

2007/10/10 に出した問題のレポートについて

X, Y を空でない集合とし、写像 f を $f : X \longrightarrow Y$ とする.

1. (定理1.44 の 5 関連)

A を X の任意の部分集合とするととき、以下のことを示せ。

「 f が単射ならば、 $f^{-1}(f(A)) = A$ が成り立つ。」

2. (定理1.45 の 5 関連)

B を Y の任意の部分集合とするととき、以下が成り立つことを示せ。

「 f が全射ならば、 $f(f^{-1}(B)) = B$ が成り立つ。」

$$“A = B” \quad \Leftrightarrow \quad “A \subseteq B \text{ かつ } A \supseteq B”$$

1. 「 f が単射ならば, $f^{-1}(f(A)) = A$ が成り立つ。」

(証明)

- i. $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ を示す.
- ii. 単射の性質を使って, $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ を示す.
- iii. 以上の i, ii より, $f^{-1}(f(A)) = A$ 成り立つ. ■

2. 「 f が全射ならば, $f(f^{-1}(B)) = B$ が成り立つ。」

(証明)

- i. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ を示す.
- ii. 全射の性質を使って, $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$ を示す.
- iii. 以上の i, ii より, $f(f^{-1}(B)) = B$ 成り立つ. ■

前回 (2007/10/17) の講義で扱った主な内容 (キーワード)

1.2 写像

1. 合成写像 (特に, 単射 や 全射 の証明)

2. 写像の数

i. 写像の総数, ii. 単射の総数, iii. 全射の総数

3. 写像と集合の要素数の関係

i. “ X から Y への単射が存在する ” $\Leftrightarrow$ “ $|X| \leq |Y|$ ”

ii. “ X から Y への全射が存在する ” $\Leftrightarrow$ “ $|X| \geq |Y|$ ”

iii. “ X から Y への全単射が存在する ” $\Leftrightarrow$ “ $|X| = |Y|$ ”

4. 鳩の巣原理 (途中)