離散数学

— 4. 関係 —

4.1 2項関係

4.2 同値関係

4.3 順序関係

栗原正純 kuri@ice.uec.ac.jp

(2007/12/3/13:01)

4. 関係

4.1 2項関係

定義 **4. 1.**
集合 X_1, X_2 に対し，直積集合 $X_1 \times X_2$ の部分集合を $X_1 \times X_2$ 上の 2 項関係 という．

定義 **4. 2.**
X, Y を空でない集合とし，R を $X \times Y$ 上の 2 項関係とする．
$(x, y) \in R$ に対し，$(x, y) \in R$ を xRy とも表す．
xRy が成り立つとき，x と y は R の関係がある という．

X, Y が有限集合のとき，$X \times Y$ 上の **2** 項関係は行列で表現できる．
$X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$
に対し，
i) $x_i R y_j$ のとき，かつ，そのときに限り，行列の (i, j) 成分を 1 とし，
ii) それ以外の他の成分を 0 とする．

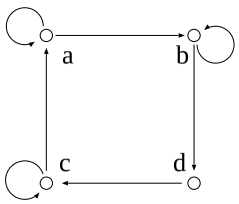
例 **4. 3.** 有限集合 X, Y を，
$X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$
とする．
2項関係
$R = \{(1, b), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (3, c)\} \subseteq X \times Y$
の行列表現:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

定義 **4. 5.**
X を集合とするとき，$X \times X$ 上の **2**項関係を X 上の関係 という．

定義 **4. 6.** (有向グラフ)
X 上の関係 R は，これを 有向グラフ と考えて図示することができる．
X の元を 頂点 といい，$(x_i, y_j) \in R$ のとき，
順序対 (x_i, y_j) を 始点 x_i から 終点 y_j に向かう 有向辺 という．

例 **4. 7.**
集合 $X = \{a, b, c, d\}$,
関係 $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, d), (c, a), (c, c), (d, c)\}$ とする．
R を有向グラフと行列で表現する:



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

定義 **4. 8.** R を集合 X 上の関係とする．

1. $\forall x \in X : xRx$ が成り立つとき，
R は 反射的 であるという．(反射律)

2. $\forall x, y \in X : [(xRy) \Rightarrow (yRx)]$ が成り立つとき，
R は 対称的 であるという．(対称律)

3. $\forall x, y \in X : [((xRy) \wedge (yRx)) \Rightarrow (x = y)]$ が成り立つとき，
R は 反対称的 であるという．(反対称律)

4. $\forall x, y, z \in X : [((xRy) \wedge (yRz)) \Rightarrow (xRz)]$ が成り立つとき，
R は 推移的 であるという．(推移律)

集合 X 上の関係 R とその行列表現と有向グラフの関係 :

1. R が反射的: xRx

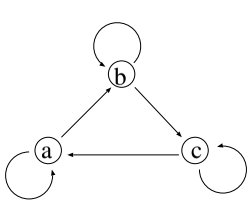
i. 行列 : 対角成分はすべて 1 である．

ii. グラフ : すべての頂点 x_i に対し，
有向辺 (x_i, x_i) がある．(x_i から x_i へ向かう辺がある)

集合 $X = \{a, b, c\}$

関係 $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, a), (c, c)\}$

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



2. R が対称的 : $(xRy) \Rightarrow (yRx)$

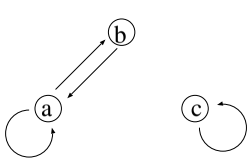
i. 行列 : 対称行列．

ii. グラフ : 有向辺 (x_i, x_j) があれば，有向辺 (x_j, x_i) もある．

集合 $X = \{a, b, c\}$

関係 $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, c)\}$

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



3. R が反対称的 : $((xRy) \wedge (yRx)) \Rightarrow (x = y)$

i. 行列 : $i \neq j$ ならば,

(i, j) 成分と (i, j) 成分が共に 1 になることはない.

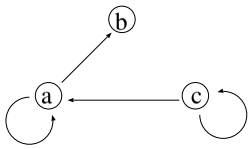
ii. グラフ : $i \neq j$ ならば,

有向辺 (x_i, x_j) と (x_j, x_i) の両方が存在することはない.

集合 $X = \{a, b, c\}$

関係 $R = \{(a, a), (a, b), (c, a), (c, c)\}$

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



4. R が推移的 : $((xRy) \wedge (yRz)) \Rightarrow (xRz)$

i. 行列 : (i, j) 成分と (j, k) 成分が共に 1 ならば,

(i, k) 成分も 1 である.

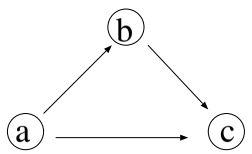
ii. グラフ : 有向辺 (x_i, x_j) と (x_j, x_k) が存在するならば,

(x_i, x_k) が存在する.

集合 $X = \{a, b, c\}$

関係 $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



例 ***4. 9.*** 集合 $X = \{a, b, c, d\}$ 上の関係を以下のように定義する.

$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, c), (d, d)\}$
$S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$
$T = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, c)\}$
$U = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c)\}$

このとき,

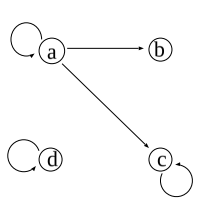
1. 関係 R, S, T, U のそれぞれを行列と有向グラフで表せ.

2. 関係 R, S, T, U が, 反射律, 対称律, 反対称律, 推移律 のそれぞれを満たすかどうかを判定せよ.

