

2007/12/19
p.39 を訂正
しました。

離散数学

— 4. 関係 —

4.1 2項関係

4.2 同値関係

4.3 順序関係

4. 関係

4.1 2項関係

定義 4. 1.

集合 X_1, X_2 に対し, 直積集合 $X_1 \times X_2$ の部分集合を $X_1 \times X_2$ 上の 2 項関係 という.

定義 4. 2.

X, Y を空でない集合とし, R を $X \times Y$ 上の 2 項関係とする.

$(x, y) \in R$ に対し, $(x, y) \in R$ を xRy と表す.

xRy が成り立つとき, x と y は R の関係がある という.

X, Y が有限集合のとき, $X \times Y$ 上の 2 項関係は行列で表現できる .

$$X = \{x_1, \dots, x_m\}, \quad Y = \{y_1, \dots, y_n\}$$

に対し,

- i) $x_i R y_j$ のとき, かつ, そのときに限り, 行列の (i, j) 成分を 1 とし,
- ii) それ以外の他の成分を 0 とする.

例 4. 3. 有限集合 X, Y を,

$$X = \{1, 2, 3\}, \quad Y = \{a, b, c, d\}$$

とする.

2項関係

$$R = \{(1, b), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (3, c)\} \subseteq X \times Y$$

の行列表現:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

定義 4. 5.

X を集合とするとき, $X \times X$ 上の2項関係を X 上の関係 という.

定義 4. 6. (有向グラフ)

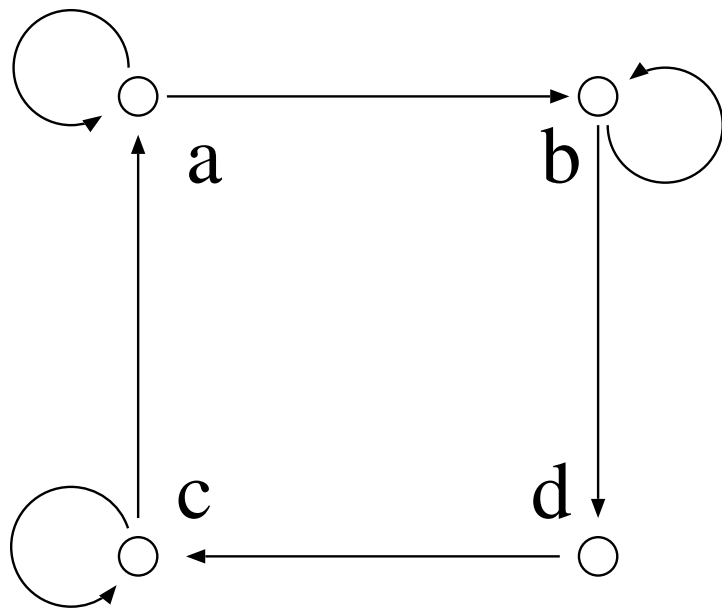
X 上の関係 R は, これを 有向グラフ と考えて図示することができる.
 X の元を 頂点 といい, $(x_i, y_j) \in R$ のとき,
順序対 (x_i, y_j) を 始点 x_i から 終点 y_j に向かう 有向辺 という.

例 4. 7.

集合 $X = \{a, b, c, d\}$,

関係 $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, d), (c, a), (c, c), (d, c)\}$ とする.

R を有向グラフと行列で表現する:



$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

定義 4. 8. R を集合 X 上の関係とする.

1. $\forall x \in X : xRx$ が成り立つとき,

R は 反射的 であるという. (反射律)

2. $\forall x, y \in X : [(xRy) \Rightarrow (yRx)]$ が成り立つとき,

R は 対称的 であるという. (対称律)

3. $\forall x, y \in X : [((xRy) \wedge (yRx)) \Rightarrow (x = y)]$ が成り立つとき,

R は 反対称的 であるという. (反対称律)

4. $\forall x, y, z \in X : [((xRy) \wedge (yRz)) \Rightarrow (xRz)]$ が成り立つとき,

R は 推移的 であるという. (推移律)

集合 X 上の関係 R とその行列表現と有向グラフの関係：

1. R が反射的: xRx

i. 行列：対角成分はすべて 1 である.

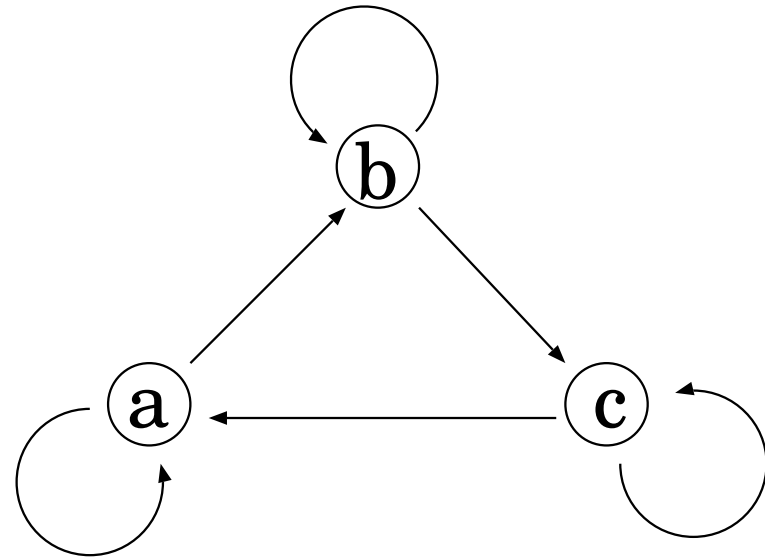
ii. グラフ：すべての頂点 x_i に対し,

有向辺 (x_i, x_i) がある. (x_i から x_i へ向かう辺がある)

集合 $X = \{a, b, c\}$

関係 $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, a), (c, c)\}$

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{bmatrix} & a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



2. R が対称的 : $(xRy) \Rightarrow (yRx)$

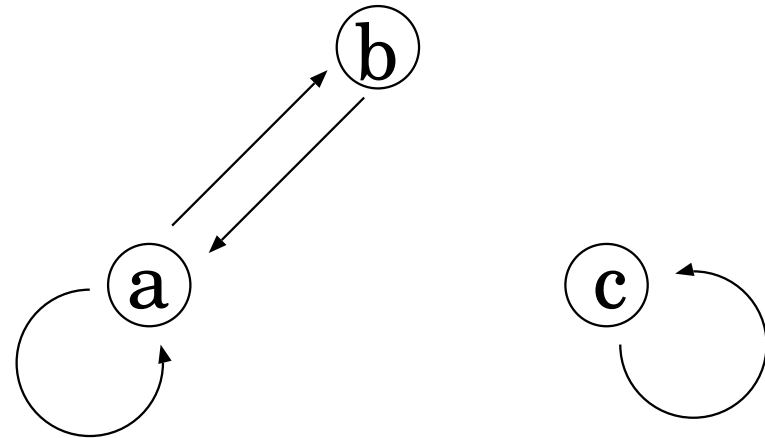
i. 行列 : 対称行列.

ii. グラフ : 有向辺 (x_i, x_j) があれば, 有向辺 (x_j, x_i) もある.

