離散数学

— カタラン数 —

栗原正純 kuri@ice.uec.ac.jp (2007/11/19/9:50)

カタラン数 C_n　　ベルギー人 *E.C.Catalan (1814-1894)*

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	$\cdots$
1	1	2	5	14	42	132	429	$\cdots$

1. カタラン数C_nは、次のような再帰的な関係をもつ。

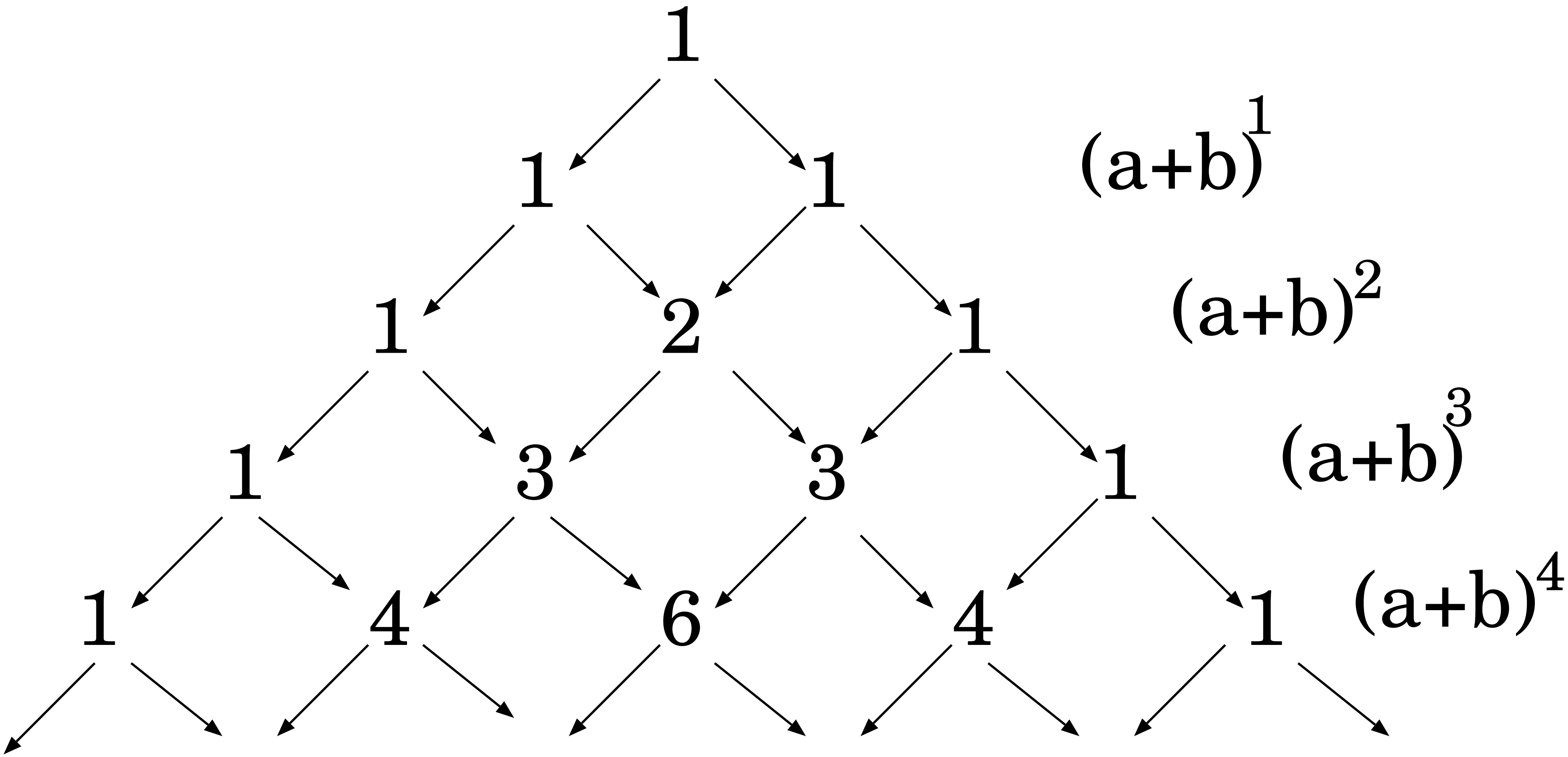
$$\begin{aligned} C_0 &= 1,\ C_1 = 1, \\ C_n &= \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}. \end{aligned}$$

2. カタラン数C_nは, 次のように表される.

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$\binom{n}{k}$ **は** n **個の中から** k **個を選び出す組合せの総数を表す.**

パスカルの三角形　（2 変数多項式の係数 $(a+b)^n$）



$$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 b^0 + 4 \cdot a^3 b^1 + 6 \cdot a^2 b^2 + 4 \cdot a^1 b^3 + 1 \cdot a^0 b^4$$

カタラン数 C_n

$$C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ C_4 = 14,\ C_5 = 42,\ \ldots$$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d] & & & & \\
1 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & & \\
1 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] \arrow[d] & 3 \arrow[r] \arrow[d] & 5 \arrow[r] \arrow[d] & 5 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] \arrow[d] & 4 \arrow[r] \arrow[d] & 9 \arrow[r] \arrow[d] & 14 \arrow[r] \arrow[d] & 14 \arrow[d] \\
{} & {} & {} & {} & {}
\end{tikzcd}$$

順序積($C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ \ldots$)

n 個の数の 順序積 の方法は何通りあるか.

1. 「順序積」とは, いくつかの数の積において, その積の順序を考慮した計算の方法をいう.

ただし, 順序積の条件として, 数の並び順を変えないで考える.

(「順序積」ということばは, 説明の便宜上, ここだけで定義されたことばであり, 一般的なことばではないことに注意する.)

具体的には, 次の通り:

3 個の数 $a,\ b,\ c$ の積 $a \times b \times c$ の順序 (順序積) とは,

$$(a \times b) \times c$$

$$a \times (b \times c)$$

$$(\ C_0 = 1, \ C_1 = 1, \ C_2 = 2, \ C_3 = 5, \ \ldots \ )$$

2. 2 個の数 a, b **に対しては,** $a \times b = (ab)$ **の 1 通り.**

3. 3 個の数 a, b, c **に対し, 以下の 2 通りの順序積がある.**

$$a \times b \times c = ((ab)c) = (a(bc))$$

4. 4 個の数 a, b, c, d **に対し, 以下の 5 通りの順序積がある.**

$$\begin{aligned} a \times b \times c \times d &= (((ab)c)d) \\ &= ((ab)(cd)) \\ &= ((a(bc))d) \\ &= (a((bc)d)) \\ &= (a(b(cd))) \end{aligned}$$

順序積 と 2 進表現

順序積を 0 と 1 で表現してみる.

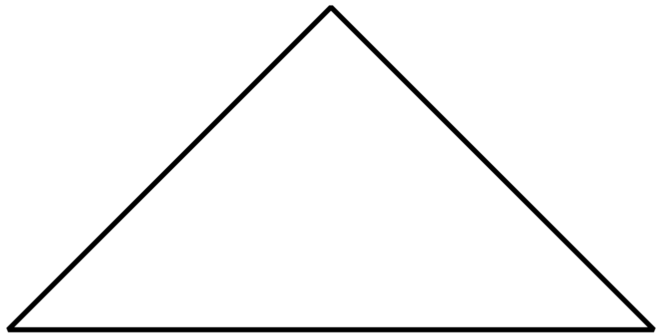
1. 数を 0 で表す.