1. $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, c), (d, d)\}$

解)

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



関係	反射律	対称律	反対称律	推移律
R	×	×	○	○
	1	2		

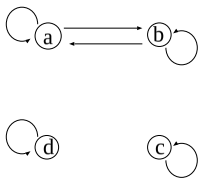
1. (b, b) がない

2. $[aRb \Rightarrow bRa] = F$, $[aRc \Rightarrow cRa] = F$

2. $S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$

解)

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



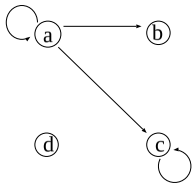
関係	反射律	対称律	反対称律	推移律
S	○	○	×	○
			3	

3. $((aRb) \wedge (bRa)) \Rightarrow a = b$

3. $T = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, c)\}$

解)

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



関係	反射律	対称律	反対称律	推移律
T	×	×	○	○
	4	5		

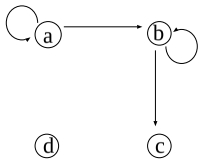
4. $(b, b), (d, d)$ がない

5. ***2*** と同じ ($[aRb \Rightarrow bRa] = F$, $[aRc \Rightarrow cRa] = F$)

4. $U = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c)\}$

解)

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



関係	反射律	対称律	反対称律	推移律
U	×	×	○	×
	6	7		8

6. $(c, c), (d, d)$ がない

7. $[aRb \Rightarrow bRa] = F$, $[bRc \Rightarrow cRb] = F$,

8. $[((aRb) \wedge (bRc)) \Rightarrow aRc] = F$

4.2 同値関係

定義 ***4. 11.***
反射律, 対称律, 推移律 の ***3*** つを満たす関係を 同値関係 という.

例 *4. 12.* 以下の関係 $R_{(n)}$ が $\mathbf{Z}$ 上の同値関係になることを証明せよ．

1. n を任意に固定した整数とするとき，

$$R_{(n)} := \{(x,y) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \mid x-y \text{ は } n \text{ の倍数 }\}$$

は $\mathbf{Z}$ 上の同値関係になる．

このとき，$xR_{(n)}y$ を

$$x \equiv y \ (\mathbf{mod}\ n)$$

とも表し，x と y は n を法として合同である という．

2. 「$x-y$ は n の倍数 」とは，

$x-y = n\cdot k$ と書ける $k \in \mathbf{Z}$ が存在する ということ．

3. したがって，

$$R_{(n)} = \{(x,y) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : x-y = n\cdot k\}$$

と書ける．

4. すなわち，$(x,y) \in R_{(n)} (\subseteq \mathbf{Z}\times\mathbf{Z})$ ならば

$x-y = n\cdot k$ と書ける $k \in \mathbf{Z}$ が存在する．

定義 *4. 13.*

R を X 上の同値関係とする．

任意の $x \in X$ に対し，以下を定義する．

1. 以下の X の部分集合を R による x の 同値類 という：

$$[x] := \{y \mid y \in X,\ xRy\}\ (\subseteq X)$$

2. それぞれの同値類に属する要素を，その同値類の 代表元 という．

5. $n=3$ の場合：

$$\begin{aligned} R_{(3)} &= \{(x,y) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \mid x-y \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : x-y = 3\cdot k\} \\ &= \{(0,3),(3,0),(1,4),(4,1),(2,5),(5,2),\ldots\} \end{aligned}$$

そして，$xR_{(3)}y$ を

$$x \equiv y \ (\mathbf{mod}\ 3)$$

と表し，x と y は 3 を法として合同である という．

6. たとえば，「1 と 4 は 3 を法として合同である．」 そして，

$$1 \equiv 4 \ (\mathbf{mod}\ 3)$$

と表す．

7. 同値関係は対称律を満たすので，

$$4 \equiv 1 \ (\mathbf{mod}\ 3)$$

と書いても同じこと．

例 *4. 14.* $n=3$ の場合の $\mathbf{Z}$ 上の同値関係 $R_{(n)}$ について

1. $5 \in \mathbf{Z}$ に対する同値類 $[5]$ ：

$$\begin{aligned} [5] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 5R_{(3)}y\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 5-y \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : 5-y = 3k\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = -3k+5\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = 3(1-k)+2\} \quad (m = 1-k) \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists m \in \mathbf{Z} : y = 3m+2\} \\ &= \{\ldots,\ -4,\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ \ldots\} \end{aligned}$$

2. 同値類 $[5]$ において，5 は $[5]$ の代表元である．

また，2 も $[5]$ の代表元である．

(証明) 関係 $R_{(n)}$ が $\mathbf{Z}$ 上の同値関係であることを示す．

反射律) 任意の $x \in \mathbf{Z}$ に対し，

$$x - x = 0 = n\cdot 0$$

と書けるから，$xR_{(n)}x$．

ゆえに，$R_{(n)}$ は反射律を満たす．

対称律) 任意の $(x,y) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ に対し，

$xR_{(n)}y$ ならば，

$$x-y = n\cdot k$$

となる $k \in \mathbf{Z}$ が存在する．

このとき，

$$y-x = -k\cdot n$$

と書けて，$-k \in \mathbf{Z}$ より，$yR_{(n)}x$．

ゆえに，$R_{(n)}$ は対称律を満たす．

3. $0,1,2 \in \mathbf{Z}$に対する 同値類 $[0],[1],[2]$ ：

$$\begin{aligned} [0] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 0R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 0-y \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : 0-y = 3k\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = -3k\} \\ &= \{\ldots,\ -6,\ -3,\ 0,\ 3,\ 6,\ \ldots\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [1] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 1R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 1-y \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : 1-y = 3k\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = -3k+1\} \\ &= \{\ldots,\ -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ \ldots\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [2] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 2R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 2-y \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : 2-y = 3k\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = -3k+2\} \\ &= \{\ldots,\ -4,\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ \ldots\} = [5] \end{aligned}$$

(同値類 $[2]$ の任意の代表元 $x \in [2]$ に対し，$[2] = [x]$ となる．)

推移律) 任意の $(x,y),(y,z), \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ に対し，

