

離散数学演習 (まとめ)¹

(集合, 写像, 論理, 数学的帰納法, 2 項関係, 同値関係, 順序関係)

2007 年 12 月 19 日 (水)

定義 1 U を全体集合とし, X, Y を U の部分集合とする. すなわち, $X \subseteq U, Y \subseteq U$ とする.

1. 要素をもたない集合を**空集合**とよび, 記号 ϕ (ファイ) で表す.

2. U に関する X の**補集合** X^c とは, 次のように定義される.

$$X^c := \{x \mid x \in U, x \notin X\}.$$

3. X と Y の**差集合** $X - Y$ とは, 次のように定義される.

$$X - Y := X \cap Y^c.$$

問題 1 X, Y を集合とする. そして, X は Y の部分集合とする. すなわち, $X \subseteq Y$ とする. この例を元に, 部分集合の定義を述べよ. ここで, 限定記号 $\exists$ や全称記号 $\forall$ などの数学記号による記述を用いても構わない.

問題 2 次のことが正しいかどうかを判定せよ. 正しくない場合は, その理由を述べよ.

1. $\phi \subseteq \phi$

4. $\phi \in \{\phi\}$

2. $\phi \in \phi$

5. $\{\phi\} \subseteq \{\phi\}$

3. $\phi \subseteq \{\phi\}$

6. $\{\phi\} \in \{\phi\}$

問題 3 全体集合を $U = \{1, 2, \dots, 9\}$ とする. そして, U の部分集合として, $X = \{2, 6, 7, 9\}$, $Y = \{3, 4, 6, 9\}$, $Z = \{4, 5, 6, 7\}$ とする. このとき, 次の 8 種類の集合:

$$(X \cup Y)^c, X^c \cap Y^c, (X \cap Y)^c, X^c \cup Y^c,$$

$$(X - Y) - Z, X - (Y \cup Z), X - (Y - Z), (X - Y) \cup (X \cap Z)$$

をそれぞれ外延的記法で表せ.

問題 4 X, Y を集合とする. このとき, 次のド・モルガンの法則が成り立つことを証明せよ.

1. $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c.$

2. $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c.$

問題 5 X, Y, Z を集合とする. このとき, 次式が成り立つことを証明せよ.

1. $(X - Y) - Z = X - (Y \cup Z)$

2. $X - (Y - Z) = (X - Y) \cup (X \cap Z)$

問題 6 X を集合とする. このとき, 以下の問に答えよ.

1. X のベキ集合 2^X の定義を述べよ.

2. $X = \{a, b, c, d\}$ とするとき, ベキ集合 2^X を外延的記法で表せ.

3. 前問と同様に, $X = \{a, b, c, d\}$ とするとき, ベキ集合 2^X の濃度 $|2^X|$ を述べよ.

問題 7 X, Y を空でない集合とし, f を X から Y への写像 $f: X \rightarrow Y$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ. ここで, 以下の問いに対し, 限定記号 $\exists$ や全称記号 $\forall$ などの数学記号による記述を用いても構わない.

1. 写像 f が単射であることの定義を述べよ.

2. 写像 f が全射であることの定義を述べよ.

3. 写像 f が全単射であることの定義を述べよ.

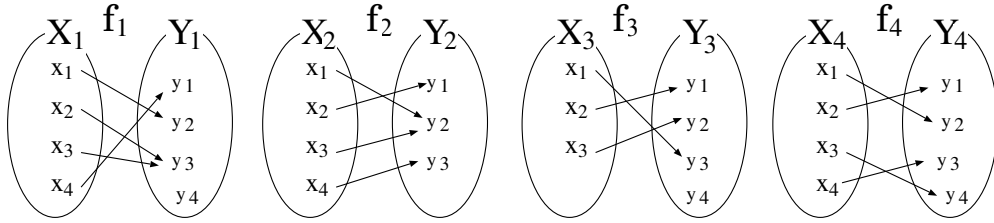
¹法政大学情報科学部コンピュータ科学科, デジタルメディア学科, 2007 年度秋「離散数学」

©栗原正純, 電気通信大学情報通信工学科, kuri@ice.uec.ac.jp

(2007/12/25/13:09)

(46:/usr/home/kuri/doc/tex/dismath/)

問題 8 各 $i = 1, 2, 3, 4$ に対し, 集合 X_i, Y_i , および X_i から Y_i への写像 $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ をそれぞれ次の図のように定義する. このとき, 以下の問いに答えよ.



