

離散数学演習 (論理と数学的帰納法)¹

2007 年 11 月 21 日 (水)

問題 1 (命題と論理記号)

1. 命題とは、真 か 偽 かが明確に定まっている陳述のことをいう。
2. 命題が真 のとき、その命題が成り立つ、あるいは 成立するとともいう。

与えられた命題から新たな命題を作る命題結合記号として、次のような論理記号を定義した。

1. “ $p \vee q$ ” を p と q の論理和という。“ p または q ” という意味を表す。
2. “ $p \wedge q$ ” を p と q の論理積という。“ p かつ q ” という意味を表す。
3. “ $p \Rightarrow q$ ” を “ p は q を含意する” という。“ p ならば q ” という意味を表す。
4. “ $p \Leftrightarrow q$ ” は “ $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Leftarrow q)$ ” と論理的に等しい。
5. “ $p \Leftrightarrow q$ ” が真のとき、 p と q は同値であるという。
6. p と q が同値であることと、 p と q の真理値が一致することは同じである。

したがって、 $p \Leftrightarrow q$ が真のとき、“ $p \Leftrightarrow q$ ” を “ $p = q$ ” と書く。

次の真理値表の空欄を埋め、完成せよ。ここで、 p, q は命題を表すとする。さらに、 T は真を表し、 F は偽を表すとする。

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Leftarrow q)$	$p \Leftrightarrow q$
T	T						
T	F						
F	T						
F	F						

(1)

注意 1 p, q を命題とする。上記の真理値表より、

1. 命題 $p \Rightarrow q$ が真であること、すなわち、“ $(p \Rightarrow q) = T$ ”であることを示すには、“ $(p = T) \Rightarrow (q = T)$ が成り立つこと”を示せばよい。
2. 命題 $p \Leftarrow q$ が真であること、すなわち、“ $(p \Leftarrow q) = T$ ”であることを示すには、“ $((p \Rightarrow q) = T) \wedge ((p \Leftarrow q) = T)$ が成り立つこと”を示せばよい。
3. 等号記号 $p = q$ の定義より、“ $p = q$ が成り立つこと”は、“ p と q の真理値が一致すること”と同じである。したがって、“ $p = q$ が成り立つこと”を示すには、“ p と q の真理値が一致すること”を示せばよい。
4. 同様に、等号記号 $p = q$ の定義より、“ $p = q$ が成り立つこと”は、“ p と q が同値であること”と同じである。すなわち、“ $p = q$ が成り立つこと”は、“ $(p \Leftrightarrow q) = T$ が成り立つこと”と同じである。したがって、“ $p = q$ が成り立つこと”を示すには、“ $(p \Leftrightarrow q) = T$ が成り立つこと”を示せばよい。

¹法政大学情報科学部コンピュータ科学科, デジタルメディア学科, 2007 年度秋「離散数学」

栗原正純, 電気通信大学情報通信工学科, kuri@ice.uec.ac.jp

(2007/11/19/9:38)

(46:/usr/home/kuri/doc/tex/dismath/)

問題 2 (恒真命題と論法)

1. 常に真である命題を恒真命題という.
2. 論法とは, 前提とよばれる命題 $P_1, \dots, P_n$ から結論とよばれる命題 Q が導かれるという主張であり, $P_1, \dots, P_n \vdash Q$ と表される.
3. 論法 $P_1, \dots, P_n \vdash Q$ が妥当であるとは, $(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \Rightarrow Q$ が恒真命題であることをいう.
4. 対偶による証明を論法として記述すると, $(\neg q \Rightarrow \neg p) \vdash (p \Rightarrow q)$ と書き表すことができる.
5. 背理法による証明を論法として記述すると, $((p \wedge \neg q) \Rightarrow F) \vdash (p \Rightarrow q)$ と書き表すことができる.

次の命題 1, 2 が成り立つことをそれぞれの真理値表を作成し, 示せ. ここで, p, q は命題を表すとする. さらに, T は真を表し, F は偽を表すとする.

1. $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

ここで, $A = (\neg q \Rightarrow \neg p)$, $B = (p \Rightarrow q)$ とする.

p	q	$\neg q$	$\neg p$	A $\neg q \Rightarrow \neg p$	B $p \Rightarrow q$	$A \Leftrightarrow B$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

(2)

2. $((p \wedge \neg q) \Rightarrow F) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

ここで, $A = ((p \wedge \neg q) \Rightarrow F)$, $B = (p \Rightarrow q)$ とする.

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	A $(p \wedge \neg q) \Rightarrow F$	B $p \Rightarrow q$	$A \Leftrightarrow B$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

(3)

問題 3

任意の命題 p, q, r に対し, 次の分配律が成り立つことを示せ.

$$(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

問題 4

2007/11/07 のレポート問題の 1 :

「配布プリント p.14 の 定理 2.5 (ド・モルガンの法則) の 2 の証明.」

任意の命題 p, q に対し, 次の ド・モルガンの法則が成り立つことを示せ.

