

前回 (2007/11/07) の講義で扱った主な内容 (キーワード)

2 論理

1. 主論理和標準形 と 主論理積標準形
2. 恒真命題
3. 論法と妥当 (対偶, 背理法, 三段論法)
4. 限定記号 (全称記号 $\forall$ 存在記号 $\exists$)
 - $\forall$: 「すべての」, 「任意の」
 - $\exists$: 「存在する」

2007/11/14

限定記号 より, 次の「日本語による記述」と「数学記号による記述」の2通りが可能となる.

1. $X \subseteq Y$

i. X の要素がすべて Y の要素である.

ii. $\forall x : [x \in X \Rightarrow x \in Y]$

2. $X \subset Y$

i. X が Y の部分集合であり, かつ, X でない Y の要素が存在する.

ii. $X \subseteq Y$ かつ $\exists x : [x \notin X \text{ かつ } x \in Y]$

3. 写像 f を集合 X から 集合 Y への写像とする. すなわち, $f : X \longrightarrow Y$.

写像 f は **単射** である.

i. 任意の $x, y \in X$ に対し, $x \neq y$ ならば $f(x) \neq f(y)$ が成り立つ.

ii. $\forall x, y \in X : [x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)]$

対偶:

i. 任意の $x, y \in X$ に対し, $f(x) = f(y)$ ならば $x = y$ が成り立つ.

ii. $\forall x, y \in X : [f(x) = f(y) \Rightarrow x = y]$

4. 写像 f は **全射** である.

i. 任意の $y \in Y$ に対し, $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する.

ii. $\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$

レポート問題 (2007/11/07)

1. 配布プリント p.14 の 定理 2.5 (ド・モルガンの法則) の 2 の証明.
2. 配布プリント p.17 の 例 2.19 の 1.
論理関数の 主論理和標準形 と 主論理積標準形 のそれぞれを示せ.
そして, それぞれが正しいことを真理値表を作成し確認せよ.
3. 配布プリント p.20 の 例 2.38
真偽を判定し, その判定理由を述べよ.

例 2.38 の 解答

1. $\forall x \in \mathbf{N}, \exists y \in \mathbf{N} : y = x^2$

任意の自然数 x に対し, その 2 乗 x^2 は自然数であるから $y = x^2$ を満たす自然数 y は存在する. ゆえに, T .

2. $\forall y \in \mathbf{N}, \exists x \in \mathbf{N} : y = x^2$

任意の自然数 y に対し, その $\pm\sqrt{y}$ は必ずしも自然数にはならない. ゆえに, $y = x^2$ を満たす自然数 x は存在しないから, F .

たとえば, $y = 3$ のとき, $x = \pm\sqrt{3}$. $\sqrt{3}$ は自然数ではない.

3. $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{N} : y = x^2$

前問と同様に, 任意の実数 y に対し, その $\pm\sqrt{y}$ は必ずしも自然数にはならないことより, F .

4. $\forall y \in \mathbf{N}, \exists x \in \mathbf{R} : y = x^2$

任意の自然数 y に対し, $y > 0$ より, $\pm\sqrt{y}$ は実数になる. ゆえに, $y = x^2$ を満たす実数 $x = \pm\sqrt{y}$ は存在するから, T .

5. $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R} : y = x^2$

任意の実数 y に対し, $y < 0$ の場合, $\pm\sqrt{y}$ は実数ではなく, 複素数になる. ゆえに, 任意の実数 y に対し, $y = x^2$ を満たす実数 x は存在しないから, F .

たとえば, $y = -1$ のとき, $x^2 = -1$ を満たす実数 x は存在しない.