1. 4 つの写像 f_1, f_2, f_3, f_4 の中で単射であるものをすべて述べよ.
2. 4 つの写像 f_1, f_2, f_3, f_4 の中で全射であるものをすべて述べよ.
3. 4 つの写像 f_1, f_2, f_3, f_4 の中で全単射であるものをすべて述べよ.

定義 2 X, Y を空でない集合とし, f を X から Y への写像 $f : X \rightarrow Y$ とする. このとき, 像と原像は次のように定義される.

1. X の部分集合 A に対し, A の f による像 $f(A)$ とは,

$$f(A) := \{f(x) \in Y \mid x \in A\}.$$
2. Y の部分集合 B に対し, B の f による原像 (あるいは逆像) $f^{-1}(B)$ とは,

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

問題 9 いま, 写像 f_1, f_2, f_3, f_4 を 問題 8 において示された写像と同じものとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

1. $f_1^{-1}(f_1(\{x_1, x_2\}))$ を外延的記法で表せ.
2. $f_2(f_2^{-1}(\{y_1, y_2\}))$ を外延的記法で表せ.
3. $f_3(f_3^{-1}(\{y_3, y_4\}))$ を外延的記法で表せ.
4. $f_4^{-1}(f_4(\{x_3, x_4\}))$ を外延的記法で表せ.

問題 10 X, Y を空でない集合とし, f を X から Y への写像 $f : X \rightarrow Y$ とする. X の部分集合 A に対し, 以下のことを示せ.

1. $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ が成り立つことを示せ.
2. 写像 f が単射ならば $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ が成り立つことを示せ.

(備考: 上記 1, 2 より, f が単射ならば $f^{-1}(f(A)) = A$ が成り立つ.)

問題 11 X, Y を空でない集合とし, f を X から Y への写像 $f : X \rightarrow Y$ とする. Y の部分集合 B に対し, 以下の問いに答えよ.

1. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ が成り立つことを示せ.
2. 写像 f が全射ならば $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$ が成り立つことを示せ.

(備考: 上記 1, 2 より, f が全射ならば $f(f^{-1}(B)) = B$ が成り立つ.)

問題 12 X, Y, Z を空でない集合とする. f, g をそれぞれ写像 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ とする. そして, 写像 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ に対し, それらの合成写像 $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ は, $x \in X$ に対し, $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ と定義される. このとき, 以下の問いに答えよ.

1. 合成写像 $g \circ f$ が単射ならば f は単射であることを示せ.
2. 合成写像 $g \circ f$ が全射ならば g は全射であることを示せ.

定義 3 与えられた命題から新たな命題を作る命題結合記号として、次のような論理記号が定義されている。

1. “ $p \vee q$ ” を p と q の**論理和**という. “ p または q ” という意味を表す.
2. “ $p \wedge q$ ” を p と q の**論理積**という. “ p かつ q ” という意味を表す.
3. “ $p \Rightarrow q$ ” を “ p は q を**含意**する ” という. “ p ならば q ” という意味を表す.
4. “ $p \Leftrightarrow q$ ” は “ $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ” と論理的に等しい.
5. “ $p \Leftrightarrow q$ ” が真のとき, p と q は**同値**であるという.
6. p と q が**同値**であることと, p と q の真理値が一致することは同じである.
したがって, $p \Leftrightarrow q$ が真のとき, “ $p \Leftrightarrow q$ ” を “ $p = q$ ” と書く.

問題 13 次の**真理値表**の空欄を埋め, 完成せよ. ここで, p, q は命題を表すとする. さらに, T は真を表し, F は偽を表すとする.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Leftarrow q)$	$p \Leftrightarrow q$
T	T						
T	F						
F	T						
F	F						

(1)

問題 14 次の命題が成り立つこと (真であること) を真理値表を用いて, 示せ. (すなわち, 真理値表を正しく完成させた後に, 「真理値表より, 命題は常に真であることが証明された」と明記すること.) ここで, p, q は命題を表すとする. さらに, T は真を表し, F は偽を表すとする.