集合 $X = \{a, b, c\}$

関係 $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, c)\}$

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$



3. R が反対称的 : $((xRy) \wedge (yRx)) \Rightarrow (x = y)$

i. 行列 : $i \neq j$ ならば,

(i, j) 成分と (j, i) 成分が共に 1 になることはない.

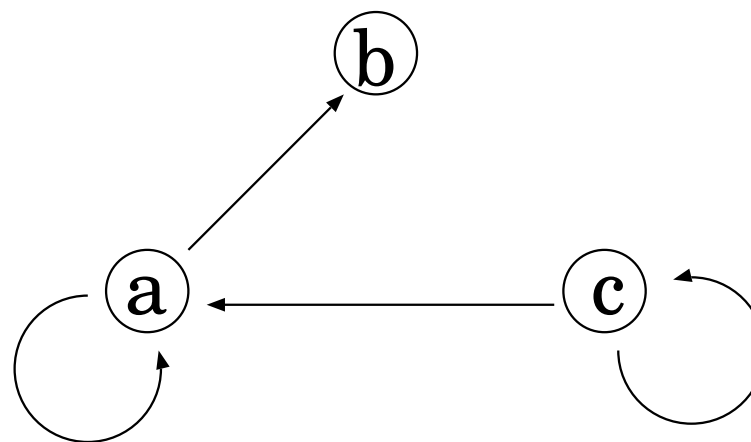
ii. グラフ : $i \neq j$ ならば,

有向辺 (x_i, x_j) と (x_j, x_i) の両方が存在することはない.

集合 $X = \{a, b, c\}$

関係 $R = \{(a, a), (a, b), (c, a), (c, c)\}$

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$



4. R が推移的 : $((xRy) \wedge (yRz)) \Rightarrow (xRz)$

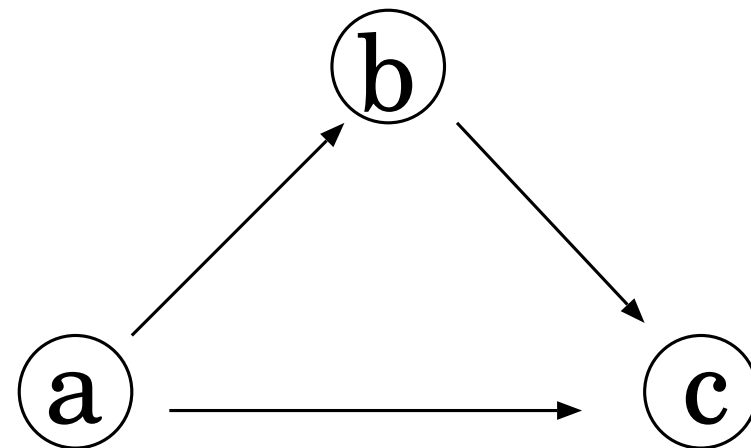
i. 行列 : (i, j) 成分と (j, k) 成分が共に 1 ならば,
 (i, k) 成分も 1 である.

ii. グラフ : 有向辺 (x_i, x_j) と (x_j, x_k) が存在するならば,
 (x_i, x_k) が存在する.

集合 $X = \{a, b, c\}$

関係 $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$



例 4. 9. 集合 $X = \{a, b, c, d\}$ 上の関係を以下のように定義する.

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, c), (d, d)\}$$

$$S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$$

$$T = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, c)\}$$

$$U = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c)\}$$

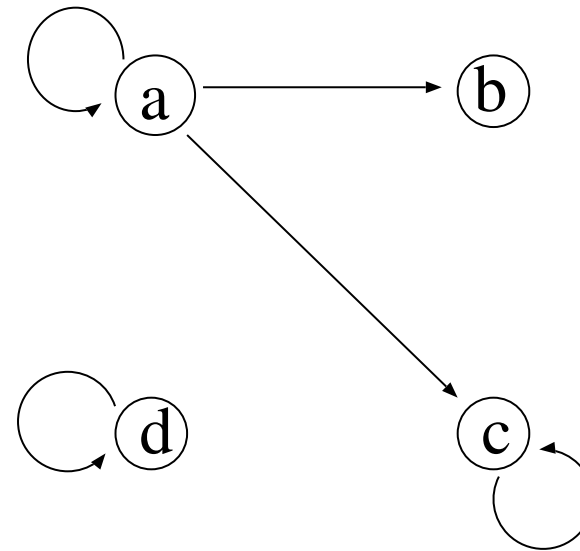
このとき,

1. 関係 R, S, T, U のそれぞれを行列と有向グラフで表せ.
2. 関係 R, S, T, U が, 反射律, 対称律, 反対称律, 推移律 のそれぞれを満たすかどうかを判定せよ.

$$1. R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, c), (d, d)\}$$

解)

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



関係	反射律	対称律	反対称律	推移律
R	× 1	× 2	○	○

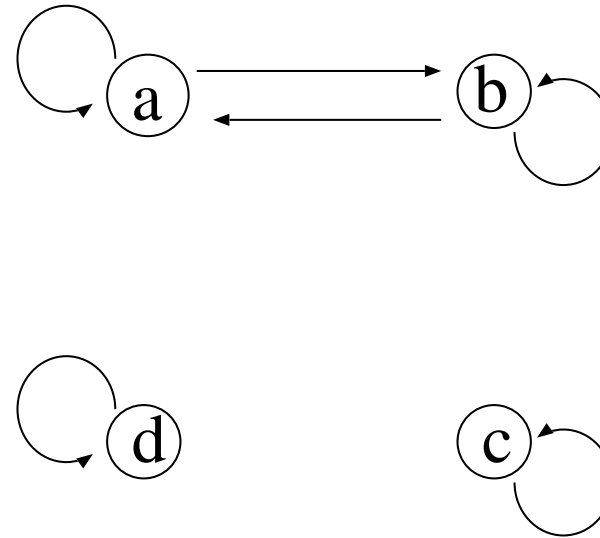
1. (b, b) がない

2. $[aRb \Rightarrow bRa] = F, [aRc \Rightarrow cRa] = F$

2. $S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$

解)

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



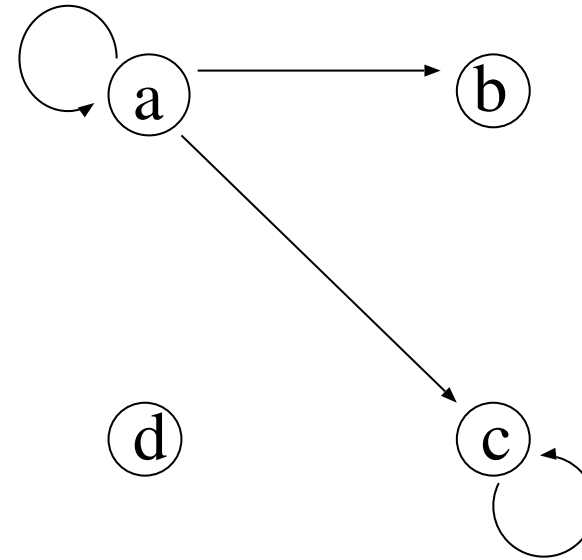
関係	反射律	対称律	反対称律	推移律
S	○	○	×	○
			3	

3. $((aRb) \wedge (bRa)) \Rightarrow a = b$

3. $T = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, c)\}$

解)