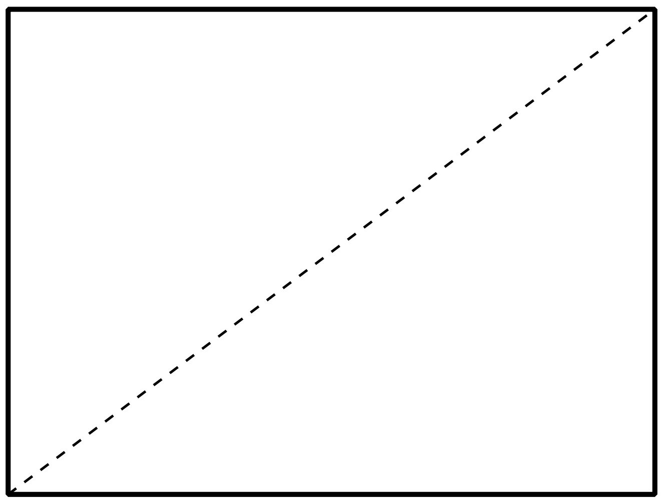
2. 括弧の終り “ $)$” を 1 で表す.

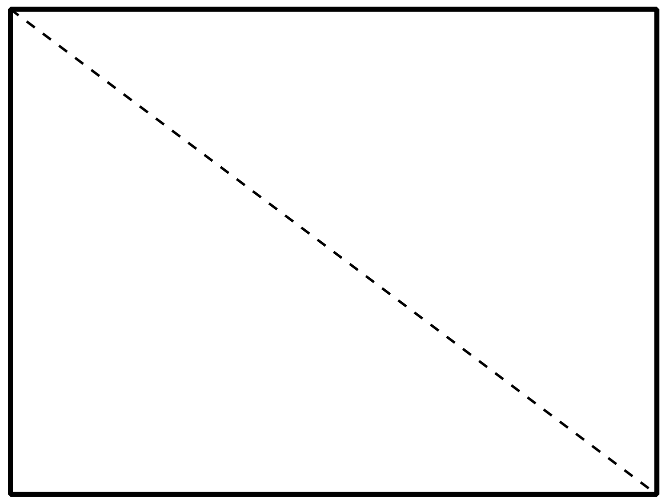
$(((ab)c)d)$	$\longrightarrow$	0010101	$\longrightarrow$	010101
$((ab)(cd))$	$\longrightarrow$	0010011	$\longrightarrow$	010011
$((a(bc))d)$	$\longrightarrow$	0001101	$\longrightarrow$	001101
$(a((bc)d))$	$\longrightarrow$	0001011	$\longrightarrow$	001011
$(a(b(cd)))$	$\longrightarrow$	0000111	$\longrightarrow$	000111

凸多角形の三角形分割($C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ C_4 = 14,\ \ldots$)

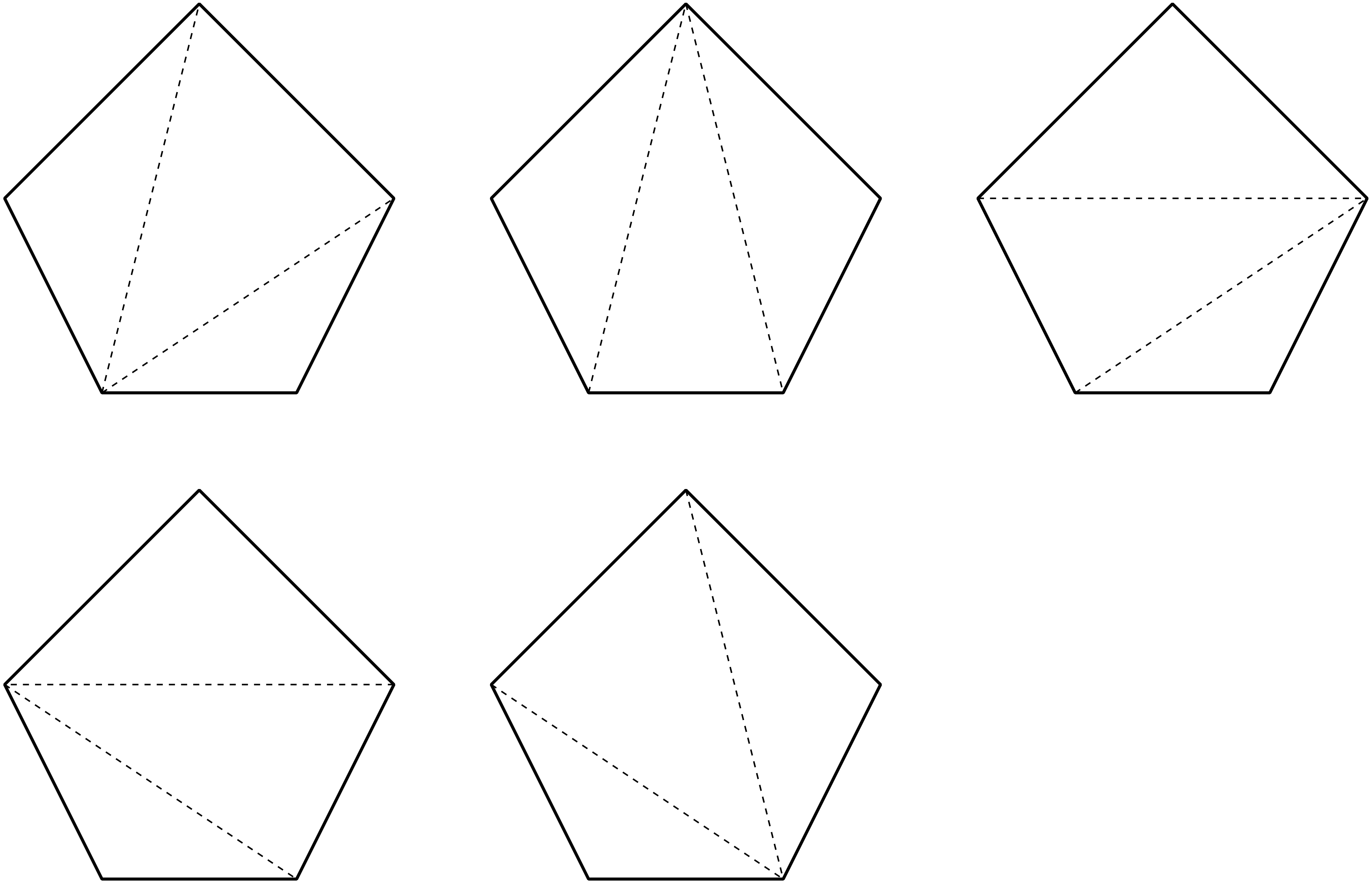
凸 n 角形を交点を持たない対角線で $n-2$ 個の三角形に分割する方法は何通りあるか.



