

離散数学演習 (集合と写像)¹

2007 年 10 月 24 日 (水)

問題 1 空集合 ϕ の定義を述べよ。

問題 2 X, Y を集合とする。そして、 X は Y の部分集合、すなわち、 $X \subseteq Y$ とする。この例を元に、部分集合の定義を述べよ。

問題 3 X, Y を集合とする。 X と Y は等しい、すなわち、 $X = Y$ とする。この例を元に、集合が等しいことの定義を述べよ。

問題 4 次のことが正しいかどうかを判定し、その理由を述べよ。

1. $\phi \subseteq \phi$
2. $\phi \in \phi$
3. $\phi \subseteq \{\phi\}$
4. $\phi \in \{\phi\}$
5. $\{\phi\} \subseteq \{\phi\}$
6. $\{\phi\} \in \{\phi\}$

ただし、次の i, ii を既知として利用しても構わない。

- i.* 任意の集合 X に対し、 $X \subseteq X$ が成り立つ。
- ii.* 任意の集合 X に対し、 $\phi \subseteq X$ が成り立つ。

問題 5 U を全体集合とし、 X, Y を U の部分集合、すなわち、 $X \subseteq U, Y \subseteq U$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

1. 和集合 $X \cup Y$ の定義を述べよ。
2. 積集合 (共通集合) $X \cap Y$ の定義を述べよ。
3. U に関する X の補集合 X^c の定義を述べよ。
4. X と Y の差集合 $X - Y$ の定義を述べよ。

問題 6 $U = \{1, 2, \dots, 9\}$, $X = \{2, 3, 7, 8\}$, $Y = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ とするとき、 $X \cup Y$, $X \cap Y$, X^c , Y^c , $X - Y$, $Y - X$ をそれぞれ外延的記法で表せ。

問題 7 X, Y, Z を集合とする。このとき、次の分配律が成り立つことを示せ:

$$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z).$$

問題 8 問題 6 と同様に、 $U = \{1, 2, \dots, 9\}$, $X = \{2, 3, 7, 8\}$, $Y = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ とする。このとき、次の集合を外延的記法で表せ。ここで、問題 6 の結果を利用しても構わない。

1. $(X \cup Y)^c$
2. $X^c \cap Y^c$
3. $(X \cap Y)^c$
4. $X^c \cup Y^c$

問題 9 X, Y を集合とする。このとき、次のド・モルガンの法則が成り立つことを示せ:

$$(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c.$$

問題 10 X, Y, Z を集合とする。このとき、次式が成り立つことを示せ:

$$(X - Y) - Z = X - (Y \cup Z).$$

¹法政大学情報科学部コンピュータ科学科, デジタルメディア学科, 2007 年度秋「離散数学」

栗原正純, 電気通信大学情報通信工学科, kuri@ice.uec.ac.jp

(2007/10/22/13:10)

(46:/usr/home/kuri/doc/tex/dismath/)

問題 11 集合 X, Y を $X = \{2, 3, 1\}$, $Y = \{a, b\}$ とする。このとき、 X と Y の直積集合 $X \times Y$ を外延的記法で表せ。さらに、 $X \times Y$ の要素数 $|X \times Y|$ を述べよ。

問題 12 X を集合とする。このとき、以下の問に答えよ。

1. X のべき集合 2^X の定義を述べよ。
2. $X = \{a, b, c\}$ とするとき、 2^X を外延的記法で表せ。さらに、 2^X の要素数 $|2^X|$ を述べよ。
3. 一般に、有限集合 X に対し、 X のべき集合 2^X の要素数 $|2^X|$ はどのように書けるか。それを述べよ。

問題 13 以下の問いに答えよ。

1. $2^{\{\phi\}}$ を外延的記法で表せ。さらに、 $2^{\{\phi\}}$ の要素数 $|2^{\{\phi\}}|$ を述べよ。
2. $2^{2^{\{\phi\}}}$ を外延的記法で表せ。さらに、 $2^{2^{\{\phi\}}}$ の要素数 $|2^{2^{\{\phi\}}}|$ を述べよ。

問題 14 有限集合 X, Y, Z に対し、以下の等式が成り立つことを示せ。

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$

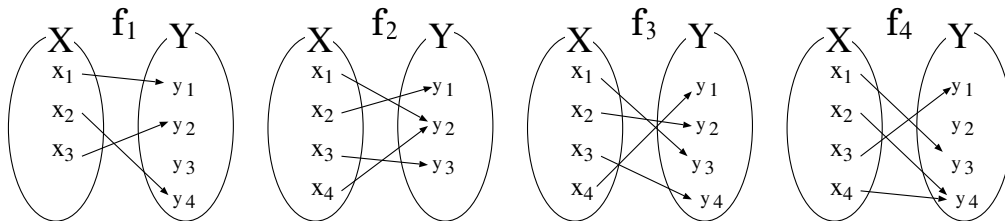
ただし、次の i, ii を既知として利用しても構わない:

- $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$
- $(X \cap Z) \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap Z$

問題 15 X, Y を空でない集合とし、 f を X から Y への写像 $f: X \rightarrow Y$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

1. 写像 f が単射であることの定義を述べよ。
2. 写像 f が全射であることの定義を述べよ。
3. 写像 f が全単射であることの定義を述べよ。

問題 16 4 つの写像 $f_i: X \rightarrow Y$, $i = 1, 2, 3, 4$ をそれぞれ以下の図のように定義する。このとき、以下の問いに答えよ。



1. 4 つの写像 f_1, f_2, f_3, f_4 の中で単射であるものをすべて述べよ。
2. 4 つの写像 f_1, f_2, f_3, f_4 の中で全射であるものをすべて述べよ。
3. 4 つの写像 f_1, f_2, f_3, f_4 の中で全単射であるものをすべて述べよ。

問題 17 X, Y を空でない集合とし、 f を X から Y への写像 $f: X \longrightarrow Y$ とする。このとき、象と原像は次のように定義される。

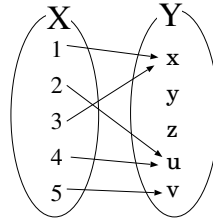
1. X の部分集合 A に対し、 A の f による像 $f(A)$ とは、

$$f(A) := \{f(x) \in Y \mid x \in A\}.$$

2. Y の部分集合 B に対し、 B の f による原像 (あるいは逆像) $f^{-1}(B)$ とは、

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

いま、集合 X, Y をそれぞれ $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{x, y, z, u, v\}$ とする。そして、写像 $f: X \longrightarrow Y$ を次の図のように定義する。このとき、以下の問いに答えよ。



1. $f(\{2, 3, 4\})$ を外延的記法で表せ。
2. $f(\{1, 2, 5\})$ を外延的記法で表せ。
3. $f^{-1}(\{x, y, v\})$ を外延的記法で表せ。
4. $f^{-1}(\{z, u\})$ を外延的記法で表せ。

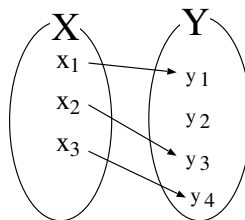
問題 18 X, Y を空でない集合とし、 f を X から Y への写像 $f: X \longrightarrow Y$ とする。 X の部分集合 A に対し、以下のことを示せ。

1. $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ が成り立つことを示せ。
2. 写像 f が単射ならば $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ が成り立つことを示せ。

問題 19 X, Y を空でない集合とし、 f を X から Y への写像 $f: X \longrightarrow Y$ とする。 Y の部分集合 B に対し、以下の問いに答えよ。

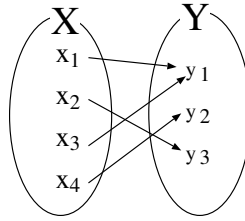
1. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ が成り立つことを示せ。
2. 写像 f が全射ならば $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$ が成り立つことを示せ。

問題 20 集合 X, Y を $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ とし、写像 $f: X \longrightarrow Y$ を次の図のように定義する。このとき、集合 A, B をそれぞれ $A = \{x_1, x_2\} (\subseteq X)$, $B = \{y_1, y_2\} (\subseteq Y)$ とする。以下の問いに答えよ。



1. $f(A)$ を外延的記法で表せ。
2. $f^{-1}(f(A))$ を外延的記法で表せ。
3. $f^{-1}(B)$ を外延的記法で表せ。
4. $f(f^{-1}(B))$ を外延的記法で表せ。

問題 21 集合 X, Y を $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ とし、写像 $f: X \rightarrow Y$ を次の図のように定義する。このとき、集合 A, B をそれぞれ $A = \{x_1, x_2\} (\subseteq X)$, $B = \{y_1, y_2\} (\subseteq Y)$ とする。以下の問いに答えよ。



1. $f(A)$ を外延的記法で表せ。
2. $f^{-1}(f(A))$ を外延的記法で表せ。
3. $f^{-1}(B)$ を外延的記法で表せ。
4. $f(f^{-1}(B))$ を外延的記法で表せ。

問題 22 X, Y, Z を空でない集合とする。 f, g をそれぞれ写像 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ とする。そして、写像 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ に対し、それらの合成写像 $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ は、 $x \in X$ に対し、 $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ と定義される。このとき、以下の問いに答えよ。

1. 合成写像 $g \circ f$ が単射ならば f は単射であることを示せ。
2. 合成写像 $g \circ f$ が全射ならば g は全射であることを示せ。