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



関係	反射律	対称律	反対称律	推移律
T	×	×	○	○
	4	5		

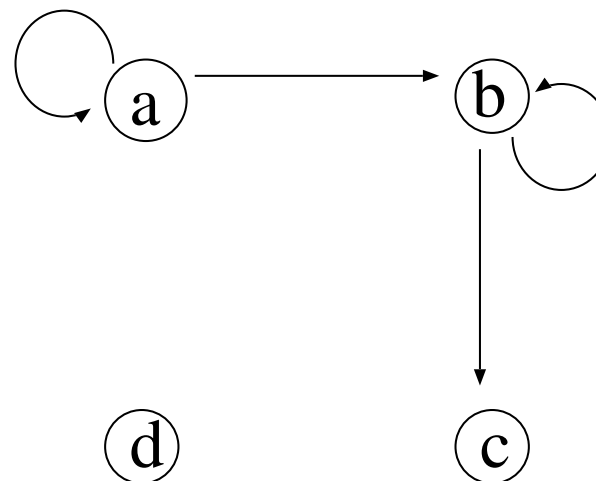
4. $(b, b), (d, d)$ がない

5. 2と同じ ($[aRb \Rightarrow bRa] = F, [aRc \Rightarrow cRa] = F$)

4. $U = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c)\}$

解)

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} & a & b & c & d \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$



関係	反射律	対称律	反対称律	推移律
U	×	×	○	×
	6	7		8

6. $(c, c), (d, d)$ がない

7. $[aRb \Rightarrow bRa] = F, [bRc \Rightarrow cRb] = F,$

8. $[((aRb) \wedge (bRc)) \Rightarrow aRc] = F$

4.2 同値関係

定義 4. 11.

反射律, 対称律, 推移律 の 3 つを満たす関係を 同値関係 という.

例 4. 12. 以下の関係 $R_{(n)}$ が $\mathbf{Z}$ 上の同値関係になることを証明せよ.

1. n を任意に固定した整数とすると,

$$R_{(n)} := \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x - y \text{ は } n \text{ の倍数} \}$$

は $\mathbf{Z}$ 上の同値関係になる.

このとき, $xR_{(n)}y$ を

$$x \equiv y \pmod{n}$$

とも表し, x と y は n を法として合同である という.

2. 「 $x - y$ は n の倍数」とは,

$$\underline{x - y = n \cdot k \text{ と書ける } k \in \mathbf{Z} \text{ が存在する} \text{ ということ.}}$$

3. したがって,

$$R_{(n)} = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : x - y = n \cdot k\}$$

と書ける.

4. すなわち, $(x, y) \in R_{(n)} (\subseteq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z})$ ならば

$$\underline{x - y = n \cdot k \text{ と書ける } k \in \mathbf{Z} \text{ が存在する.}}$$

5. $n = 3$ の場合 :

$$\begin{aligned} R_{(3)} &= \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x - y \text{ は } 3 \text{ の倍数} \} \\ &= \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : x - y = 3 \cdot k\} \\ &= \{(0, 3), (3, 0), (1, 4), (4, 1), (2, 5), (5, 2), \dots\} \end{aligned}$$

そして, $xR_{(3)}y$ を

$$x \equiv y \pmod{3}$$

と表し, x と y は 3 を法として合同である という.

6. たとえば, 「1 と 4 は 3 を法として合同である.」 そして,

$$1 \equiv 4 \pmod{3}$$

と表す.

7. 同値関係は対称律を満たすので,

$$4 \equiv 1 \pmod{3}$$

と書いても同じこと.

(証明) 関係 $R_{(n)}$ が $\mathbb{Z}$ 上の同値関係であることを示す.

反射律) 任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$x - x = 0 = n \cdot 0$$

と書けるから, $xR_{(n)}x$.

ゆえに, $R_{(n)}$ は反射律を満たす.

対称律) 任意の $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に対し,

$xR_{(n)}y$ ならば,

$$x - y = n \cdot k$$

となる $k \in \mathbb{Z}$ が存在する.

このとき,

$$y - x = -k \cdot n$$

と書けて, $-k \in \mathbb{Z}$ より, $yR_{(n)}x$.

ゆえに, $R_{(n)}$ は対称律を満たす.

推移律) 任意の $(x, y), (y, z), \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ に対し,

$xR_{(n)}y$ かつ $yR_{(n)}z$ ならば,

$$x - y = n \cdot k \text{ かつ } y - z = n \cdot m$$

と書ける, $k, m \in \mathbf{Z}$ が存在する. このとき,

$$x - z = n \cdot k + n \cdot m = n(k + m)$$

と書けて, $(k + m) \in \mathbf{Z}$ より, $xR_{(n)}z$.

ゆえに, $R_{(n)}$ は推移律を満たす.

以上より, $R_{(n)}$ は $\mathbf{Z}$ 上の同値関係となる. ■

定義 4. 13.

R を X 上の同値関係とする.

任意の $x \in X$ に対し, 以下を定義する.

1. 以下の X の部分集合を R による x の 同値類 という:

$$[x] := \{y \mid y \in X, xRy\} (\subseteq X)$$

2. それぞれの同値類に属する要素を, その同値類の 代表元 という.

例 4. 14. $n = 3$ の場合の $\mathbf{Z}$ 上の同値関係 $R_{(n)}$ について

1. $5 \in \mathbf{Z}$ に対する同値類 $[5]$:

$$\begin{aligned}[5] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 5R_{(3)}y\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 5 - y \text{ は } 3 \text{ の倍数} \} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : 5 - y = 3k\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = -3k + 5\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = 3(1 - k) + 2\} \quad (m = 1 - k) \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists m \in \mathbf{Z} : y = 3m + 2\} \\ &= \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}\end{aligned}$$

2. 同値類 $[5]$ において, 5 は $[5]$ の代表元である.

また, 2 も $[5]$ の代表元である.

3. $0, 1, 2 \in \mathbf{Z}$ に対する 同値類 $[0], [1], [2]$:

$$\begin{aligned}[0] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 0R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 0 - y \text{ は } 3 \text{ の倍数} \} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : 0 - y = 3k\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = -3k\} \\ &= \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[1] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 1R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 1 - y \text{ は } 3 \text{ の倍数} \} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : 1 - y = 3k\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = -3k + 1\} \\ &= \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[2] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 2R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 2 - y \text{ は } 3 \text{ の倍数} \} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : 2 - y = 3k\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = -3k + 2\} \\ &= \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\} = [5]\end{aligned}$$

(同値類 $[2]$ の任意の代表元 $x \in [2]$ に対し, $[2] = [x]$ となる.)

$$\begin{aligned}
4. [0] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 0R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 0 - y \text{ は } 3 \text{ の倍数} \} \\
&= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = 3k\} \\
&= \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[1] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 1R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 1 - y \text{ は } 3 \text{ の倍数} \} \\
&= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = 3k + 1\} \\
&= \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[2] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 2R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 2 - y \text{ は } 3 \text{ の倍数} \} \\
&= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = 3k + 2\} \\
&= \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}
\end{aligned}$$

5.

[0] の要素は 3 で割って余りが 0 になる整数

[1] の要素は 3 で割って余りが 1 になる整数

[2] の要素は 3 で割って余りが 2 になる整数

定理 4. 16.

R を X 上の同値関係とする.

このとき, 以下のことが成り立つ.