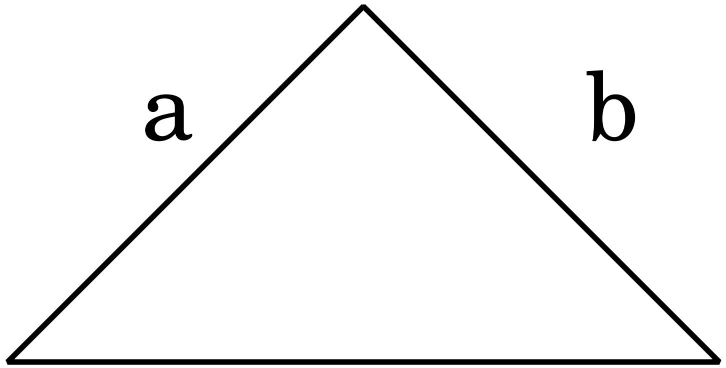




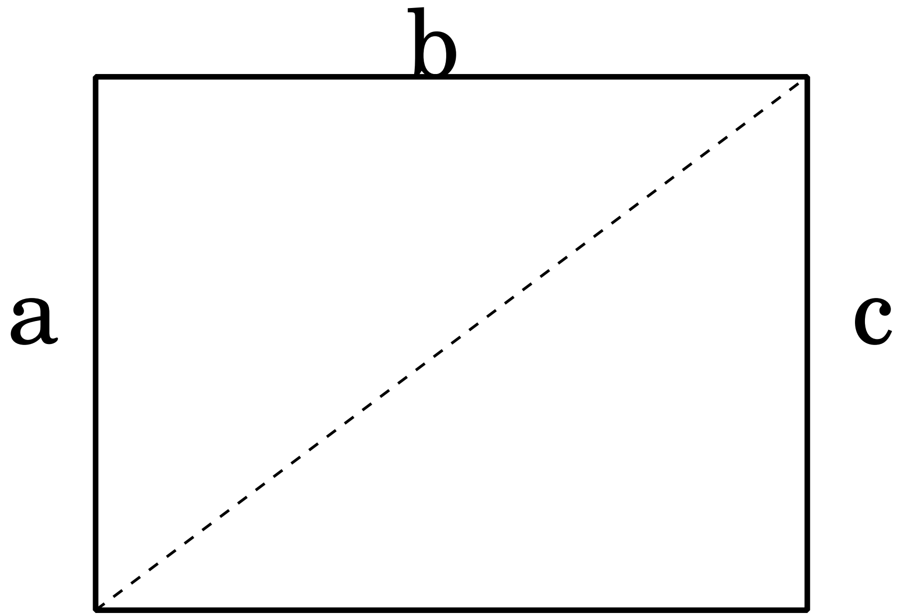
凸多角形の三角形分割($C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ C_4 = 14,\ \ldots$)



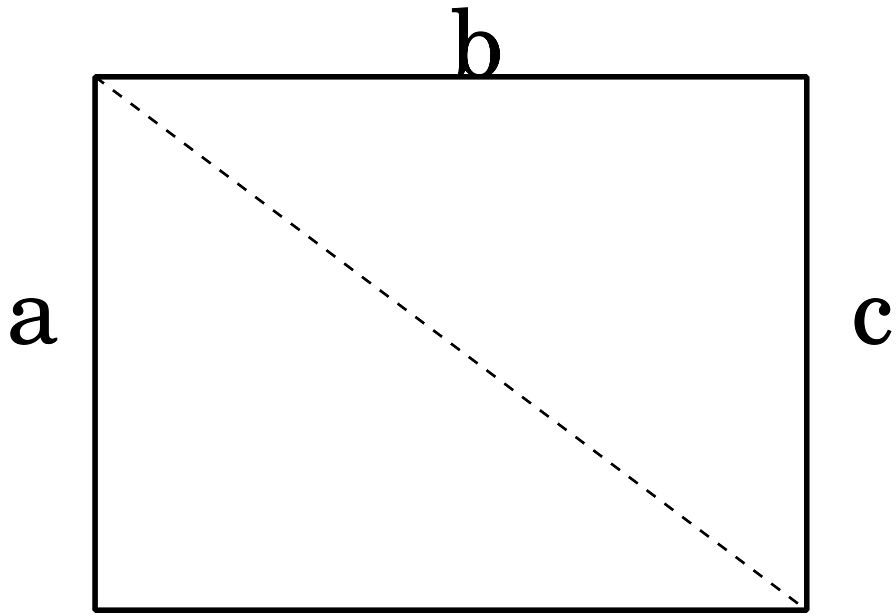
順序積 と 凸多角形の三角形分割($C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ \ldots$)



(ab)

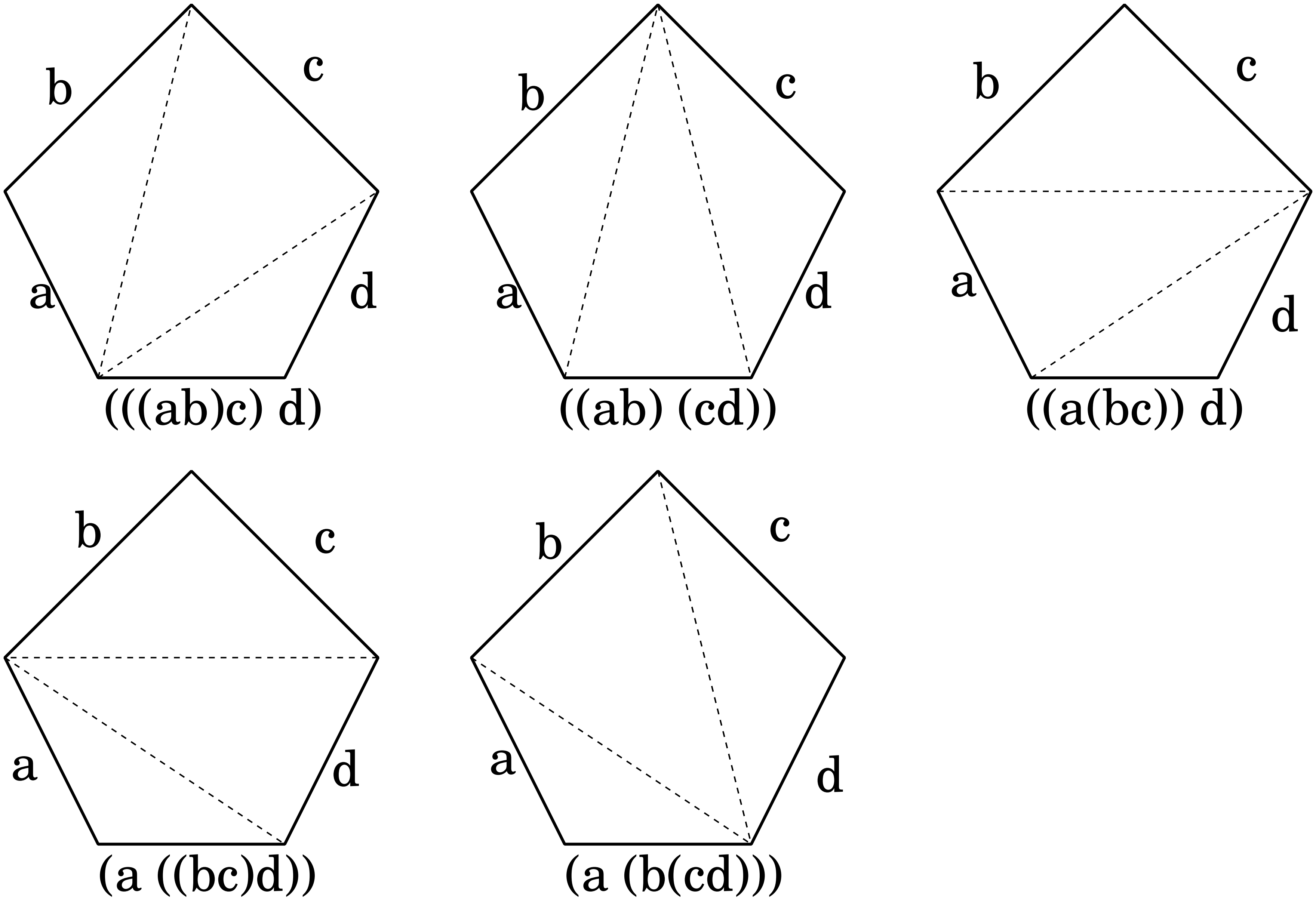


((ab)c)