$xR_{(n)}y$ かつ $yR_{(n)}z$ ならば，

$$x-y = n\cdot k \text{ かつ } y-z = n\cdot m$$

と書ける，$k,m \in \mathbf{Z}$ が存在する．このとき，

$$x-z = n\cdot k + n\cdot m = n(k+m)$$

と書けて，$(k+m) \in \mathbf{Z}$ より，$xR_{(n)}z$．

ゆえに，$R_{(n)}$ は推移律を満たす．

以上より，$R_{(n)}$ は $\mathbf{Z}$ 上の同値関係となる．∎

4.

$$\begin{aligned} [0] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 0R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 0-y \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = 3k\} \\ &= \{\ldots,\ -6,\ -3,\ 0,\ 3,\ 6,\ \ldots\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [1] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 1R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 1-y \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = 3k+1\} \\ &= \{\ldots,\ -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ \ldots\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [2] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 2R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 2-y \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = 3k+2\} \\ &= \{\ldots,\ -4,\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ \ldots\} \end{aligned}$$

5.

$[0]$ の要素は 3 で割って余りが 0 になる整数

$[1]$ の要素は 3 で割って余りが 1 になる整数

$[2]$ の要素は 3 で割って余りが 2 になる整数

定理 *4. 16.*
R を X 上の同値関係とする．
このとき，以下のことが成り立つ．

1. $\forall x \in X : x \in [x]$

2. $\forall x, y \in X : (xRy \Leftrightarrow [x] = [y])$

3. $\forall x, y \in X : (x \in [y] \Leftrightarrow [x] = [y])$

4. $\forall x, y \in X : ([x] \cap [y] \neq \phi \Rightarrow [x] = [y])$

5. $\forall x, y \in X : (xRy \Leftrightarrow (\exists z \in X : (x \in [z]) \wedge (y \in [z])))$

定義 *4. 17.*
R を X 上の同値関係とする．このとき，

$$X/R := \{[x] \mid x \in X\}$$

を X 上のRによる 商集合 という．

例 *4. 18.*
同値関係 $R_{(3)}$ の 商集合 を求めよ．

*(*解答*)* 商集合の定義より，

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}/R_{(3)} &= \{[x] \mid x \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{\ldots,\ [-2],\ [-1],\ [0],\ [1],\ [2],\ [3],\ \ldots\} \\ &= \{[0], [1], [2]\}. \end{aligned}$$

なぜなら，

$$\cdots = [-3] = [0] = [3] = [6] = \cdots$$
$$\cdots = [-2] = [1] = [4] = [7] = \cdots$$
$$\cdots = [-1] = [2] = [5] = [8] = \cdots$$

定義 *4. 22.*
Xを空でない集合とする．
集合族 $S(\subseteq 2^X)$ が X の 直和分割 であるとは，次の*3*つの条件が満たされること*:*

1. $\phi \notin S$,

2. $\cup_{A \in S} A = X$,

3. $\forall A, B \in S : [A \cap B \neq \phi \Rightarrow A = B]$.

直和分割の要素を ブロック という．

例 *4. 23.* 集合 $X = \{a, b, c, d, e\}$ とする．
集合族

$$S = \{\ \{a\},\ \{b, c\},\ \{d, e\}\ \} (\subseteq 2^X)$$

は X の直和分割である．
このとき，この直和分割 S は *3* 個の ブロック からなる．

定理 *4. 24.*
X を空でない集合とし，R を X 上の同値関係とする．
このとき，商集合 X/R は X の直和分割である．

たとえば，$\mathbf{Z}$ 上の同値関係 $R_{(3)}$ による商集合 $\mathbf{Z}/R_{(3)}$

$$\begin{aligned} S &= \mathbf{Z}/R_{(3)} = \{[0], [1], [2]\} \\ [0] &= \{\ldots,\ -6,\ -3,\ 0,\ 3,\ 6,\ \ldots\} \\ [1] &= \{\ldots,\ -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ \ldots\} \\ [2] &= \{\ldots,\ -4,\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ \ldots\} \end{aligned}$$

は直和分割である．つまり，以下の直和分割の条件を満たす．

1. $\phi \notin S$,

2. $\cup_{A \in S} A = X$,

3. $\forall A, B \in S : [A \cap B \neq \phi \Rightarrow A = B]$.

例 *4. 25.* 商集合 $\mathbf{Z}/R_{(3)}$ が$\mathbf{Z}$ の直和分割であることを確かめる．

*(*証明*)* $\mathbf{Z}/R_{(3)} = \{[0], [1], [2]\}$ であることに注意する．

1. 任意の$[x] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}$ に対し，$x \in [x]$ より，$[x] \neq \phi$.
ゆえに，$\phi \notin \mathbf{Z}/R_{(3)}$.

2. $\bigcup\limits_{A \in \mathbf{Z}/R_{(3)}} A = \mathbf{Z}$ を示す．

$\subseteq$*)* $\bigcup\limits_{[x] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}} [x] = [0] \cup [1] \cup [2] \subseteq \mathbf{Z}$ は明らか．

$\supseteq$*)* 任意の $z \in \mathbf{Z}$ に対し，
z を 3 で割ったときの余りは $0, 1, 2$ のいずれかである．これより，

$$z \in [0] \cup [1] \cup [2] = \bigcup_{[x] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}} [x].$$

すなわち，$\bigcup\limits_{[x] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}} [x] \supseteq \mathbf{Z}$.

ゆえに，$\bigcup\limits_{[x] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}} [x] = \mathbf{Z}$.

3. 任意の $[x], [y] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}$ に対し，
$[x] \cap [y] \neq \phi$ ならば $z \in [x] \cap [y]$ となる z が存在し，

$z \in [x]$ ならば $z = 3m + x$, $m \in \mathbf{Z}$,
$z \in [y]$ ならば $z = 3k + y$, $k \in \mathbf{Z}$

と表される．
したがって，

$$x - y = 3(m - k), (m - k) \in \mathbf{Z}$$

となり，$xR_{(3)}y$ である．
ゆえに，定理 ***4.16*** の ***2*** $(xRy \Rightarrow [x] = [y])$ より，$[x] = [y]$.

