離散数学　2007. 秋.　　2007. 9. 29

THE UNIVERSITY OF ELECTRO-COMMUNICATIONS
1-5-1, CHOFUGAOKA, CHOFU-SHI, TOKYO
URL http://www.uec.ac.jp

『2007. 9. 26 レポート』
(P.3 定理1.15)

「$X \cup \emptyset = X$

$\subseteq$) 任意の $x \in X \cup \emptyset$ に対し、$x \in X$ または $x \in \emptyset$ である。ところが、$\emptyset$ は要素をもたない空集合であるから、$x \notin \emptyset$．したがって、$x \in X$.

$\supseteq$) 任意の $x \in X$ に対し、$x \in X \subseteq X \cup \emptyset$.

以上より、$X \cup \emptyset = X$ は成立する.」

「$X \cap \emptyset = \emptyset$

(命題 "PならばQ" において、
「Pが偽(正しくない)ならば、命題は常に真(正しい)である」
また、
「Qが真(正しい)ならば、命題は常に真である」)

$\subseteq$) 任意の $x \in X \cap \emptyset$ に対し、$x \in \emptyset$ であることを示す.
このとき、$x \in X$ かつ $x \in \emptyset$ である.
ところが、$\emptyset$ は空集合であるから $x \notin \emptyset$.
したがって $x \in X \cap \emptyset$ は偽である.
ゆえに、「任意の $x \in X \cap \emptyset$ に対し、$x \in \emptyset$」は常に真である.
すなわち、$X \cap \emptyset \subseteq \emptyset$.

$\supseteq$) 任意の $x \in \emptyset$ に対し、$x \in X \cap \emptyset$ であることを示せばよい.
上記の $\subseteq$) の場合と同様に、$x \in \emptyset$ は偽である.
ゆえに、「任意の $x \in \emptyset$ に対し、$x \in X \cap \emptyset$」は常に真である.
すなわち、$X \cap \emptyset \supseteq \emptyset$.

以上より、$X \cap \emptyset = \emptyset$ は成立する。」

$X \cup X^c = U$

$\subseteq$) 任意の $x \in X \cup X^c$ に対し、$x \in X$ または $x \in X^c$ である。
i) $x \in X$ ならば、$x \in X \subseteq U$ より、$x \in U$.
ii) $x \in X^c$ ならば、$x \in X^c = \{x \mid x \in U, x \notin X\} \subseteq U$ より
(すなわち、X^cの定義より)、$x \in U$.
i, ii) より、常に $x \in U$. ゆえに $X \cup X^c \subseteq U$.

$\supseteq$) 任意の $x \in U$ に対し、$x \in X \cup X^c$ を示せばよい。
i) $x \in X$ ならば、$x \in X \subseteq X \cup X^c$ より、$x \in X \cup X^c$.
ii) $x \notin X$ ならば、補集合X^cの定義より、
$x \in \{x \mid x \in U, x \notin X\} = X^c$.
i, ii) より $x \in X \cup X^c$.
以上より、$X \cup X^c = U$ は成立する。」

$X \cap X^c = \emptyset$

$\subseteq$) 任意の $x \in X \cap X^c$ に対し、$x \in \emptyset$ であることを示せばよい。
$x \in X \cap X^c$ であることより、$x \in X$ かつ $x \in X^c$.
i) もし $x \in X$ ならば、補集合X^cの定義より、
$x \notin \{x \mid x \in U, x \notin X\} = X^c$. すなわち、$x \notin X^c$
ii) 同様に、もし $x \in X^c$ ならば、$x \notin X$.
ゆえに、「$x \in X \cap X^c$」は偽である。
したがって、「$x \in X \cap X^c$ ならば $x \in \emptyset$」は常に真である。
すなわち、$X \cap X^c \subseteq \emptyset$.

$\supseteq$) 任意の $x \in \emptyset$ に対し、$x \in X \cap X^c$ であることを示せばよい。
上記と同様の手法で、$x \in \emptyset$ は偽であることより、
「$x \in \emptyset$ ならば $x \in X \cap X^c$」は常に真であり、
$X \cap X^c \supseteq \emptyset$.
以上より、$X \cap X^c = \emptyset$ は成り立つ。」

THE UNIVERSITY OF ELECTRO-COMMUNICATIONS
1-5-1, CHOFUGAOKA, CHOFU-SHI, TOKYO
URL http://www.uec.ac.jp

$(X^c)^c = X$

$\subseteq$) 任意の $x \in (X^c)^c$ に対し、補集合の定義より、
$x \notin X^c$ である. さらに X^c の定義より、$x \notin X^c$ ならば $x \in X$.
ゆえに $(X^c)^c \subseteq X$.

$\supseteq$) 任意の $x \in X$ に対し、補集合の定義より、
$x \notin X^c$. さらに、X^c の補集合を考えると、$x \notin X^c$ ならば
$x \in (X^c)^c$ である. ゆえに $(X^c)^c \supseteq X$.

以上より、$(X^c)^c = X$ は成立する.」

注) $X \cup X^c = U$ と $X \cap X^c = \emptyset$ より、
U の任意の元 x は、$x \in X$ か $x \in X^c$ のどちらか
一方のみを満たす. (ただし, $X \subseteq U$)
したがって, 「$x \in X$ ならば $x \notin X^c$」
「$x \in X^c$ ならば $x \notin X$」
が常に言える.

THE UNIVERSITY OF ELECTRO-COMMUNICATIONS
1-5-1, CHOFUGAOKA, CHOFU-SHI, TOKYO
URL http://www.uec.ac.jp

質問に対する解答.

「任意の集合Xに対し、$\emptyset \subseteq X$ が成立する」を対偶を用いないで解けますか?という質問が2007.9.26の講義後にありました.

以下にその解答例を書く.

解) 任意の $x \in \emptyset$ に対し、$x \in X$ であることを示せばよい.

$\emptyset$ は要素をもたない空集合であるから $x \in \emptyset$ は偽である. ゆえに、

「$x \in \emptyset$ ならば、$x \in X$」

は常に真(正しい)である. すなわち、$\emptyset \subseteq X$」

注意) 命題「P ならば Q」において、P が偽ならばその命題は常に真であることを用いてる.