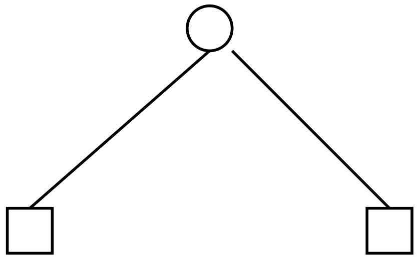
(a(bc))

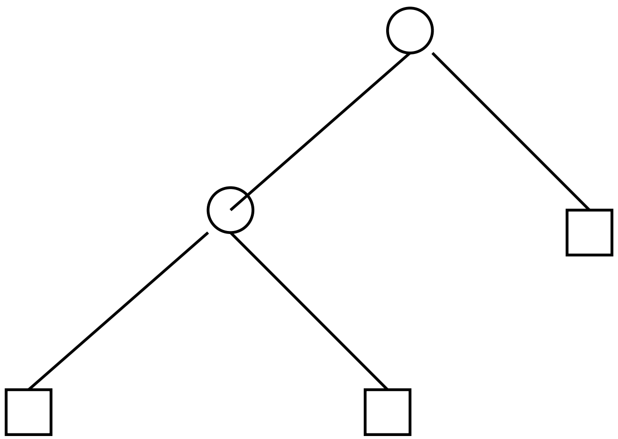
順序積 と 凸多角形の三角形分割($C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ C_4 = 14,\ \ldots$)

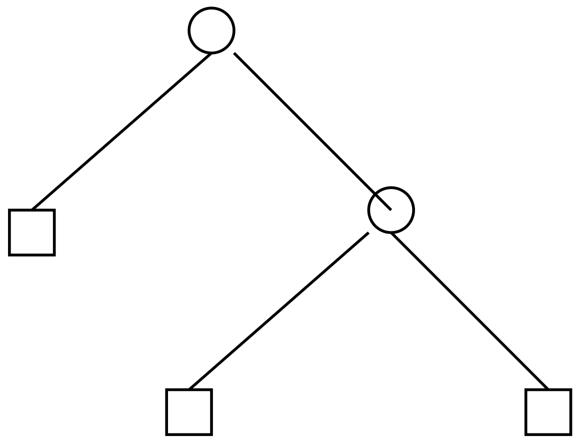


2 分木($C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ C_4 = 14,\ \ldots$)

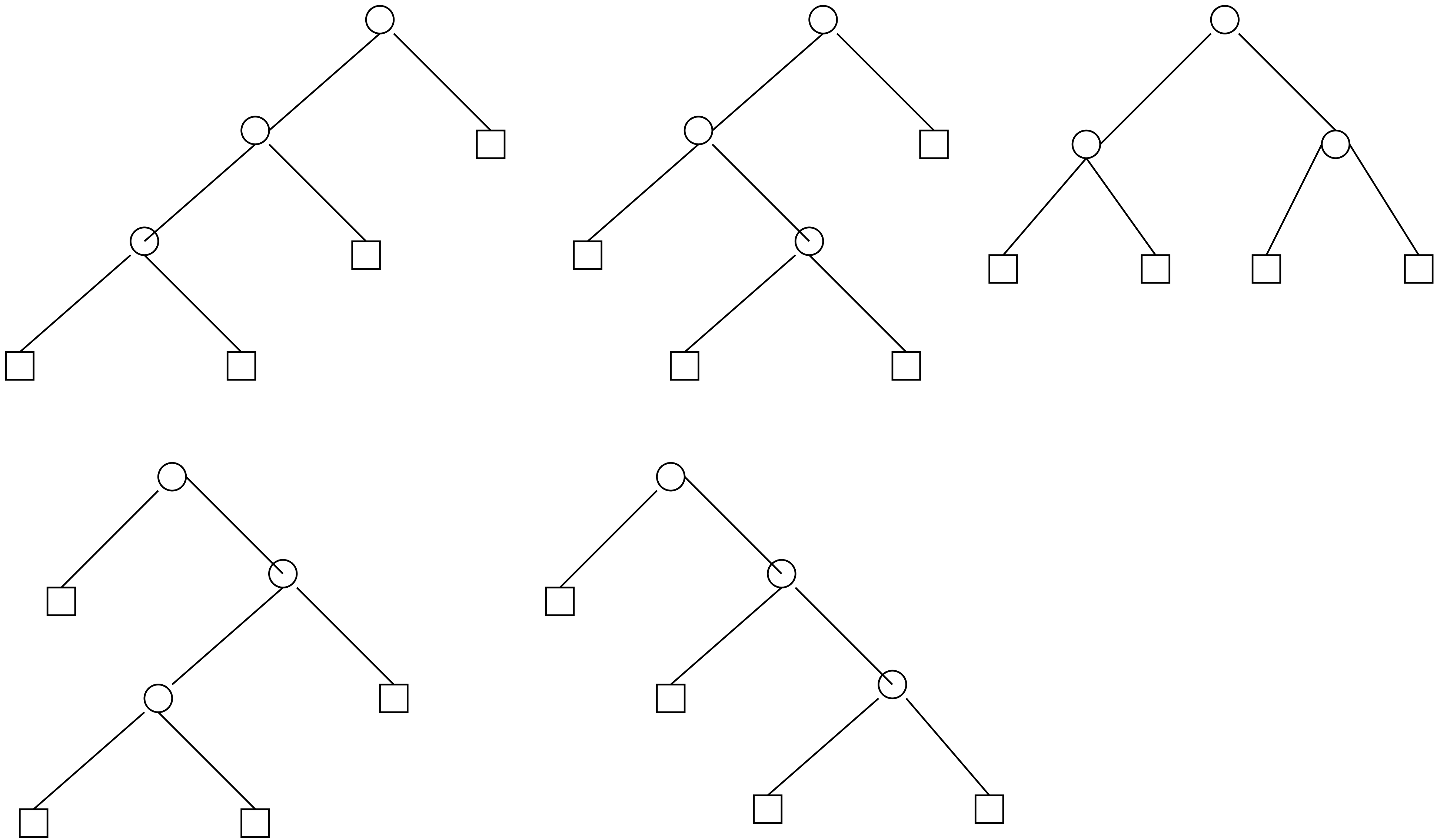
内部ノードが n 個の 2 分木(2 進木)は何通りあるか.