以上より，$\mathbf{Z}/R_{(3)}$ が $\mathbf{Z}$ の直和分割であることが示された．∎

定理 *4. 24.* 商集合 X/R は X の直和分割である の証明

1. 任意の $[x] \in X/R$ に対し，$x \in [x]$ より，$[x] \neq \phi$.
ゆえに，$\phi \notin X/R$.

2. $\bigcup\limits_{A \in X/R} A = X$ を示す．
$\subseteq$*)* 任意の $x \in \bigcup\limits_{A \in X/R} A$ に対し，
$x \in A$ となる $A \in X/R$ が存在する．
したがって，$x \in A \subseteq X$ より，$x \in X$.
ゆえに，$\bigcup\limits_{A \in X/R} A \subseteq X$.
$\supseteq$*)* 任意の $x \in X$ に対し，
$x \in [x]$ となる$[x] \in X/R$ が存在する．
したがって，$x \in [x] \subseteq \bigcup\limits_{A \in X/R} A$ より，$x \in \bigcup\limits_{A \in X/R} A$.
ゆえに，$\bigcup\limits_{A \in X/R} A \supseteq X$.
以上より，$\cup_{A \in X/R} A = X$.

3. 任意の $[x], [y] \in X/R$ に対し，

定理 **4.16** の **4** $(([x] \cap [y] \neq \phi) \Rightarrow [x] = [y])$ より，

$[x] \cap [y] \neq \phi$ ならば $[x] = [y]$.

以上より，X/R が X の直和分割であることが示された．■

定理 4. 26.

X を空でない集合とし，集合族 S を X の直和分割とする．このとき，以下が成り立つ．

1. $R := \bigcup_{A \in S} A \times A \ (\subseteq X \times X)$

と定義すると，R は同値関係になる．

2. $X/R = S$.

(例) 集合 $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ に対し，

直和分割 $S = \{\ \{a\},\ \{b, c\},\ \{d, e, f\}\ \}$ とする．

$$\begin{aligned} R &= \bigcup_{A \in S} A \times A \\ &= (\{a\} \times \{a\}) \cup (\{b, c\} \times \{b, c\}) \cup (\{d, e, f\} \cup \{d, e, f\}) \\ &= \{(a, a)\} \ \cup\ \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\} \\ &\quad \cup \{(d, d), (d, e), (d, f), (e, e), (e, f), (e, d), (f, f), (f, d), (f, e)\} \\ &= \{(a, a),\ (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), \\ &\quad (d, d), (d, e), (d, f), (e, e), (e, f), (e, d), (f, f), (f, d), (f, e)\}. \end{aligned}$$

たとえば，

$a \in X \ \Rightarrow\ (a, a) \in R$ (反射律)

$(b, c) \in R \ \Rightarrow\ (c, b) \in R$ (対称律)

$(d, e),\ (e, f) \in R \ \Rightarrow\ (d, f) \in R$ (推移律)

$$\begin{aligned} X/R &= \{\ [x] \mid x \in X\ \} \\ &= \{\ [a],\ [b],\ [c],\ [d],\ [e],\ [f]\ \} \\ &= \{\ [a],\ [b],\ [d]\ \} \\ &= \{\ \{a\},\ \{b, c\},\ \{d, e, f\}\ \} = S \end{aligned}$$

なぜなら，

$$[a] = \{a\},\ [b] = \{b, c\} = [c],\ [d] = \{d, e, f\} = [e] = [f].$$

定理 4. 27.

空でない集合 X に対し，

X の直和分割の全体からなる集合を $\widehat{S}$ ，

X 上の同値関係の全体からなる集合を $\widehat{R}$ とする．

このとき，

直和分割 $S \in \widehat{S}$ に対し，

同値関係 $R_S = \bigcup_{A \in S} A \times A \in \widehat{R}$

を対応させる写像は，

$\widehat{S}$ から $\widehat{R}$ へ

の全単射である．

この定理より，有限集合 X 上の 同値関係の総数 は，

X の 直和分割の総数 と同じである．すなわち，

$$|\widehat{S}| = |\widehat{R}|$$

例 4. 29. 集合 $\{a, b, c\}$ 上の同値関係をすべて列挙せよ．

(解答)

集合 $\{a, b, c\}$ の直和分割は，その分割の個数を $1, 2, 3$ の順にして，

以下の 5 通りである．

直和分割		同値関係
$S_1 = \{\{a, b, c\}\}$	$\rightarrow$	$R_1 = \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$
$S_2 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$	$\rightarrow$	$R_2 = (\{a, b\} \times \{a, b\}) \cup (\{c\} \times \{c\})$
$S_3 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$	$\rightarrow$	$R_3 = (\{a\} \times \{a\}) \cup (\{b, c\} \times \{b, c\})$
$S_4 = \{\{b\}, \{c, a\}\}$	$\rightarrow$	$R_4 = (\{b\} \times \{b\}) \cup (\{c, a\} \times \{c, a\})$
$S_5 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$	$\rightarrow$	$R_5 = (\{a\} \times \{a\}) \cup (\{b\} \times \{b\}) \cup (\{c\} \times \{c\})$

例 4. 30. 集合 $\{a, b, c, d\}$ 上の同値関係をすべて列挙せよ．

定理 4. 31. (直和分割の総数)

m 個の要素をもつ集合 X を

n 個のブロックに分割する直和分割の総数は，

$$\sum_{n=1}^{m} S(m, n)$$

となる．ここで，(第2種スターリング数)

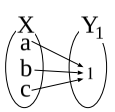
$$S(m, n) := \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m$$