1. $r = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ ならば $((r \vee q) \wedge p) = p$ が成り立つことを示せ.
2. $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ が成り立つことを示せ.
3. $((p \wedge \neg q) \Rightarrow F) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ が成り立つことを示せ.

問題 15 任意の命題 p, q に対し, 以下のド・モルガンの法則が成り立つことを証明せよ.

1. $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$.
2. $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.

問題 16 次の命題の真偽を判定せよ. 偽の場合は, その理由を述べよ. ここで, 真ならば T , 偽ならば F を用いて記せ. $\mathbf{N}$ は自然数全体の集合を表し, $\mathbf{R}$ は実数全体の集合を表す.

- | | |
|---|---|
| 1. $\forall x \in \mathbf{N}, \exists y \in \mathbf{N} : y = x^2$ | 6. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : x = y$ |
| 2. $\forall y \in \mathbf{N}, \exists x \in \mathbf{N} : y = x^2$ | 7. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R} : x = y$ |
| 3. $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{N} : y = x^2$ | 8. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R} : x = y$ |
| 4. $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R} : y = x^2$ | 9. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : x = y$ |
| 5. $\forall y \in \mathbf{N}, \exists x \in \mathbf{R} : y = x^2$ | |

問題 17 数列 $a_1, a_2, \dots$ を次のように定義する.

- $a_1 = 1$,
- $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + 1 \quad (n \geq 2)$

このとき, 任意の自然数 n に対し, $a_n = 2^{n-1}$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ.

問題 18 次の再帰式で定義される数列を **フィボナッチ数列** という.

- $a_0 = 0, a_1 = 1$,
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2)$

この再帰式に対し, 多項式 $X^2 - X - 1$ を, その特性多項式という. この多項式の 2 根を α, β ($\alpha > \beta$) とすると, フィボナッチ数列の第 n 項は $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ と表されることを数学的帰納法を用いて証明せよ. ここで, 次の事実を利用しても構わない: $X^2 - X - 1$ の根である α, β について, $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$ が成り立つ. さらに, 2 次方程式の解の公式より, $X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

定義 4 R を集合 X 上の関係とする.

このとき, 次の 4 つの性質: 反射律, 対称律, 反対称律, 推移律 は以下のように定義される.

1. **(反射律)** R が **反射的** であるとは, 次の条件が成り立つときである :

$$\forall x \in X : xRx.$$

2. **(対称律)** R は **対称的** であるとは, 次の条件が成り立つときである :

$$\forall x, y \in X : [(xRy) \Rightarrow (yRx)].$$

3. **(反対称律)** R は **反対称的** であるとは, 次の条件が成り立つときである :

$$\forall x, y \in X : [(xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow (x = y)].$$

4. **(推移律)** R が **推移的** であるとは, 次の条件が成り立つときである :

$$\forall x, y, z \in X : [(xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz)].$$

問題 19 集合 $X = \{a, b, c, d\}$ 上の 2 種類の関係 R, S をそれぞれ以下のように定義する.

- i. $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$
- ii. $S = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c)\}$

次の問いに答えよ.

1. 関係 R, S のそれぞれを行列と有向グラフで表せ.
2. 関係 R, S が, 反射律, 対称律, 反対称律, 推移律 のそれぞれを満たすかどうかを判定せよ. 満たす場合は ○, 満たさない場合は × を記せ.

定義 5 R を 集合 X 上の同値関係とする.

1. 任意の $x \in X$ に対し,

$$[x] := \{y \mid y \in X, xRy\} \quad (2)$$

を R による x の **同値類** という.

2. それぞれの同値類に属する要素を, その同値類の **代表元** という.
3. 集合 X 上の同値関係 R に対し,

$$X/R := \{[x] \mid x \in X\} \quad (3)$$

を X の R による **商集合** という.

問題 20 同値関係の定義を述べよ.

