

2008 年度 離散数学 講義資料¹

例題 5.55 $(X, \leq_X)$, $(Y, \leq_Y)$ を順序集合とする. そのとき, $X \times Y$ 上の関係 R を, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ に対し, 「 $“(x_1, y_1)R(x_2, y_2)” \Leftrightarrow “(x_1 \leq_X x_2) \wedge (y_1 \leq_Y y_2)”$ 」 が成り立つときと定義する. このとき, R は $X \times Y$ 上の順序関係になる.

(証明)

(反射律) 任意の $(x, y) \in X \times Y$ に対し, $x \leq x$ かつ $y \leq y$ が成り立つ. ゆえに, $(x, y)R(x, y)$ が成り立つ。

(反対称律) 任意の $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ に対し, $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2)R(x_1, y_1)$ ならば, $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ より, $x_1 \leq x_2$ かつ $y_1 \leq y_2$. さらに, $(x_2, y_2)R(x_1, y_1)$ より, $x_2 \leq x_1$ かつ $y_2 \leq y_1$. したがって, $x_1 \leq x_2$ かつ $x_2 \leq x_1$ より, $x_1 = x_2$. 同様に, $y_1 \leq y_2$ かつ $y_2 \leq y_1$ より, $y_1 = y_2$. ゆえに, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ が成り立つ。

(推移律) 任意の $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \times Y$ に対し, $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2)R(x_3, y_3)$ ならば, $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ より, $x_1 \leq x_2$ かつ $y_1 \leq y_2$. さらに, $(x_2, y_2)R(x_3, y_3)$ より, $x_2 \leq x_3$ かつ $y_2 \leq y_3$. したがって, $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ より, $x_1 \leq x_3$. 同様に, $y_1 \leq y_2 \leq y_3$ より, $y_1 \leq y_3$. ゆえに, $(x_1, y_1)R(x_3, y_3)$ が成り立つ。

以上より, R は 反射律、反対称律、推移律を満たし, $X \times Y$ 上の順序関係となる. $\square$

¹法政大学 情報科学部, 2008 年度 秋 離散数学 (水曜日 1 時限目)

©2007–2008 栗原正純, 電気通信大学情報通信工学科, kuri@ice.uec.ac.jp

(46:/usr/home/kuri/doc/tex/dismath2008/ : 2008/11/27/9:56)

参考 WEB ページ <http://www.code.ice.uec.ac.jp/class/>