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

問題 5 (主論理和標準形 と 主論理積標準形)(例 2.17 を参照)

2007/11/07 のレポート問題の 2 :

「配布プリント p.17 の 例 2.19 の 1.
論理関数の 主論理和標準形 と 主論理積標準形 のそれぞれを示せ.
そして, それぞれが正しいことを真理値表を作成し確認せよ. 」

例 2.19 の 1 の問題 :

「3つの命題 p, q, r のうちの2つが T であるとき、かつ、そのときに限り T であるような複合命題を構成せよ.」

1. 上記問題 (例 2.19 の 1 の問題) の題意を表す複合命題を論理関数として $P(p, q, r)$ と表すことにする. このとき, 論理関数 $P(p, q, r)$ の真理値表がどのように表されるか.
その真理値表を記せ.

p	q	r	$P(p, q, r)$
T	T	T	
T	T	F	
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	F	T	
F	F	F	

(4)

2. 前問 1. の真理値表をもとにして, 論理関数 $P(p, q, r)$ の真理集合 $\tilde{P}$ を記せ.

$$\tilde{P} = \quad (5)$$

3. 主論理和標準形に関する定理 2.14 より, 論理関数 $P(p, q, r)$ は次のように主論理和標準形で表すことができる:

$$P(p, q, r) = \bigvee_{(t_1, t_2, t_3) \in \tilde{P}} (p^{t_1} \wedge q^{t_2} \wedge r^{t_3}) \quad (6)$$

上式の右辺が論理関数 $P(p, q, r)$ の主論理和標準形である. ただし, p^t は, 論理変数 (命題) p と $\{T, F\}$ のどちらかの要素をとる t により,

$$p^t := \begin{cases} p, & t = T \text{ のとき;} \\ \neg p, & t = F \text{ のとき} \end{cases} \quad (7)$$

と定義されたものである. 同様に, q^t や r^t はそれぞれ論理変数 q と r に対応したものである. それでは, 具体的に, 論理関数 $P(p, q, r)$ の主論理和標準形を記せ.

$$P(p, q, r) = \quad (8)$$

4. 前問 3. で得た論理関数 $P(p, q, r)$ の主論理和標準形の真理値が $P(p, q, r)$ の真理値と一致することを, 真理値表を作成して確認せよ.

p	q	r				
T	T	T				
T	T	F				
T	F	T				
T	F	F				
F	T	T				
F	T	F				
F	F	T				
F	F	F				

(9)

5. 前問 1. の真理値表をもとにして, 論理関数 $P(p, q, r)$ の真理集合 $\tilde{P}$ の補集合 $\overline{P}$ を記せ.

$$\overline{P} = \quad (10)$$

6. 主論理積標準形に関する定理 2.16 より, 論理関数 $P(p, q, r)$ は次のように主論理積標準形で表すことができる:

$$P(p, q, r) = \bigwedge_{(t_1, t_2, t_3) \in \overline{P}} (p^{\neg t_1} \vee q^{\neg t_2} \vee r^{\neg t_3}) \quad (11)$$

上式の右辺が論理関数 $P(p, q, r)$ の主論理積標準形である. ただし, $p^{\neg t}$ は p^t の定義より,

$$p^{\neg t} = \begin{cases} \neg p, & t = F \text{ のとき;} \\ p, & t = F \text{ のとき} \end{cases} \quad (12)$$

同様に, $q^{\neg t}$ や $r^{\neg t}$ はそれぞれ論理変数 q と r に対応したものである.

それでは, 具体的に, 論理関数 $P(p, q, r)$ の主論理積標準形を記せ.

$$P(p, q, r) = \quad (13)$$

7. 前問 6. で得た論理関数 $P(p, q, r)$ の主論理積標準形の真理値が $P(p, q, r)$ の真理値と一致することを, 真理値表を作成して確認せよ.

p	q	r						
T	T	T						
T	T	F						
T	F	T						
T	F	F						
F	T	T						
F	T	F						
F	F	T						
F	F	F						

(14)

問題 6 (限定記号)

次の命題の真偽を判定せよ. 真ならば T , 偽ならば F を用いて記せ. ただし, $\mathbf{R}$ は実数全体の集合を表す.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : x = y$

2. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R} : x = y$

3. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R} : x = y$

4. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : x = y$

(解答欄)

1	
2	
3	
4	

問題 7 (限定記号)

(2007/11/07 のレポート問題の 3 :

「配布プリント p.20 の 例 2.38

真偽を判定し, その判定理由を述べよ.」

次の命題の真偽を判定せよ. 真ならば T , 偽ならば F を用いて記せ. ただし, $\mathbf{N}$ は自然数全体の集合を表し, $\mathbf{R}$ は実数全体の集合を表す.

1. $\forall x \in \mathbf{N}, \exists y \in \mathbf{N} : y = x^2$

2. $\forall y \in \mathbf{N}, \exists x \in \mathbf{N} : y = x^2$

3. $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{N} : y = x^2$

4. $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R} : y = x^2$

5. $\forall y \in \mathbf{N}, \exists x \in \mathbf{R} : y = x^2$

(解答欄)

1	
2	
3	
4	
5	

問題 8 数列 $a_1, a_2, \dots$ を次のように定義する.

- i. $a_1 = 1,$
- ii. $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + 1 \ (n \geq 2)$

このとき, 任意の自然数 n に対し, $a_n = 2^{n-1}$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ.

問題 9 次の再帰式で定義される数列を フィボナッチ数列 という.

- i. $a_0 = 0, a_1 = 1,$
- ii. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ (n \geq 2)$

この再帰式に対し, 多項式 $X^2 - X - 1$ を, その特性多項式という. この多項式の 2 根を α, β ($\alpha > \beta$) とすると, フィボナッチ数列の第 n 項は $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ と表されることを数学的帰納法を用いて証明せよ. ここで, 次の事実を利用しても構わない: $X^2 - X - 1$ の根である α, β について, $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$ が成り立つ. さらに, 2 次方程式の解の公式より, $X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.