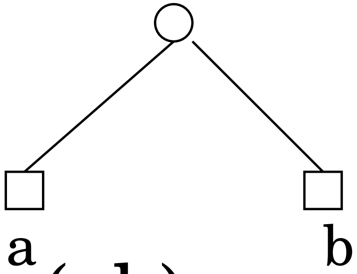




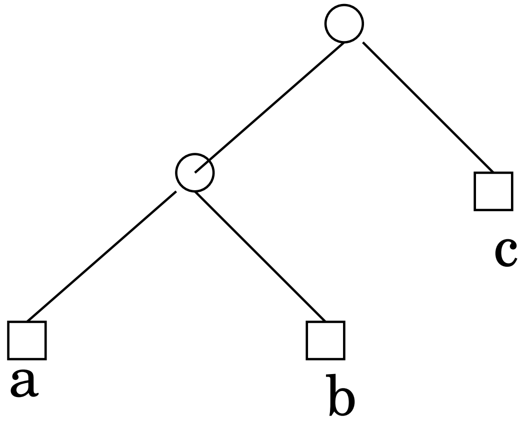
2 分木($C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ C_4 = 14,\ \ldots$)



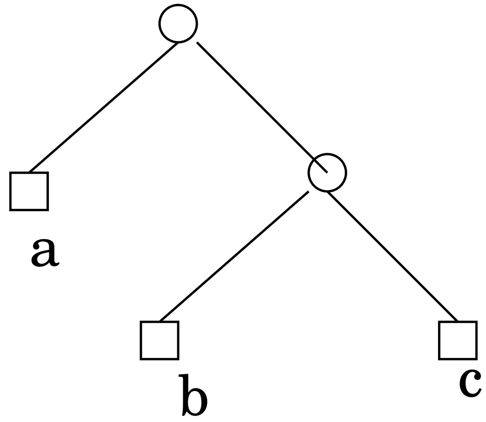
順序積 と 2 分木($C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ C_4 = 14,\ \ldots$)



(ab)

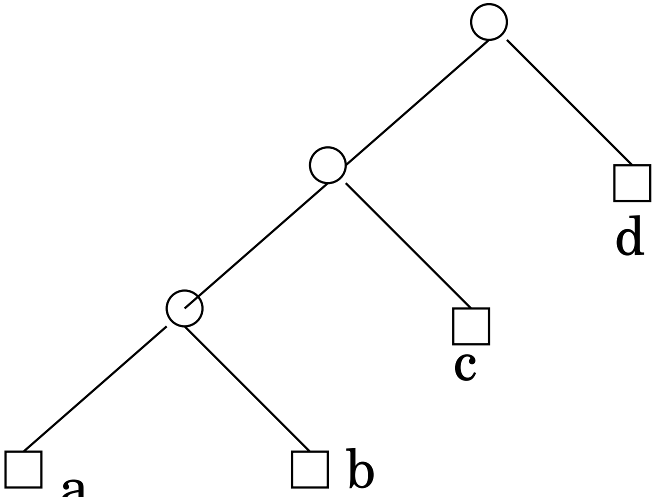


((ab) c)

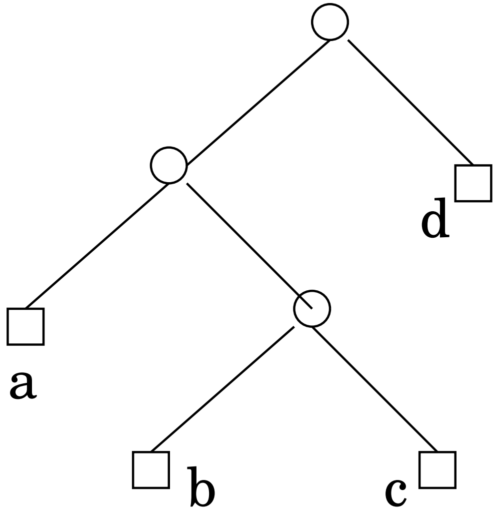


(a (bc))

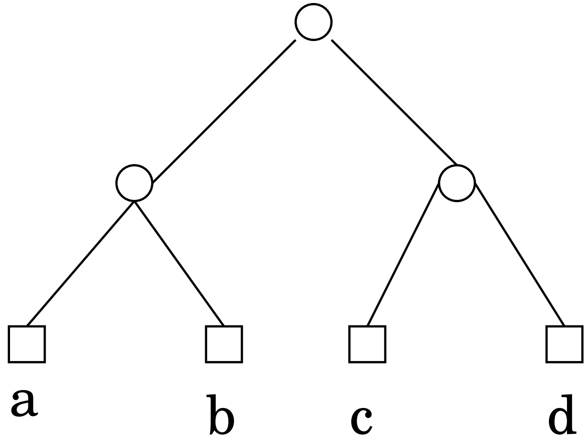
順序積 と 2 分木($C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ C_4 = 14,\ \ldots$)



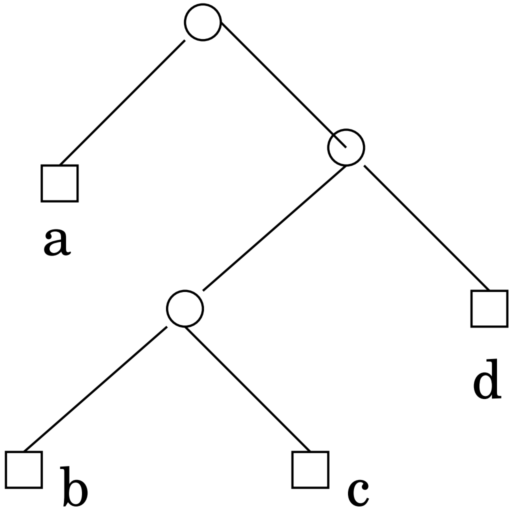
(((ab)c) d)



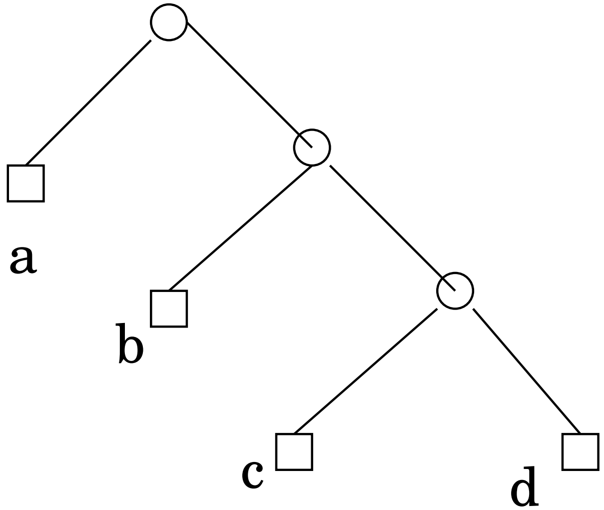
((a(bc)) d))



((ab) (cd))