ここで，式 $S(m, n)$ 中の $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m$ は，

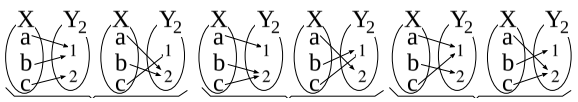
m個の要素をもつ集合からn個の要素をもつ集合への全射の総数．

$\frac{1}{n!}$ の意味は ？

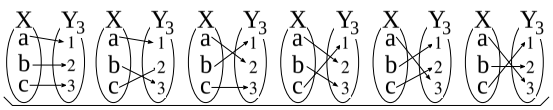
$X = \{a, b, c\}$, $Y_1 = \{1\}$, $Y_2 = \{1, 2\}$, $Y_3 = \{1, 2, 3\}$ とする．



{ { a, b, c } }



{ {a,b}, {c} } { {a}, {b,c} } { {a,c}, {b} }



{ {a}, {b}, {c} }

確かに，**1** つの直和分割 S に対し，$|S|!$ 通りの全射が存在している．

例 *4. 42.* $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ 上の関係 $\sim$ を,
任意の $(m_1,n_1),(m_2,n_2)\in\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ に対し,

$$(m_1,n_1)\sim(m_2,n_2) \quad\Leftrightarrow\quad m_1n_2=m_2n_1$$

と定義する.
このとき, $\sim$ が$\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ 上の同値関係になるを示せ.

分数 $\frac{a}{b}$ とは, $(a,b)\in\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ の $\sim$ による同値類 $[(a,b)]$.

集合 $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ に対し, 同値関係 $\sim$ による商集合

$$(\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\}))\ /\ \sim$$

は有理数の全体からなる集合 $\mathbf{Q}$ である.

整数 n_1,n_2 が非ゼロであることがポイント.

$$(m_1,n_1)\sim(m_2,n_2) \quad\Leftrightarrow\quad m_1n_2=m_2n_1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}$$

$$\begin{aligned}[(a,b)] &= \{(m,n)\in\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\}) \mid (a,b)\sim(m,n)\}\\ &= \left\{(m,n)\in\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\}) \mid \frac{a}{b}=\frac{m}{n}\right\}\\ &= \{(a,b),\ (m_1,n_1),\ (m_2,n_2),\ (m_3,n_3),\ \dots\}\\ &\quad \frac{a}{b}=\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_3}{n_3}=\ \cdots\\ &\quad \frac{3}{2}=\frac{6}{4}=\frac{9}{6}=\frac{12}{8}=\ \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= (\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\}))\ /\ \sim\\ &= \{[(a,b)] \mid (a,b)\in\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})\}\end{aligned}$$

例 *4.22* の証明 *(* $\sim$ は $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ 上の同値関係である*)*

反射律*)* 任意の $(m,n)\in\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ に対し,
$mn=mn$ より, $(m,n)\sim(m,n)$.

対称律*)* 任意の $(m_1,n_1),\ (m_2,n_2)\in\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ に対し,
$(m_1,n_1)\sim(m_2,n_2)\ \Leftrightarrow\ m_1n_2=m_2n_1$ *(* $\sim$ の定義より*)*
$\Leftrightarrow\ m_2n_1=m_1n_2$ *(* $A=B$ ならば $B=A$ より*)*
$\Leftrightarrow\ (m_2,n_2)\sim(m_1,n_1)$. *(* $\sim$ の定義より*)*

推移律*)* 任意の $(m_1,n_1),(m_2,n_2),(m_3,n_3)\in\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ に対し,
$(m_1,n_1)\sim(m_2,n_2)$ かつ $(m_2,n_2)\sim(m_3,n_3)$
$\Leftrightarrow m_1n_2=m_2n_1$ かつ $m_3n_2=m_2n_3$ *(* $\sim$ の定義より*)*
$\Leftrightarrow \frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_3}{n_3}$ *(* $n_i\neq0,\ i=1,2,3$, より*)*
$\Leftrightarrow m_1n_3=m_3n_1\ \Leftrightarrow (m_1,n_1)\sim(m_3,n_3)$. *(* $\sim$ の定義より*)*
以上より, $\sim$ は 反射律, 対称律, 推移律を満たす.
ゆえに, $\sim$ は $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ 上の同値関係である. ∎

4.3 順序関係

定義 *4. 43.*
反射律, 反対称律, 推移律 の *3*つを満す関係を 順序関係, あるいは 半順序関係 と呼ぶ.

順序関係 R が定義されている集合 X を 順序集合 といい, (X,R) と表す.

1. R が順序関係のとき, xRy を $x\leq y$ と表すことがある.
2. $x\leq y$ のとき,
   y は x より*(*R の意味で*)*大きい, あるいは,
   x は y より*(*R の意味で*)*小さいという.
3. $x\leq y$ かつ $x\neq y$ のとき,
   y は x より真に*(*R の意味で*)*大きい,
   あるいは, x は y より真に*(*R の意味で*)*小さいといい,
   $x<y$ と表す.
4. $x<y$ であって, $x<z<y$ を満たす z が存在しないとき,
   “ x は y の 直前の要素である ”, あるいは,
   “ yはxの 直後の要素である ” という.

例 *4. 44.* S を空でない集合とするとき,
$(2^S,\subseteq)$ は順序集合になる.
ここで, $(2^S$ は S のべき集合, 記号 $\subseteq$ は集合の包含関係を表す.

