1+x_2=y_1+y_2)\wedge(x_1\leq y_1))$ "」

が成り立つときと定義する. このとき, $\preceq$ は $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 上の全順序関係になる.
ここで、定義式中に用いた記号 $\leq$ は、整数における通常の大小関係を表す記号である。また、不等号の記号 $<$ をあえて使用していないことに注意する。

(証明)

(反射律) 任意の $(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ に対し、$x_1+x_2=x_1+x_2$ かつ $x_1\leq x_1$ が成り立つ。ゆえに、$(x_1,x_2)\preceq(x_1,x_2)$ が成り立つ。

(反対称律) 任意の $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ に対し、$(x_1,x_2)\preceq(y_1,y_2)$ かつ $(y_1,y_2)\preceq(x_1,x_2)$ ならば、次が成り立つ。

$x_1+x_2\neq y_1+y_2$ と仮定すると、$(x_1,x_2)\preceq(y_1,y_2)$ より、$x_1+x_2\leq y_1+y_2$ が成り立つ。一方、$(y_1,y_2)\preceq(x_1,x_2)$ より、$y_1+y_2\leq x_1+x_2$ が成り立つ。これらより、$y_1+y_2=x_1+x_2$ となり、仮定に矛盾する。ゆえに、$x_1+x_2=y_1+y_2$ となる。

次に、$x_1+x_2=y_1+y_2$ の場合、$(x_1,x_2)\preceq(y_1,y_2)$ より、$x_1\leq y_1$ が成り立つ。一方、$(y_1,y_2)\preceq(x_1,x_2)$ より、$y_1\leq x_1$ が成り立つ。したがって、$x_1=y_1$ が成り立つ。さらに、$x_1+x_2=y_1+y_2$ より、$x_2=y_2$ が成り立つ。ゆえに、$(x_1,x_2)=(y_1,y_2)$ が成り立つ。

(推移律) 任意の $(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ に対し、$(x_1,x_2)\preceq(y_1,y_2)$ かつ $(y_1,y_2)\preceq(z_1,z_2)$ ならば、次が成り立つ。場合分けをして考える。

1) $x_1+x_2\neq y_1+y_2$ かつ $y_1+y_2\neq z_1+z_2$ の場合、$(x_1,x_2)\preceq(y_1,y_2)$ かつ $(y_1,y_2)\preceq(z_1,z_2)$ より、$x_1+x_2\leq y_1+y_2$ かつ $y_1+y_2\leq z_1+z_2$ であるから、$x_1+x_2\leq z_1+z_2$ が成り立つと同時に、$x_1+x_2\neq z_1+z_2$ も成り立つ。ゆえに、$(x_1,x_2)\preceq(z_1,z_2)$ が成り立つ。

2) $x_1+x_2=y_1+y_2$ かつ $y_1+y_2=z_1+z_2$ の場合、$(x_1,x_2)\preceq(y_1,y_2)$ かつ $(y_1,y_2)\preceq(z_1,z_2)$ より、$x_1\leq y_1\leq z_1$ が成り立つと同時に、$x_1+x_2=z_1+z_2$ も成り立つ。ゆえに、$(x_1,x_2)\preceq(z_1,z_2)$ が成り立つ。

3) $x_1+x_2\neq y_1+y_2$ かつ $y_1+y_2=z_1+z_2$ の場合、$(x_1,x_2)\preceq(y_1,y_2)$ より、$x_1+x_2\leq y_1+y_2$ が成り立つ。したがって、$x_1+x_2\neq z_1+z_2$ かつ $x_1+x_2\leq z_1+z_2$ が成り立つ。ゆえに、$(x_1,x_2)\preceq(z_1,z_2)$ が成り立つ。

4) $x_1+x_2=y_1+y_2$ かつ $y_1+y_2\neq z_1+z_2$ の場合も、上記 3) の場合と同様に証明できる。

以上より、R は 反射律、反対称律、推移律を満たし、$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 上の順序関係となる。

最後に、任意の $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ に対し、比較可能である、すなわち、$(x_1,x_2)\preceq(y_1,y_2)$ または $(y_1,y_2)\preceq(x_1,x_2)$ が成り立つことを示す。

1) $x_1+x_2=y_1+y_2$ の場合、$x_1\leq y_1$ または $y_1\leq x_1$ が成り立つことより、それぞれ、$(x_1,x_2)\preceq(y_1,y_2)$ または $(y_1,y_2)\preceq(x_1,x_2)$ が成り立つ。

2) $x_1+x_2\neq y_1+y_2$ の場合、$x_1+x_2\leq y_1+y_2$ または $y_1+y_2\leq x_1+x_2$ が成り立つことより、それぞれ、$(x_1,x_2)\preceq(y_1,y_2)$ または $(y_1,y_2)\preceq(x_1,x_2)$ が成り立つ。

以上より、順序関係 $\preceq$ は $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 上の全順序関係となることが示せた。 □

---

[1]法政大学 情報科学部, 2008 年度 秋 離散数学 (水曜日 1 時限目)

(46:/usr/home/kuri/doc/tex/dismath2008/ : 2008/11/28/16:30)

参考 WEB ページ http://www.code.ice.uec.ac.jp/class/