1. $\forall x \in X : x \in [x]$

2. $\forall x, y \in X : (xRy \Leftrightarrow [x] = [y])$

3. $\forall x, y \in X : (x \in [y] \Leftrightarrow [x] = [y])$

4. $\forall x, y \in X : ([x] \cap [y] \neq \phi \Rightarrow [x] = [y])$

5. $\forall x, y \in X : (xRy \Leftrightarrow (\exists z \in X : (x \in [z]) \wedge (y \in [z])))$

定義 4. 17.

R を X 上の同値関係とする. このとき,

$$X/R := \{[x] \mid x \in X\}$$

を X 上の R による 商集合 という.

例 4. 18.

同値関係 $R_{(3)}$ の 商集合 を求めよ.

(解答) 商集合の定義より,

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}/R_{(3)} &= \{[x] \mid x \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{\dots, [-2], [-1], [0], [1], [2], [3], \dots\} \\ &= \{[0], [1], [2]\}.\end{aligned}$$

なぜなら,

$$\begin{aligned}\dots &= [-3] = [0] = [3] = [6] = \dots \\ \dots &= [-2] = [1] = [4] = [7] = \dots \\ \dots &= [-1] = [2] = [5] = [8] = \dots\end{aligned}$$

定義 4. 22.

X を空でない集合とする.

集合族 $S(\subseteq 2^X)$ が X の 直和分割 であるとは, 次の3つの条件が満たされること:

1. $\phi \notin S$,
2. $\cup_{A \in S} A = X$,
3. $\forall A, B \in S : [A \cap B \neq \phi \Rightarrow A = B]$.

直和分割の要素を ブロック という.

例 4. 23. 集合 $X = \{a, b, c, d, e\}$ とする.

集合族

$$S = \{ \{a\}, \{b, c\}, \{d, e\} \} (\subseteq 2^X)$$

は X の直和分割である.

このとき, この直和分割 S は 3 個の ブロック からなる.

定理 4. 24.

X を空でない集合とし, R を X 上の同値関係とする.
このとき, 商集合 X/R は X の直和分割である.

たとえば, $\mathbf{Z}$ 上の同値関係 $R_{(3)}$ による商集合 $\mathbf{Z}/R_{(3)}$

$$S = \mathbf{Z}/R_{(3)} = \{[0], [1], [2]\}$$

$$[0] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$[1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

は直和分割である. つまり, 以下の直和分割の条件を満たす.

1. $\phi \notin S$,
2. $\cup_{A \in S} A = X$,
3. $\forall A, B \in S : [A \cap B \neq \phi \Rightarrow A = B]$.

例 4. 25. 商集合 $\mathbf{Z}/R_{(3)}$ が $\mathbf{Z}$ の直和分割であることを確かめる.

(証明) $\mathbf{Z}/R_{(3)} = \{[0], [1], [2]\}$ であることに注意する.

1. 任意の $[x] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}$ に対し, $x \in [x]$ より, $[x] \neq \phi$.

ゆえに, $\phi \notin \mathbf{Z}/R_{(3)}$.

2. $\bigcup_{A \in \mathbf{Z}/R_{(3)}} A = \mathbf{Z}$ を示す.

$\subseteq$) $\bigcup_{[x] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}} [x] = [0] \cup [1] \cup [2] \subseteq \mathbf{Z}$ は明らか.

$\supseteq$) 任意の $z \in \mathbf{Z}$ に対し,

z を 3 で割ったときの余りは 0, 1, 2 のいずれかである. これより,

$$z \in [0] \cup [1] \cup [2] = \bigcup_{[x] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}} [x].$$

すなわち, $\bigcup_{[x] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}} [x] \supseteq \mathbf{Z}$.

ゆえに, $\bigcup_{[x] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}} [x] = \mathbf{Z}$.

3. 任意の $[x], [y] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}$ に対し,

$[x] \cap [y] \neq \phi$ ならば $z \in [x] \cap [y]$ となる z が存在し,

$z \in [x]$ ならば $z = 3m + x, m \in \mathbf{Z},$

$z \in [y]$ ならば $z = 3k + y, k \in \mathbf{Z}$

と表される.

したがって,

$$x - y = 3(m - k), (m - k) \in \mathbf{Z}$$

となり, $xR_{(3)}y$ である.

ゆえに, 定理 4.16 の 2 ($xRy \Rightarrow [x] = [y]$) より, $[x] = [y]$.

以上より, $\mathbf{Z}/R_{(3)}$ が $\mathbf{Z}$ の直和分割であることが示された. ■

定理 4. 24. 商集合 X/R は X の直和分割である の証明

1. 任意の $[x] \in X/R$ に対し, $x \in [x]$ より, $[x] \neq \phi$.

ゆえに, $\phi \notin X/R$.

2. $\bigcup_{A \in X/R} A = X$ を示す.

$\subseteq$) 任意の $x \in \bigcup_{A \in X/R} A$ に対し,

$x \in A$ となる $A \in X/R$ が存在する.

したがって, $x \in A \subseteq X$ より, $x \in X$.

ゆえに, $\bigcup_{A \in X/R} A \subseteq X$.

$\supseteq$) 任意の $x \in X$ に対し,

$x \in [x]$ となる $[x] \in X/R$ が存在する.

したがって, $x \in [x] \subseteq \bigcup_{A \in X/R} A$ より, $x \in \bigcup_{A \in X/R} A$.

ゆえに, $\bigcup_{A \in X/R} A \supseteq X$.

以上より, $\bigcup_{A \in X/R} A = X$.

3. 任意の $[x], [y] \in X/R$ に対し,

定理 4.16 の 4 ($([x] \cap [y] \neq \phi) \Rightarrow [x] = [y]$) より,

$[x] \cap [y] \neq \phi$ ならば $[x] = [y]$.

以上より, X/R が X の直和分割であることが示された. ■

定理 4. 26.

X を空でない集合とし, 集合族 S を X の直和分割とする. このとき, 以下が成り立つ.

1. $R := \bigcup_{A \in S} A \times A \ (\subseteq X \times X)$
と定義すると, R は同値関係になる.
2. $X/R = S$.

(例) 集合 $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ に対し,

直和分割 $S = \{ \{a\}, \{b, c\}, \{d, e, f\} \}$ とする.

$$\begin{aligned} R &= \bigcup_{A \in S} A \times A \\ &= (\{a\} \times \{a\}) \cup (\{b, c\} \times \{b, c\}) \cup (\{d, e, f\} \times \{d, e, f\}) \\ &= \{(a, a)\} \cup \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\} \\ &\quad \cup \{(d, d), (d, e), (d, f), (e, e), (e, f), (e, d), (f, f), (f, d), (f, e)\} \\ &= \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), \\ &\quad (d, d), (d, e), (d, f), (e, e), (e, f), (e, d), (f, f), (f, d), (f, e)\}. \end{aligned}$$

たとえば,

$$a \in X \Rightarrow (a, a) \in R \text{ (反射律)}$$

$$(b, c) \in R \Rightarrow (c, b) \in R \text{ (対称律)}$$

$$(d, e), (e, f) \in R \Rightarrow (d, f) \in R \text{ (推移律)}$$

$$\begin{aligned}
X/R &= \{ [x] \mid x \in X \} \\
&= \{ [a], [b], [c], [d], [e], [f] \} \\
&= \{ [a], [b], [d] \} \\
&= \{ \{a\}, \{b, c\}, \{d, e, f\} \} = S
\end{aligned}$$

なぜなら,

$$[a] = \{a\}, [b] = \{b, c\} = [c], [d] = \{d, e, f\} = [e] = [f].$$

定理 4. 27.