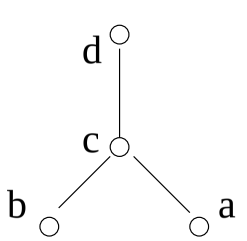
*(*証明*)* $(2^S,\subseteq)$ が反射律, 反対称律, 推移律を満たすことを示せばよい.
反射律*)* 任意の $A\in2^S$ に対し, $A\subseteq A$.
反対称律*)* 任意の $A,B\in2^S$ に対し,
$A\subseteq B$ かつ $A\supseteq B$ ならば $A=B$.
推移律*)* 任意の $A,B,C\in2^S$ に対し,
$A\subseteq B$ かつ $B\subseteq C$ とする.
任意の $x\in A$ に対し, $x\in B\subseteq C$ より, $x\in C$.
ゆえに, $A\subseteq C$ が成り立つ .
以上より, $\subseteq$ は 反射律, 反対称律, 推移律 を満たす.
ゆえに, $(2^S,\subseteq)$ は順序集合になる.

定義 *4. 45.* X の要素を次のように作成した図形を ハッセ図 という.

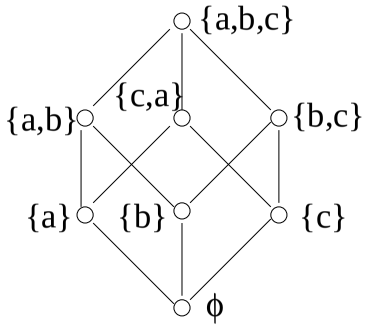
$(X,\leq)$ を順序集合とする.
i. もし $x<y$ ならば, y を x より上に書く.
ii. そして, y が x の直後のとき, かつ そのときに限り,
y と x を線で結ぶ.

例 *4. 46.* 順序集合 $(X,\leq)$ を以下のように定義する*:*
$X=\{a,b,c,d\}$,
$\leq=\{(a,c),(b,c),(c,d),(a,d),(b,d),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$.
このとき, 順序集合 $(X,\leq)$ のハッセ図を記せ.

*(*解答*)*



例 ***4. 47.*** $S=\{a,b,c\}$ とするとき，
順序集合 $(2^S,\subseteq)$ のハッセ図を示せ．
*(*解答*)*
$2^S=\{\phi,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{b,c\},\ \{c,a\},\ \{a,b,c\}\}$ より，



定義 ***4. 49.*** $(X,\leq)$ を順序集合とし，Y を X の空でない部分集合とする．

1. a が Y の 最大元 であるとは： $a\in Y$ かつ $\forall x\in Y: x\leq a$．
Y の最大元を $\max Y$ と表す．

2. a が Y の 最小元 であるとは： $a\in Y$ かつ $\forall x\in Y: a\leq x$．
Y の最小元を $\min Y$ と表す．

3. a が Y の 極大元 であるとは：
$a\in Y$ かつ $\forall x\in X:[(a\leq x$ かつ $a\neq x)\ \Rightarrow\ x\notin Y]$．

4. a が Y の 極小元 であるとは：
$a\in Y$ かつ $\forall x\in X:[(x\leq a$ かつ $a\neq x)\ \Rightarrow\ x\notin Y]$．

5. a が Y の 上界 であるとは：
$a\in X$ かつ $\forall x\in Y: x\leq a$．

6. a が Y の 下界 であるとは：
$a\in X$ かつ $\forall x\in Y: a\leq x$．

7. a が Y の 上限 であるとは，a が Y の上界の最小元であること．
Y の上限を $\sup Y$ と表す．

8. a が Y の 下限 であるとは，a が Y の下界の最大元であること．
Y の下限を $\inf Y$ と表す．

上記の定義より，上限，下限は以下のように表すこともできる．

1. $\overline{Y}:=\{a\mid a\in X,\ a$ は Y の上界$\}$とする．
$\overline{Y}$ の最小元が存在すれば，それが Y の上限である．

2. $\underline{Y}:=\{a\mid a\in X,\ a$ は Y の下界$\}$とする．
$\underline{Y}$ の最大元が存在すれば，それが Y の上限である．

注意 ***4. 50.***

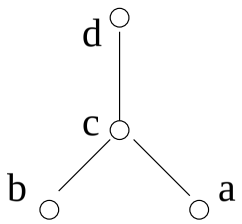
1. 極大元と極小元は必ず存在する．

2. 最大元や最小元は存在するとは限らない．

3. 極大元*(*極小元*)*は複数存在することもある．

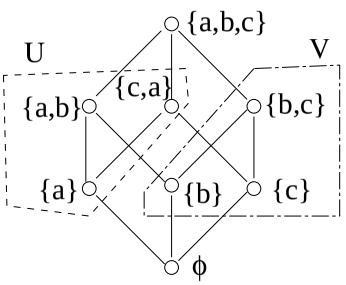
4. 最大元*(*最小元*)*は存在するとしてもただ 1 つである．

例 ***4. 51.*** 順序集合 $(X,\leq)$ を例 ***46*** と同じものとする．このとき，X の最大元，最小元，極大元，極小元を示せ．



*(*解答*)*
最大元*:* d，最小元*:* なし，極大元*:* d，極小元*:* a,b．

例 ***4. 52.*** $S=\{a,b,c\}$ とし，例 ***47*** と同じ順序集合 $(2^S,\subseteq)$ を考える．
そこで，2^S の部分集合として，
$U=\{\{a\},\{a,b\},\{c,a\}\},\quad V=\{\{b\},\{c\},\{b,c\}\}$
とする．このとき，部分集合 U と V のそれぞれの
最大元，最小元，極大元，極小元，上界，下界，上限，下限　を示せ．
*(*解答*)*



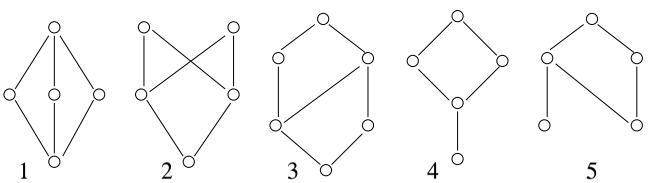
	U	V
最大元	なし	$\{b,c\}$
最小元	$\{a\}$	なし
極大元	$\{a,b\}$, $\{c,a\}$	$\{b,c\}$
極小元	$\{a\}$	$\{b\},\{c\}$
上界	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$, $\{b,c\}$
下界	$\{a\},\phi$	ϕ
上限	$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$
下限	$\{a\}$	ϕ

