

以下の式が成り立つことを示そう.

$$F(m, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m \dots\dots\dots \textcircled{A}$$

式 $\textcircled{A}$ が正しいことを n に関する数学的帰納法で示す.

$n=1$ のとき. 左辺 = 1 ($|Y|=n=1$ に対する全射の数)
 右辺 = $0+1=1$.
 ゆえに、式 $\textcircled{A}$ は正しい.

$n-1$ まで正しいと仮定する.

すなわち、 $j < n$ なる j に対し、

$$F(m, j) = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} k^m$$

が成り立つと仮定する.

n についても正しいことを示す.

(続く)
 より

$$n^m = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} F(m, j) \quad \text{より}$$

$$F(m, n) = n^m - \sum_{j=1}^{n-1} F(m, j)$$

$$= n^m - \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} \left(\sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} k^m \right)$$

$$= n^m - \sum_{k=0}^j \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-k} \binom{n}{j} \binom{j}{k} k^m$$

≡ 1 行

$$= n^m - \sum_{k=0}^j \sum_{j=k}^{n-1} (-1)^{j-k} \binom{n}{j} \binom{j}{k} k^m$$

≡ 2 行

$$= n^m - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k}^{n-1} (-1)^{j-k} \binom{n}{j} \binom{j}{k} k^m$$

≡ 3 行

$$= n^m - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k}^{n-1} (-1)^{j-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j-k} k^m$$

≡ 4 行

$$= n^m - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \binom{n}{k} k^m$$

$$= n^m + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m$$

したがって、 n の場合にも正しいことが言えた。
 以上より、数学的帰納法により、任意の n について式 (A) が正しいことが言えた。」

注 1

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-k} \binom{n}{j} \binom{j}{k} = \sum_{j=k}^{n-1} (-1)^{j-k} \binom{n}{j} \binom{j}{k} k^m$$

$$\boxed{k \rightarrow \binom{1}{k} = \binom{2}{k} = \dots = \binom{k-1}{k} = 0}$$

注 2

$$\sum_{k=0}^j \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-k} \binom{n}{k} \binom{j}{k} k^m$$

$$= \sum_{k=0}^j \sum_{j=k}^{n-1} (-1)^{j-k} \binom{n}{k} \binom{j}{k} k^m$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k}^{n-1} (-1)^{j-k} \binom{n}{k} \binom{j}{k} k^m$$

$$\boxed{k \rightarrow \binom{j}{j+1} = \binom{j}{j+2} = \dots = \binom{j}{n-1} = 0}$$

注 3

$$\binom{n}{j} \binom{j}{k} = \frac{n!}{j! (n-j)!} \times \frac{j!}{k! (j-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)! k!} \times \frac{(n-k)!}{(j-k)! ((n-k)-(j-k))!}$$

$$= \binom{n}{k} \binom{n-k}{j-k}$$

注 4 $(x-y)^n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$ を利用する.

$x=y=1$ とする.

$$\left[0 = (1-1)^n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \right] \text{ を得る.}$$

すなわち,

$$\sum_{j=k}^{n-1} (-1)^{j-k} \binom{n-k}{j-k} = \binom{n-k}{0} - \binom{n-k}{1} + \dots + (-1)^{n-1-k} \binom{n-k}{n-1-k}$$

$$= -(-1)^{n-k} \binom{n-k}{n-k}$$

$$= \underline{\underline{(-1)^{n-k-1}}}$$

n を $n-k$ に置きかえて考える.

$$\rightarrow 0 = \binom{n-k}{0} - \binom{n-k}{1} + \dots + (-1)^{n-k-1} \binom{n-k}{n-k-1} + (-1)^{n-k} \binom{n-k}{n-k}$$