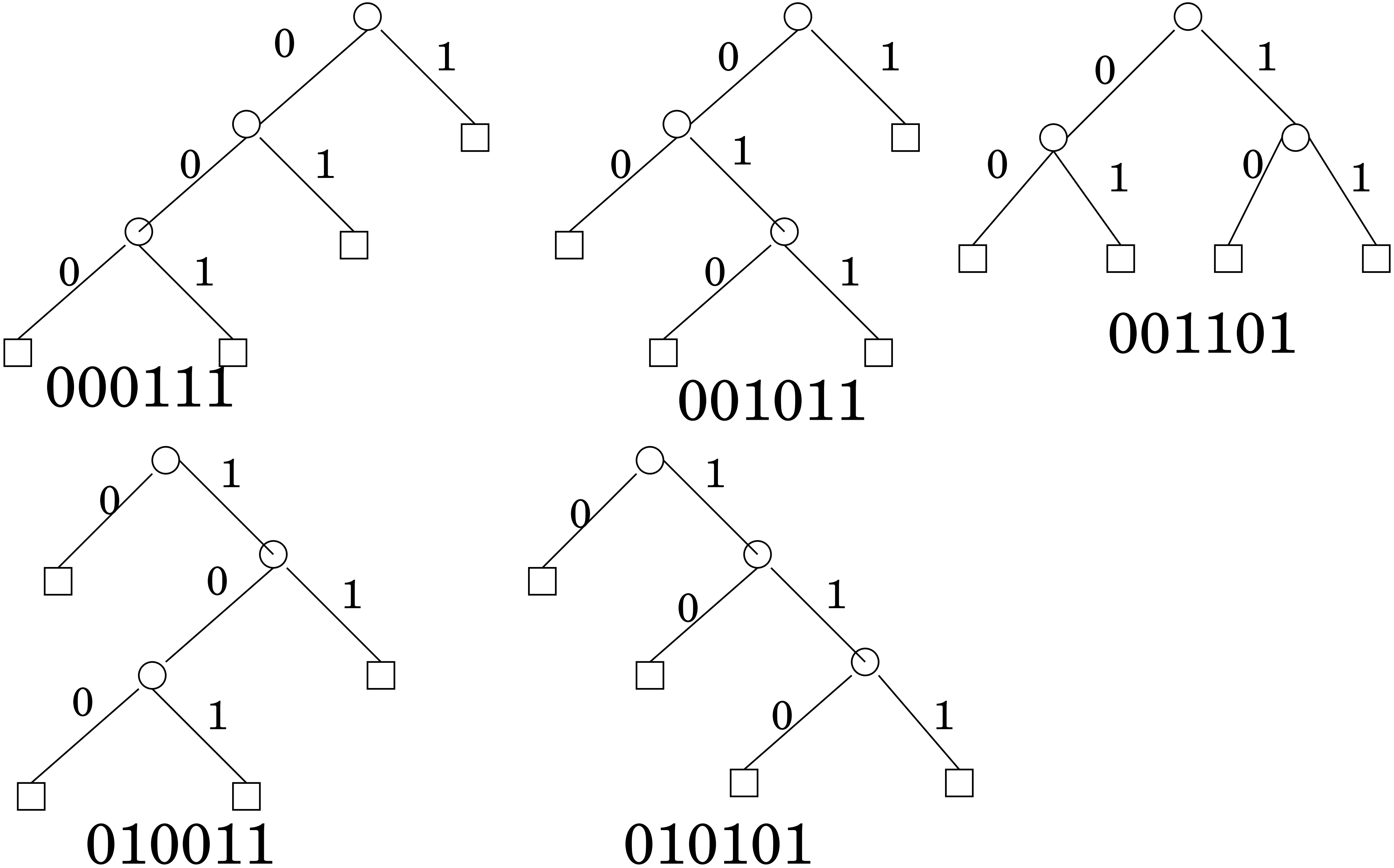


(a ((bc)d))



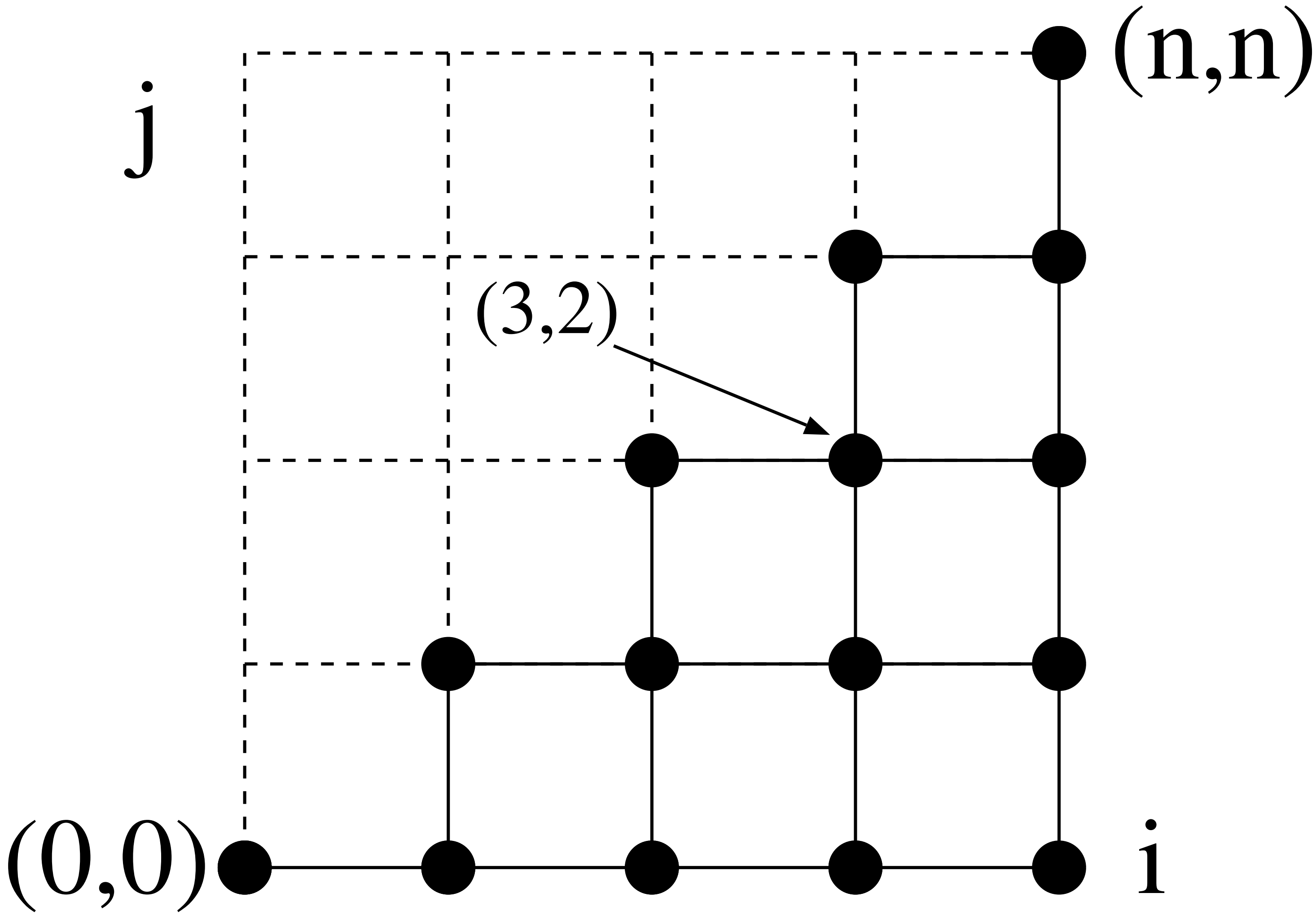
(a(b(cd)))

2 分木 と 2 進表現($C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ C_4 = 14,\ \ldots$)