問題 21 R を集合 X 上の同値関係とする. このとき, 次のことが成り立つことを証明せよ.

$$\forall x, y \in X : ([x] \cap [y] \neq \phi \Rightarrow [x] = [y]) \quad (4)$$

問題 22

1. n を任意に固定した整数とすると,

$$R_{(n)} := \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x - y \text{ は } n \text{ の倍数}\} \quad (5)$$

は $\mathbf{Z}$ 上の同値関係になることを証明せよ. ここで, $\mathbf{Z}$ は整数の全体からなる集合を表すものとする.

2. $n = 5$ の場合, $\mathbf{Z}$ の $R_{(5)}$ による商集合 $\mathbf{Z}/R_{(5)}$ を外延的記法で表せ.

問題 23

1. $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ 上の関係 $\sim$ を, 任意の $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ に対し,

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 n_2 = m_2 n_1 \quad (6)$$

と定義する. このとき, $\sim$ が $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ 上の同値関係になることを証明せよ. ここで, $\mathbf{Z}$ は整数の全体からなる集合を表すものとする.

2. $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ の $\sim$ による商集合 $(\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})) / \sim$ は, 次のどのような数に関する集合と同じになるか 番号 で答えよ.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1. 自然数の全体からなる集合 $\mathbf{N}$ | 3. 有理数の全体からなる集合 $\mathbf{Q}$ |
| 2. 整数の全体からなる集合 $\mathbf{Z}$ | 4. 実数の全体からなる集合 $\mathbf{R}$ |

定義 6 R を 集合 X 上の順序関係とする.

1. 順序関係 R を 半順序関係 という場合もある.
2. 順序関係 R が定義されている集合 X を **順序集合** といい, (X, R) と表す.

次に, $(X, \leq)$ を順序集合とし, Y を X の空でない部分集合とする.

1. a が Y の **最大元** であるとは, 次の条件が成り立つときである:
 $a \in Y$ かつ $\forall x \in Y : x \leq a$.
2. a が Y の **最小元** であるとは, 次の条件が成り立つときである:
 $a \in Y$ かつ $\forall x \in Y : a \leq x$.
3. a が Y の **極大元** であるとは, 次の条件が成り立つときである:
 $a \in Y$ かつ $\forall x \in X : [(a \leq x \text{ かつ } a \neq x) \Rightarrow x \notin Y]$.
4. a が Y の **極小元** であるとは, 次の条件が成り立つときである:
 $a \in Y$ かつ $\forall x \in X : [(x \leq a \text{ かつ } a \neq x) \Rightarrow x \notin Y]$.
5. a が Y の **上界** であるとは, 次の条件が成り立つときである:
 $a \in X$ かつ $\forall x \in Y : x \leq a$.
6. a が Y の **下界** であるとは, 次の条件が成り立つときである:
 $a \in X$ かつ $\forall x \in Y : a \leq x$.
7. a が Y の **上限** であるとは, a が Y の上界の最小元であること.
8. a が Y の **下限** であるとは, a が Y の下界の最大元であること.

問題 24 順序関係の定義を述べよ.

問題 25 順序集合 $(X, \leq)$ を以下のように定義する:

$$X = \{a, b, c, d\}, \quad (7)$$

$$\leq = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (d, d)\}. \quad (8)$$

1. このとき, 順序集合 $(X, \leq)$ のハッセ図を記せ.
2. 集合 X の最大元, 最小元, 極大元, 極小元を示せ.

問題 26 S を空でない集合とする.

1. $(2^S, \subseteq)$ は順序集合になることを証明せよ. ここで, 2^S は 集合 S のべき集合を表し, 記号 $\subseteq$ は集合の包含関係を表すものとする.
2. $S = \{a, b, c\}$ とするとき, 順序集合 $(2^S, \subseteq)$ のハッセ図を示せ.
3. 前問と同様に, $S = \{a, b, c\}$ とし, 順序集合 $(2^S, \subseteq)$ を考える. そして, べき集合 2^S の部分集合として, $U = \{\{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$, $V = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ とする. このとき, 部分集合 U と V に対し, それぞれの 最大元, 最小元, 極大元, 極小元, 上界, 下界, 上限, 下限 を示せ.