定義 ***4. 56.*** $(X,\leq)$ を順序集合とする．
$x,y\in X$ に対し，
$x\leq y$ または $y\leq x$
が成り立つとき，
x と y は 比較可能 であるという．
そうでないとき，比較不能 であるという．
任意の ***2*** 要素が比較可能ならば，$\leq$ を 全順序関係，
あるいは，線型順序関係 と呼ぶ．

例 ***4. 57.*** 関係 $\leq$ を，整数の全体 $\mathbf{Z}$ 上の通常の大小関係とすれば，
任意の整数 $x,y\in\mathbf{Z}$に対し，
$x\leq y$ あるいは $y\leq x$
のいずれかが成り立つ．
ゆえに，整数の大小関係 $\leq$ は全順序関係である．

定義 ***4. 62.*** $(X,\leq)$ を順序集合とする．任意の$x,y\in X$ に対し，集合 $\{x,y\}$ の $\sup\{x,y\}$ と $\inf\{x,y\}$ が存在するとき，$(X,\leq)$ を 束 という．

例 ***4. 63.*** 次のハッセ図で示される順序集合は，束であるかどうか述べよ．



*(*解*)* 束である*:* ***1,3,4.*** 束でない*:* ***2,5.***

4.5 関係の閉包

定義 4. 68.
R を $X \times Y$ 上の**2**項関係, S を $Y \times Z$ 上の**2**項関係とするとき,
$X \times Z$ 上の **2** 項関係 $R \circ S$ を

$$R \circ S := \{(x,z) \mid \exists y \in Y : [((x,y) \in R) \wedge ((y,z) \in S)]\}$$

と定義する.

$R \circ S$ を R と S の合成, あるいは 積 という.

例 4. 69.
R, S, T を, それぞれ $X \times Y$, $Y \times Z$, $Z \times W$ 上の **2** 項関係とするとき,
結合律

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$

が成り立つ.
(証明) $(x,w) \in R \circ (S \circ T) \Leftrightarrow (x,w) \in (R \circ S) \circ T$ を示せばよい.

定義 4. 70.
R を X 上の関係とする. そのとき, R^+ を以下のように定義する:

1. $R^1 := R$;
2. $n \geq 2$ に対し , $R^n := R^{n-1} \circ R$;
3. $R^+ := \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$.

例 4. 71.

有限集合 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 上の関係 R を

表現する行列 $M = (m_{i,j})$, $1 \leq i, j \leq n$, が与えられているとする.

このとき, R^2 を表現する行列を求めるにはどうすればよいか.

一般に, R^n を表現する行列を求めるにはどうすればよいか.

(解答のスケッチ)

R^1 の場合)

$$(x_i, x_j) \in R \quad \Leftrightarrow \quad x_i R x_j \quad \Leftrightarrow \quad m_{i,j} = 1$$

$R^2 (= R \circ R)$ の場合)

$$\begin{aligned}
(x_i, x_k) \in R^2 &\Leftrightarrow x_i (R \circ R) x_k \\
&\Leftrightarrow \exists x_j \ : \ (x_i R x_j) \wedge (x_j R x_k) \\
&\Leftrightarrow \exists j \ : \ (m_{i,j} = 1) \wedge (m_{j,k} = 1) \\
&\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \cdot m_{j,k} \neq 0
\end{aligned}$$

最後の積和は, 行列 M の i 行目ベクトル と j 列目ベクトル の内積 :

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \cdot m_{j,k} = (m_{i,1}, \ldots, m_{i,n})(m_{1,j}, \ldots, m_{n,j})^T \neq 0$$

以上より, R^2 を表現する行列は次のように定めればよい.

i) M^2 の (i,j) 成分 $\neq 0$ ならば 1,

ii) そうでなければ 0.

$R^3 (= R^2 \circ R)$ の場合)

R^2 と R の合成 (積) を考えばれよい.

$R^n (= R^{n-1} \circ R)$ の場合)

R^{n-1} と R の合成 (積) を考えればよい. ∎

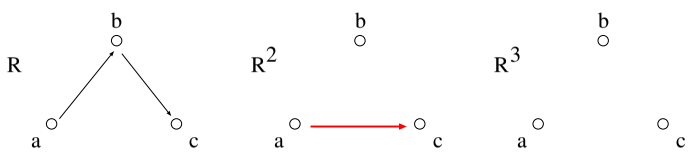
1. R を集合 X 上の関係とする.
   $x, y \in X$ が xRy を満たすとき, x から y に **1** ステップで 到達可能 であるという.
2. $z_1, \ldots, z_n \in X$ が存在し,
   $$xRz_1 \ \wedge \ z_1 R z_2 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ z_{n-1} R z_n \ \wedge \ z_n R y$$
   が成り立つとき,
   x から y に $n+1$ ステップで到達可能であるという.
3. x から y に有限回数のステップで到達可能であるとき,
   x から y に到達可能であるという.
4. $R^n = \{(x,y) \mid (x,y) \in X, x$ から y に, n ステップで到達可能$\}$,
5. $R^+ = \{(x,y) \mid (x,y) \in X, x$ から y に到達可能$\}$.

定理 4. 72.
R を集合 X 上の関係とするとき, 以下が成り立つ.

1. $R^n = R^{n-k} \circ R^k$. ただし, 非負整数 n, k は $n - k \leq 1$ を満たす.
2. R^+ は推移的な関係である.

(例) 集合 $X = \{ a, b, c \}$, 関係 $R = \{ (a,b), (b,c) \}$ とする.