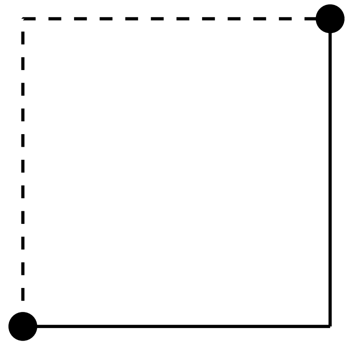


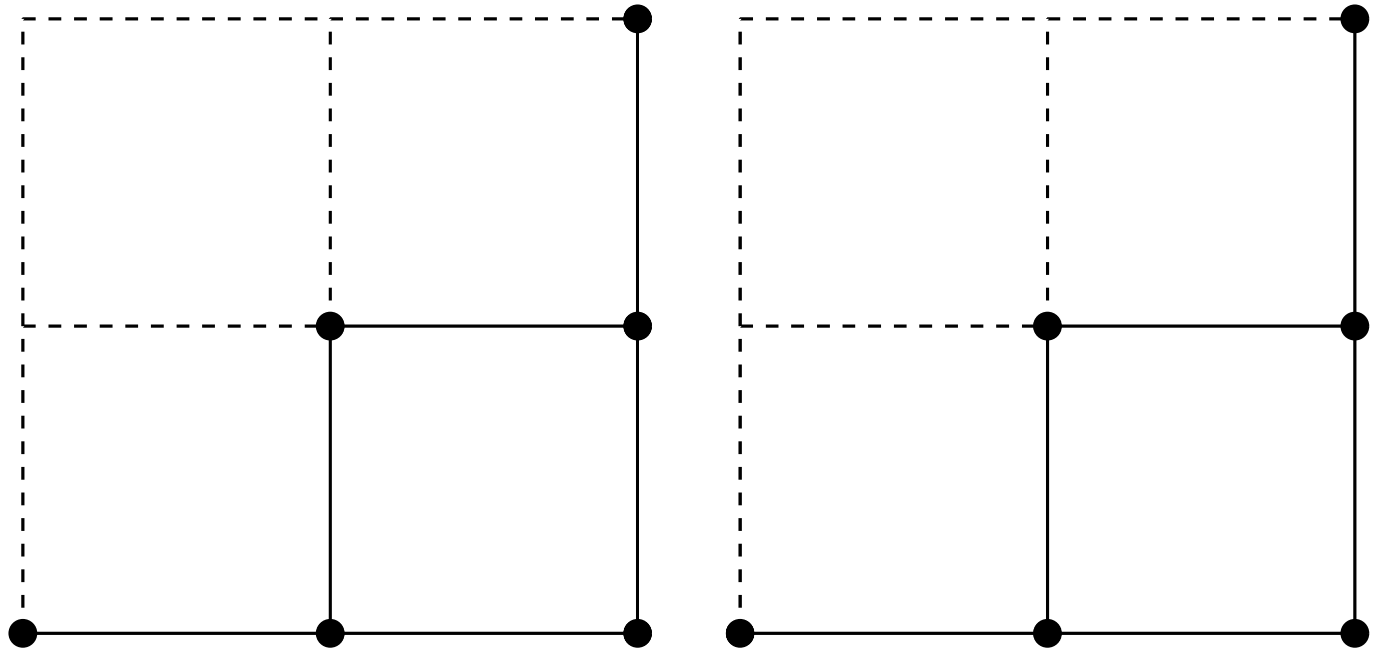
最短経路($C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ C_4 = 14,\ \ldots$)

$n \times n$ の格子状において，実線部分のみを経路とする．このとき，点 $(0,0)$ から点 (n,n) までの最短経路は何通りあるか.

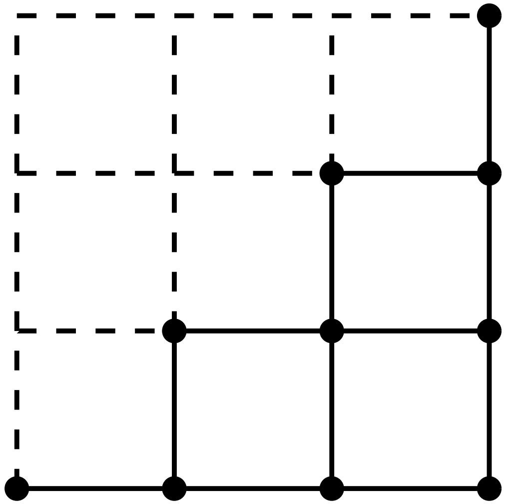


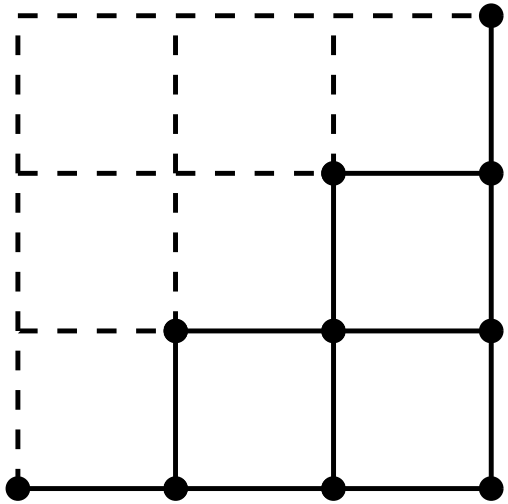
最短経路($C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ C_4 = 14,\ \ldots$)

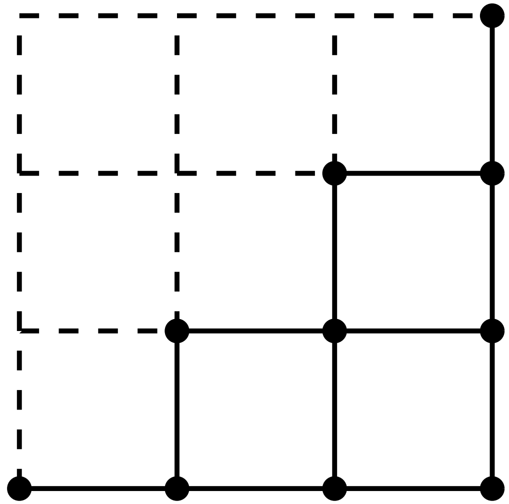


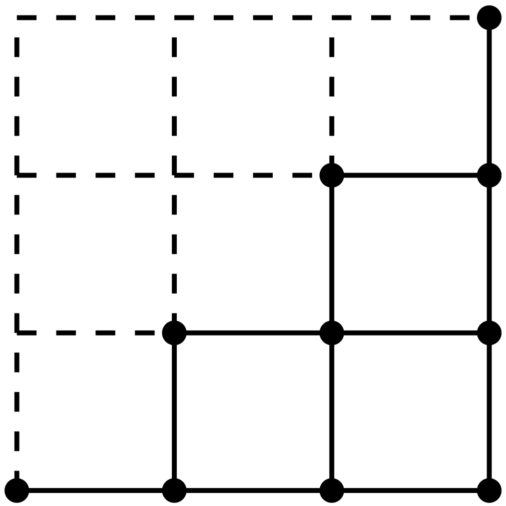


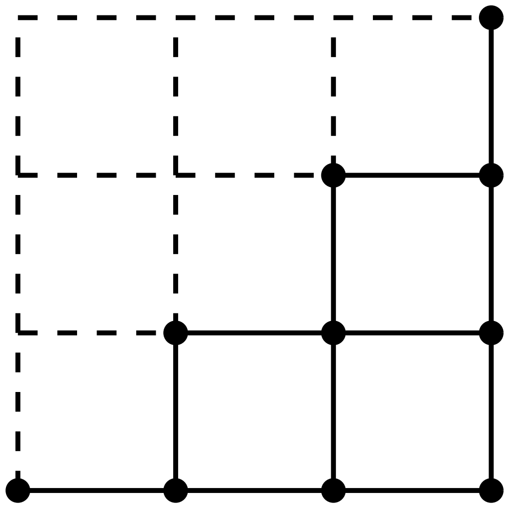
最短経路($C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ C_4 = 14,\ \ldots$)