空でない集合 X に対し,

X の直和分割の全体からなる集合を $\hat{S}$,

X 上の同値関係の全体からなる集合を $\hat{R}$ とする.

このとき,

直和分割 $S \in \hat{S}$ に対し,

同値関係 $R_S = \bigcup_{A \in S} A \times A \in \hat{R}$

を対応させる写像は,

$\hat{S}$ から $\hat{R}$ へ

の全単射である.

この定理より, 有限集合 X 上の 同値関係の総数 は,
 X の 直和分割の総数 と同じである. すなわち,

$$|\hat{S}| = |\hat{R}|$$

例 4. 29. 集合 $\{a, b, c\}$ 上の同値関係をすべて列挙せよ.

(解答)

集合 $\{a, b, c\}$ の直和分割は, その分割の個数を 1, 2, 3 の順にして, 以下の 5 通りである.

直和分割

→ 同値関係

$$S_1 = \{\{a, b, c\}\}$$

$$\rightarrow R_1 = \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$$

$$S_2 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$$

$$\rightarrow R_2 = (\{a, b\} \times \{a, b\}) \cup (\{c\} \times \{c\})$$

$$S_3 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$$

$$\rightarrow R_3 = (\{a\} \times \{a\}) \cup (\{b, c\} \times \{b, c\})$$

$$S_4 = \{\{b\}, \{c, a\}\}$$

$$\rightarrow R_4 = (\{b\} \times \{b\}) \cup (\{c, a\} \times \{c, a\})$$

$$S_5 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

$$\rightarrow R_5 = (\{a\} \times \{a\}) \cup (\{b\} \times \{b\}) \cup (\{c\} \times \{c\})$$

例 4. 30. 集合 $\{a, b, c, d\}$ 上の同値関係をすべて列挙せよ.

定理 4. 31. (直和分割の総数)

m 個の要素をもつ集合 X の直和分割の総数は

n 個のブロックに分割する直和分割の総数は,

$$\sum_{n=1}^m S(m, n)$$

となる. ここで, (第2種スターリング数) X を $\square$ は

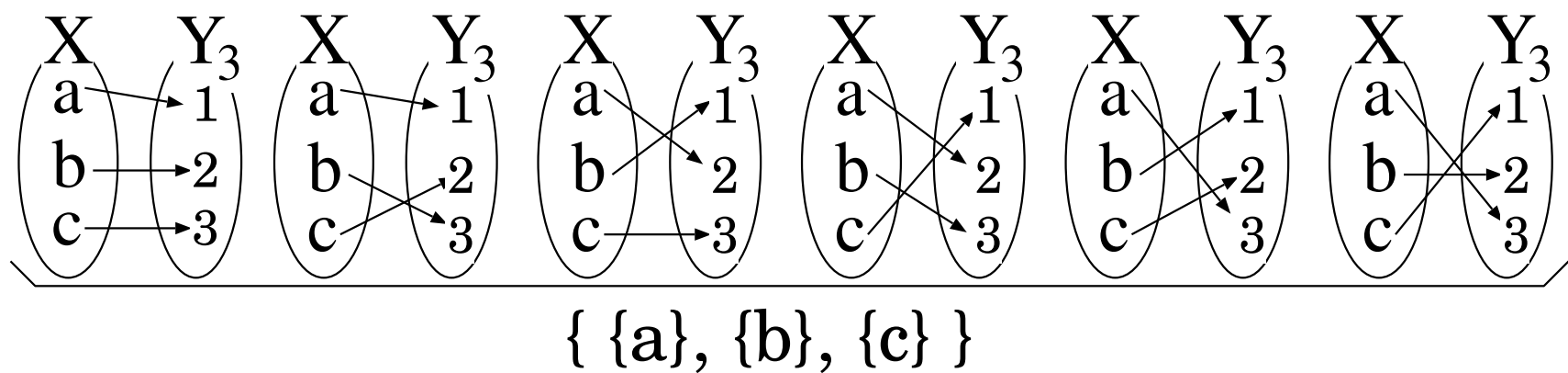
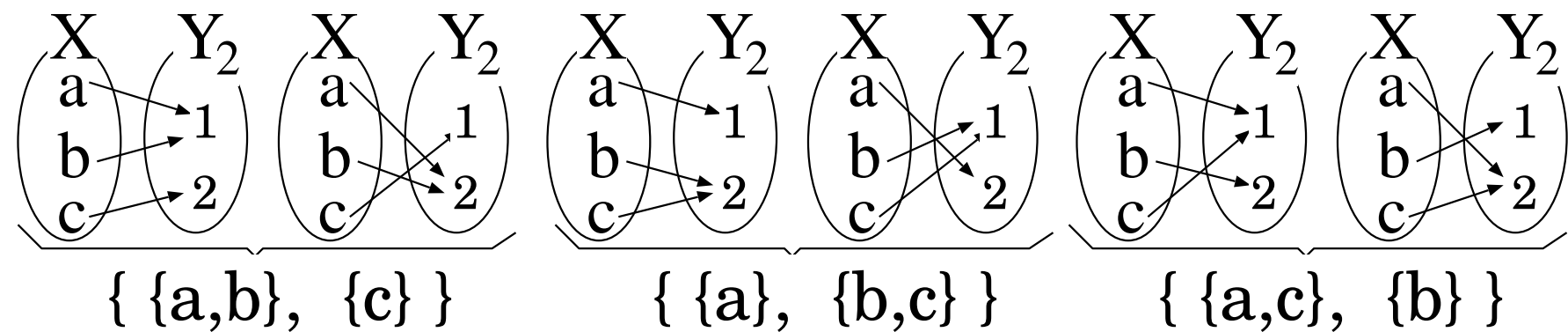
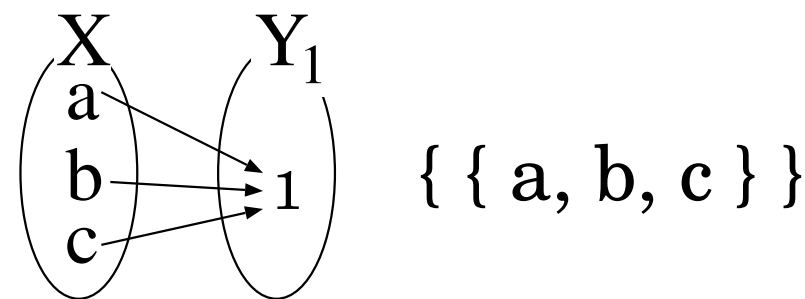
$$S(m, n) := \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m$$

ここで, 式 $S(m, n)$ 中の $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m$ は,
 m 個の要素をもつ集合から n 個の要素をもつ集合への全射の総数.

2007
12/19 訂正

$\frac{1}{n!}$ の意味は ?

$X = \{a, b, c\}, Y_1 = \{1\}, Y_2 = \{1, 2\}, Y_3 = \{1, 2, 3\}$ とする.



確かに、1 つの直和分割 S に対し、 $|S|!$ 通りの全射が存在している.