1. 関係の積 : $R^2 = R \circ R = \{ (a,c) \}$, $R^3 = R^2 \circ R = \{ \ \} = \phi$.
2. グラフ :



3. 行列 :

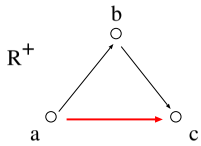
$$M \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^2 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^3 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. R^2 と 行列の積について：$aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

$$M^2 = M \times M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. R^+ ：

$$\begin{aligned} R^+ &= R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \\ &= R^1 \cup R^2 = \{\ (a,b),\ (b,c),\ (a,c)\ \} \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. グラフ G に対応する 隣接行列 M ：

$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. R^n と M^n の関係 ：

$$M^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(例) 集合 $X = \{\ a,\ b,\ c,\ d,\ e\ \}$, 関係 $R = \{\ (a,b),\ (b,c),\ (c,d),\ (d,e)\ \}$ とする.

$$\begin{aligned} R^2 &= \{\ (a,c),\ (b,d),\ (c,e)\ \} \\ R^3 &= R^2 \circ R = \{\ (a,d),\ (b,e)\ \} \\ R^3 &= R \circ R^2 = \{\ (a,d),\ (b,e)\ \} \\ R^4 &= R^3 \circ R = \{\ (a,e)\ \} \\ R^5 &= R^4 \circ R = \{\ \ \} = \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^+ &= R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5 \cup \cdots \\ &= R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \\ &= \{\ (a,c),(b,d),(c,e),\ (a,d),(b,e),\ (a,d),(b,e),\ (a,e)\ \} \end{aligned}$$

5. 行列 M^n の (i,j) 成分の値は,

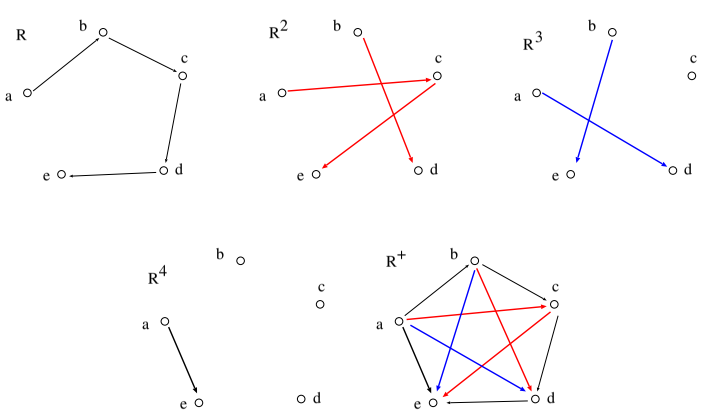
x_i から x_j へ n ステップで到達可能な パス *(path)* の本数を表す.

6. 頂点 x から 頂点 y へ到達するパスとは,

有限個の 有向辺 と 頂点 を経由することで,

x から y へ到達できる経路のこと.

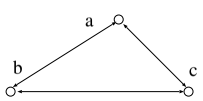
R^n と R^+ に対応するグラフ ：



4.5.2 その *2* (三角形の個数)

1. 集合 $X = \{a,b,c\}$, 関係 $R = \{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,b),(c,a)\}$.

グラフ G ：



2. 隣接行列 M および M^2, M^3. (隣接行列 M は 対称行列) ：

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. *1* 個の 三角形 に対し, *6* 本のパスを数える: aR^3a, bR^3b, cR^3c

i) 1 個の頂点で *2* 回 数える;

(△ *abc*, △ *acb)*, *(*△ *bca*, △ *bac)*, *(*△ *cab*, △ *cba)*

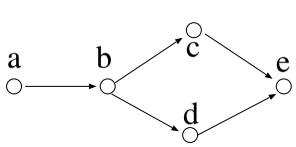
ii) 1 個の三角形に *3* 個の頂点がある ; *(*頂点 $a,\ b,\ c$*)*

4. グラフ G の中の 三角形の数 $= \frac{1}{6}(2+2+2) = 1$

4.5 グラフと隣接行列

4.5.1 その *1* (パスの本数)

1. 与えられたグラフ G ：

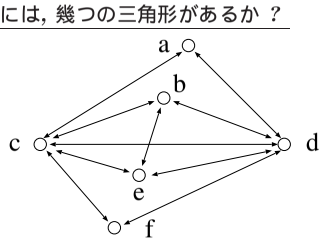


2. グラフ G に対応する 集合 X と 関係 R ：

集合 $X = \{a,b,c,d,e\}$.

関係 $R = \{(a,b),(b,c),(b,d),(c,e),(d,e)\} (\subseteq X^2)$.

1. グラフ G の中には, 幾つの三角形があるか ？



2. 隣接行列 M および M^3 ：

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 & 9 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 11 & 11 & 7 & 4 \\ 9 & 11 & 10 & 11 & 11 & 9 \\ 9 & 11 & 11 & 10 & 11 & 9 \\ 4 & 7 & 11 & 11 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 9 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. グラフ G の中の三角形の数 $= \frac{1}{6}(2+6+10+10+6+2) = 6$

References

[1] 尾関和彦, *(*情報技術者のための*)*離散系数学入門, 共立出版, ***2004.***

[2] 尾関和彦, 太田和夫, 國廣昇, “離散数学第一”及び “離散数学第一演習問題集” 電気通信大学情報通信工学科講義資料, ***2004.***

[3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, ***2003.***

[4] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, ***2003.***

[5] ***S. Lipschutz***著, 成嶋弘監訳, 離散数学 *(*コンピュータサイエンスの基礎数学*)*, オーム社, ***2004(H16).***

[6] 小倉久和, 情報の基礎離散数学 *(–* 演習を中心とした *–)*, 近代科学社, ***2006.***

[7] 町田元, 横森貴, 計算機数学, 森北出版, ***1990.***