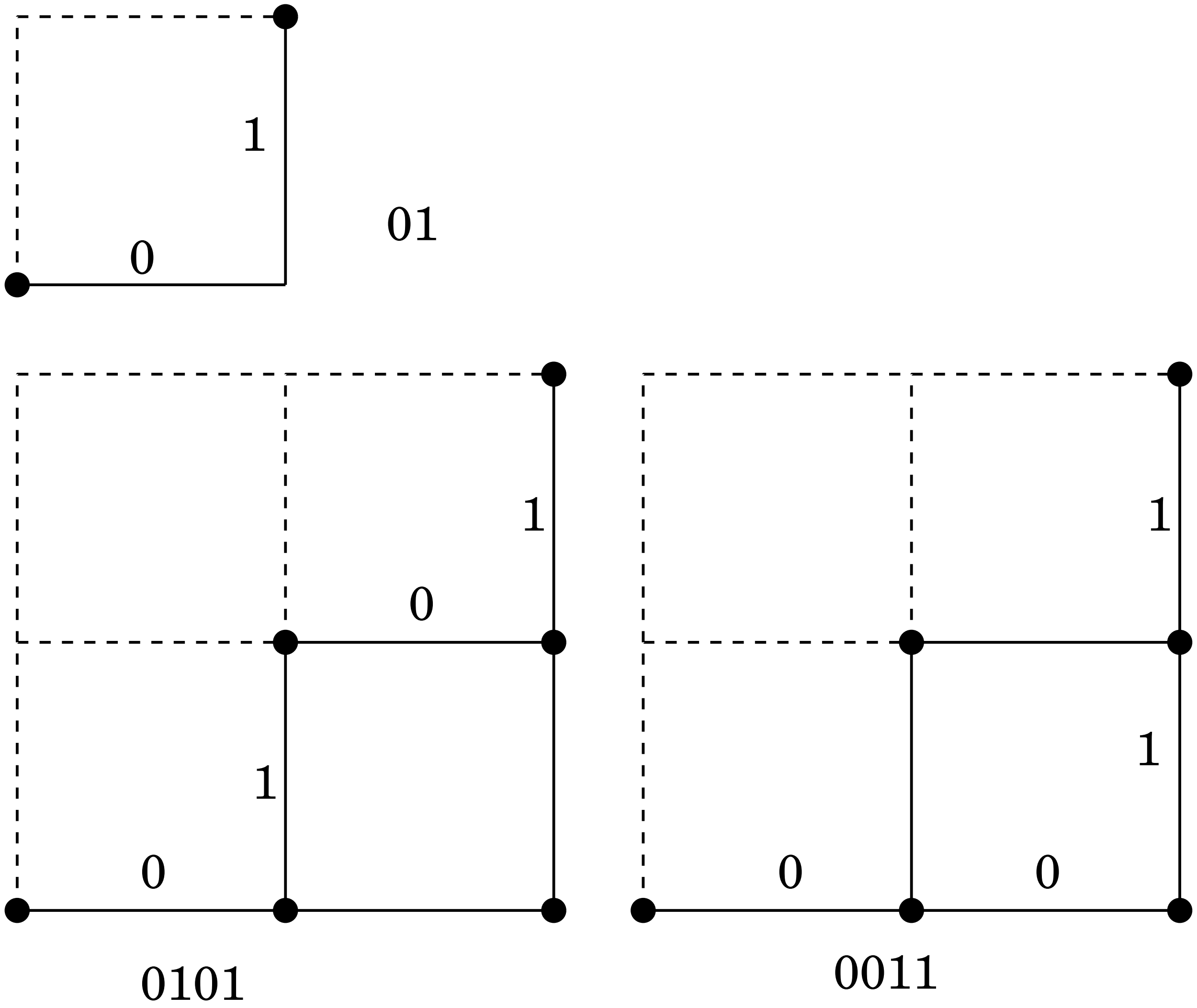




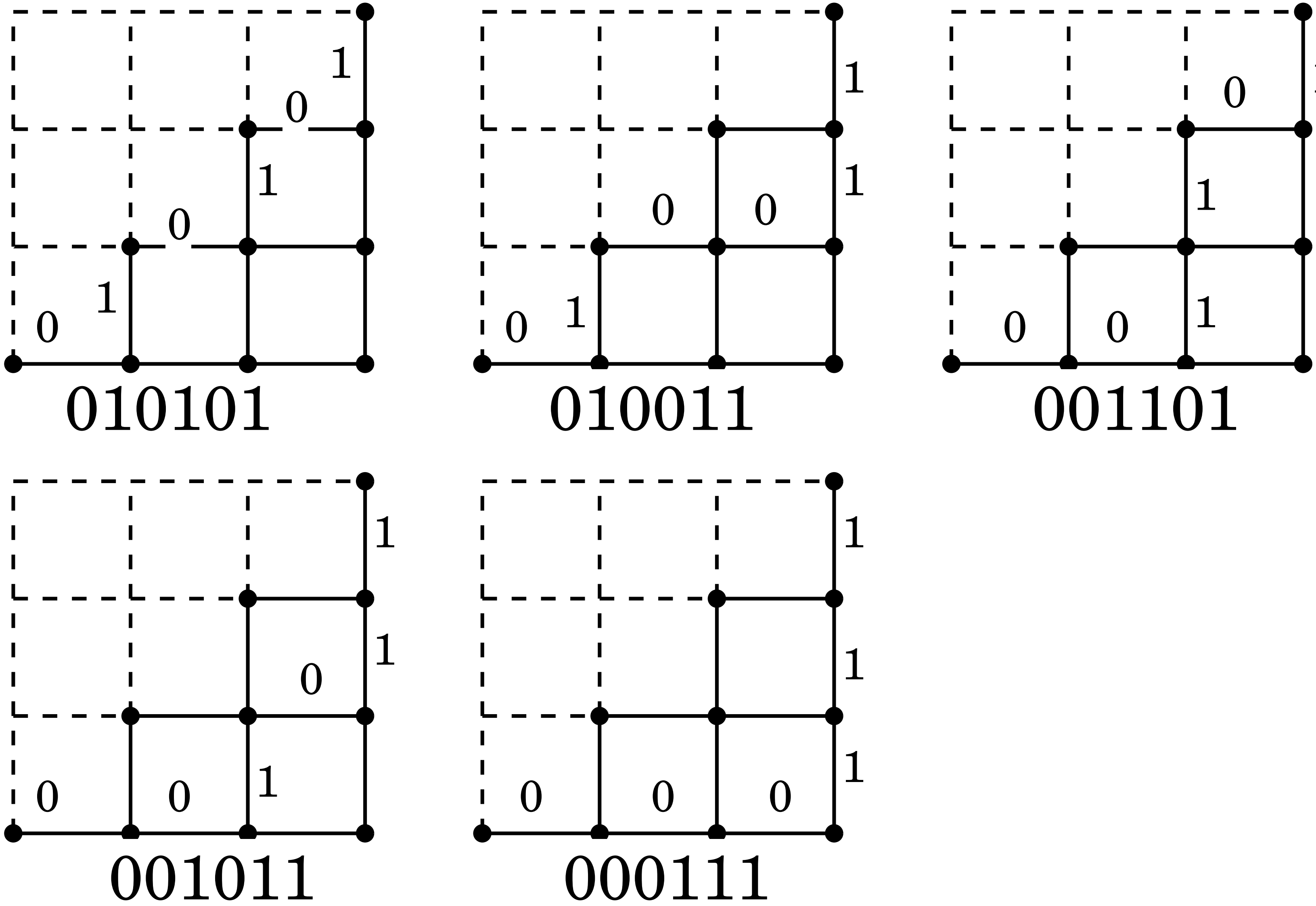




最短経路と 2 進表現



最短経路と *2* 進表現$(\ C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ C_4 = 14,\ \ldots\ )$



カタラン数の応用

$2n$ 人で 会費 500円 の集まりがある．そのとき, n の人は 500円硬化を用意し, 残りの n 人は 千円札しか用意していない．そこで, 幹事の人が $2n$ 人に対し, つり銭が不足しないように順番に集金する方法は何通りあるか.