例 4. 42. $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ 上の関係 $\sim$ を,
任意の $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ に対し,

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \iff m_1 n_2 = m_2 n_1$$

と定義する.

このとき, $\sim$ が $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ 上の同値関係になるを示せ.

分数 $\frac{a}{b}$ とは, $(a, b) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ の $\sim$ による同値類 $[(a, b)]$.

集合 $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ に対し, 同値関係 $\sim$ による商集合

$$(\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})) / \sim$$

は有理数の全体からなる集合 $\mathbf{Q}$ である.

整数 n_1, n_2 が非ゼロであることがポイント.

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \quad \Leftrightarrow \quad m_1 n_2 = m_2 n_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$$

$$\begin{aligned} [(a, b)] &= \{(m, n) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\}) \mid (a, b) \sim (m, n)\} \\ &= \left\{ (m, n) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\}) \mid \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \right\} \\ &= \{(a, b), (m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3), \dots\} \\ &\quad \frac{a}{b} = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_3}{n_3} = \dots \\ &\quad \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= (\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})) / \sim \\ &= \{[(a, b)] \mid (a, b) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})\} \end{aligned}$$

例 4.22 の証明 ($\sim$ は $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ 上の同値関係である)

反射律) 任意の $(m, n) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ に対し,

$$mn = mn \text{ より, } (m, n) \sim (m, n).$$

対称律) 任意の $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ に対し,

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 n_2 = m_2 n_1 \quad (\sim \text{ の定義より})$$

$$\Leftrightarrow m_2 n_1 = m_1 n_2 \quad (A = B \text{ ならば } B = A \text{ より})$$

$$\Leftrightarrow (m_2, n_2) \sim (m_1, n_1). \quad (\sim \text{ の定義より})$$

推移律) 任意の $(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ に対し,

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \text{ かつ } (m_2, n_2) \sim (m_3, n_3)$$

$$\Leftrightarrow m_1 n_2 = m_2 n_1 \text{ かつ } m_3 n_2 = m_2 n_3 \quad (\sim \text{ の定義より})$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_3}{n_3} \quad (n_i \neq 0, i = 1, 2, 3, \text{ より})$$

$$\Leftrightarrow m_1 n_3 = m_3 n_1 \Leftrightarrow (m_1, n_1) \sim (m_3, n_3). \quad (\sim \text{ の定義より})$$

以上より, $\sim$ は 反射律, 対称律, 推移律を満たす.

ゆえに, $\sim$ は $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ 上の同値関係である. ■

4.3 順序関係

定義 4. 43.

反射律, 反対称律, 推移律 の3つを満たす関係を 順序関係, あるいは 半順序関係 と呼ぶ.

順序関係 R が定義されている集合 X を 順序集合 といい, (X, R) と表す.

1. R が順序関係のとき, xRy を $x \leq y$ と表すことがある.
2. $x \leq y$ のとき,
 y は x より (R の意味で) 大きい, あるいは,
 x は y より (R の意味で) 小さいという.
3. $x \leq y$ かつ $x \neq y$ のとき,
 y は x より真に (R の意味で) 大きい,
あるいは, x は y より真に (R の意味で) 小さいといい,
 $x < y$ と表す.
4. $x < y$ であって, $x < z < y$ を満たす z が存在しないとき,
“ x は y の 直前の要素である ”, あるいは,
“ y は x の 直後の要素である ” という.

例 4. 44. S を空でない集合とするとき,

$(2^S, \subseteq)$ は順序集合になる.

ここで, 2^S は S のべき集合, 記号 $\subseteq$ は集合の包含関係を表す.

(証明) $(2^S, \subseteq)$ が反射律, 反対称律, 推移律を満たすことを示せばよい.

反射律) 任意の $A \in 2^S$ に対し, $A \subseteq A$.

反対称律) 任意の $A, B \in 2^S$ に対し,

$A \subseteq B$ かつ $A \supseteq B$ ならば $A = B$.

推移律) 任意の $A, B, C \in 2^S$ に対し,

$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ とする.

任意の $x \in A$ に対し, $x \in B \subseteq C$ より, $x \in C$.

ゆえに, $A \subseteq C$ が成り立つ.

以上より, $\subseteq$ は 反射律, 反対称律, 推移律 を満たす.

ゆえに, $(2^S, \subseteq)$ は順序集合になる.

定義 4. 45. X の要素を次のように作成した図形を ハッセ図 という.

$(X, \leq)$ を順序集合とする.

- i. もし $x < y$ ならば, y を x より上に書く.
- ii. そして, y が x の直後のとき, かつ そのときに限り,
 y と x を線で結ぶ.

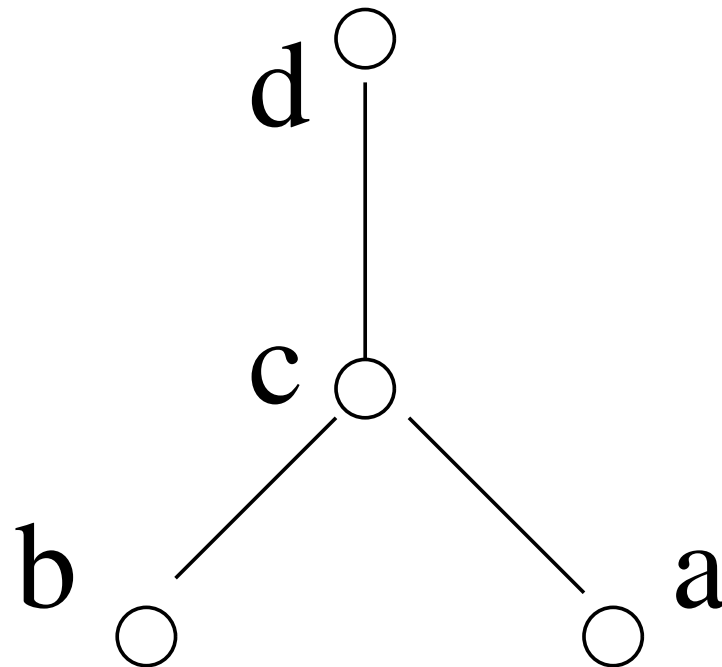
例 4. 46. 順序集合 $(X, \leq)$ を以下のように定義する:

$$X = \{a, b, c, d\},$$

$$\leq = \{(a, c), (b, c), (c, d), (a, d), (b, d), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}.$$

このとき, 順序集合 $(X, \leq)$ のハッセ図を記せ.

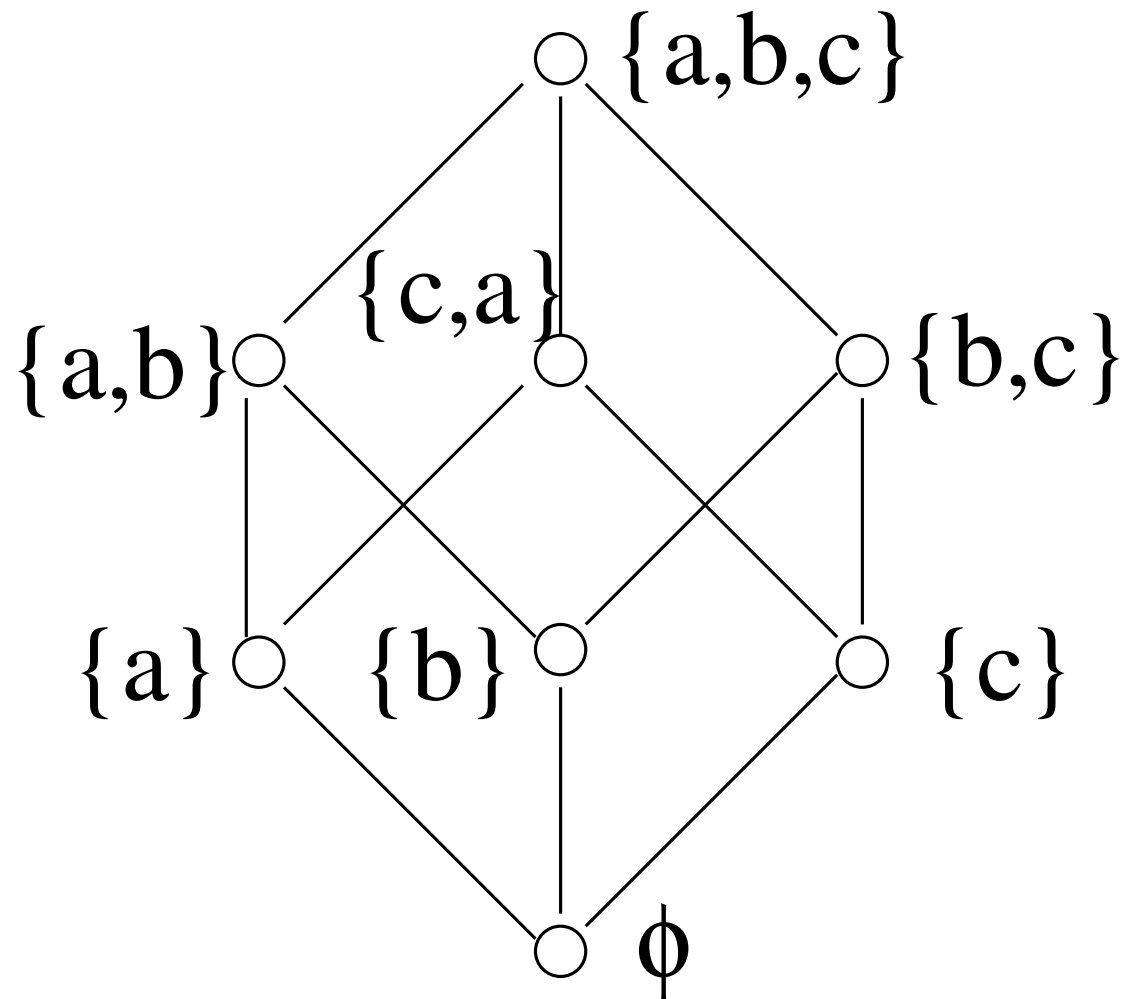
(解答)



例 4. 47. $S = \{a, b, c\}$ とするとき,
順序集合 $(2^S, \subseteq)$ のハッセ図を示せ.

(解答)

$2^S = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$ より,



定義 4. 49. $(X, \leq)$ を順序集合とし, Y を X の空でない部分集合とする.

1. a が Y の 最大元 であるとは : $a \in Y$ かつ $\forall x \in Y : x \leq a$.

Y の最大元を $\max Y$ と表す.

2. a が Y の 最小元 であるとは : $a \in Y$ かつ $\forall x \in Y : a \leq x$.

Y の最小元を $\min Y$ と表す.

3. a が Y の 極大元 であるとは :

$a \in Y$ かつ $\forall x \in X : [(a \leq x \text{ かつ } a \neq x) \Rightarrow x \notin Y]$.

4. a が Y の 極小元 であるとは :

$a \in Y$ かつ $\forall x \in X : [(x \leq a \text{ かつ } a \neq x) \Rightarrow x \notin Y]$.

5. a が Y の 上界 であるとは :

$$a \in X \text{ かつ } \forall x \in Y : x \leq a.$$

6. a が Y の 下界 であるとは :

$$a \in X \text{ かつ } \forall x \in Y : a \leq x.$$

7. a が Y の 上限 であるとは, a が Y の上界の最小元であること.

Y の上限を $\sup Y$ と表す.

8. a が Y の 下限 であるとは, a が Y の下界の最大元であること.

Y の下限を $\inf Y$ と表す.

上記の定義より, 上限, 下限は以下のように表すこともできる.

1. $\overline{Y} := \{a \mid a \in X, a \text{ は } Y \text{ の上界}\}$ とする.

$\overline{Y}$ の最小元が存在すれば, それが Y の上限である.

2. $\underline{Y} := \{a \mid a \in X, a \text{ は } Y \text{ の下界}\}$ とする.

$\underline{Y}$ の最大元が存在すれば, それが Y の下限である.

注意 4. 50.

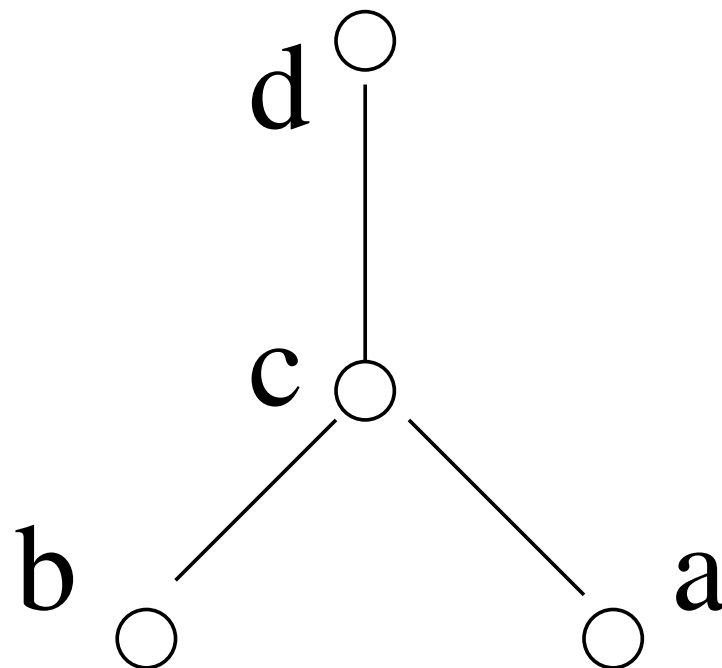
1. 極大元と極小元は必ず存在する.

2. 最大元や最小元は存在するとは限らない.

3. 極大元 (極小元) は複数存在することもある.

4. 最大元 (最小元) は存在するとしてもただ 1 つである.

例 4. 51. 順序集合 $(X, \leq)$ を例 46 と同じものとする. このとき, X の最大元, 最小元, 極大元, 極小元を示せ.



(解答)

最大元: d , 最小元: なし, 極大元: d , 極小元: a, b .

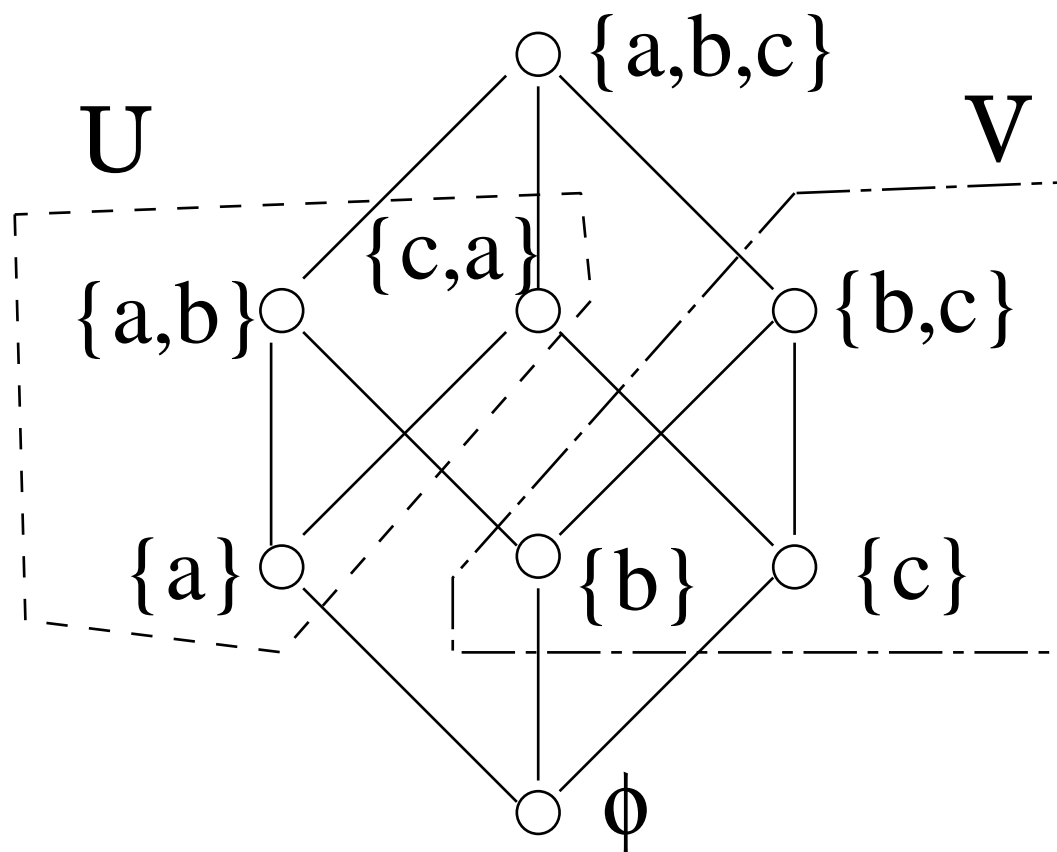
例 4. 52. $S = \{a, b, c\}$ とし, 例 47 と同じ順序集合 $(2^S, \subseteq)$ を考える.
そこで, 2^S の部分集合として,

$$U = \{\{a\}, \{a, b\}, \{c, a\}\}, \quad V = \{\{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$$

とする. このとき, 部分集合 U と V のそれぞれの

最大元, 最小元, 極大元, 極小元, 上界, 下界, 上限, 下限 を示せ.

(解答)



	U	V
最大元	なし	$\{b, c\}$
最小元	$\{a\}$	なし
極大元	$\{a, b\},$ $\{c, a\}$	$\{b, c\}$
極小元	$\{a\}$	$\{b\}, \{c\}$
上界	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\},$ $\{b, c\}$
下界	$\{a\}, \phi$	ϕ
上限	$\{a, b, c\}$	$\{b, c\}$
下限	$\{a\}$	ϕ

定義 4. 56. $(X, \leq)$ を順序集合とする.

$x, y \in X$ に対し,

$x \leq y$ または $y \leq x$

が成り立つとき,

x と y は 比較可能 であるという.

そうでないとき, 比較不能 であるという.

任意の 2 要素が比較可能ならば, $\leq$ を 全順序関係,
あるいは, 線型順序関係 と呼ぶ.

例 4. 57. 関係 $\leq$ を, 整数の全体 $\mathbb{Z}$ 上の通常的大小関係とすれば,
任意の整数 $x, y \in \mathbb{Z}$ に対し,

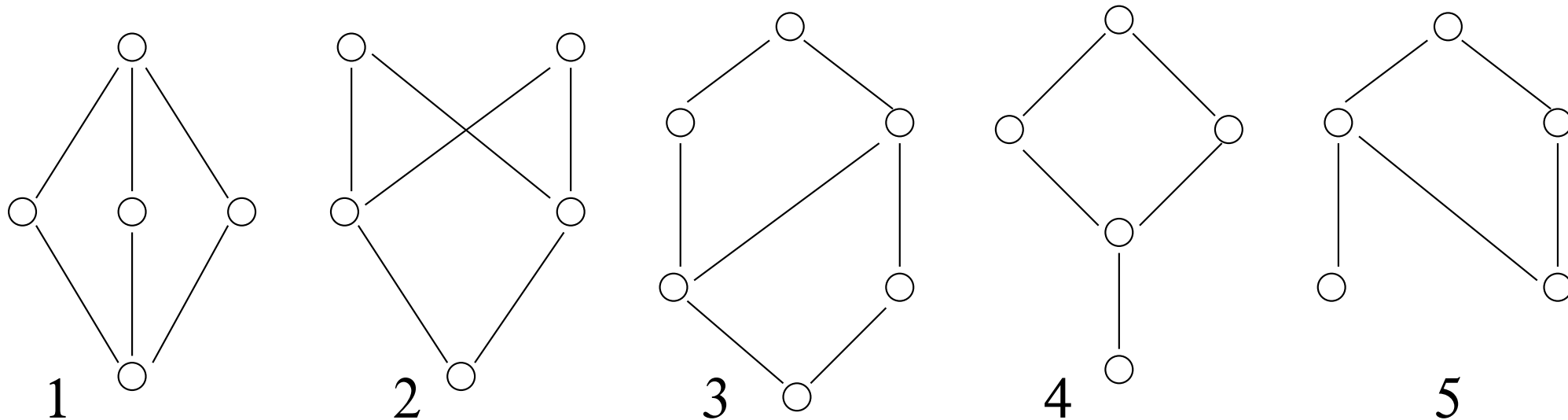
$x \leq y$ あるいは $y \leq x$

のいずれかが成り立つ.

ゆえに, 整数の大小関係 $\leq$ は全順序関係である.

定義 4. 62. $(X, \leq)$ を順序集合とする. 任意の $x, y \in X$ に対し, 集合 $\{x, y\}$ の $\sup\{x, y\}$ と $\inf\{x, y\}$ が存在するとき, $(X, \leq)$ を 束 という.

例 4. 63. 次のハッセ図で示される順序集合は, 束であるかどうか述べよ.



(解) 束である: 1, 3, 4. 束でない: 2, 5.

4.5 関係の閉包

定義 4. 68.

R を $X \times Y$ 上の2項関係, S を $Y \times Z$ 上の2項関係とするととき,
 $X \times Z$ 上の 2 項関係 $R \circ S$ を

$$R \circ S := \{(x, z) \mid \exists y \in Y : [((x, y) \in R) \wedge ((y, z) \in S)]\}$$

と定義する.

$R \circ S$ を R と S の合成, あるいは 積という.

例 4. 69.

R, S, T を, それぞれ $X \times Y, Y \times Z, Z \times W$ 上の 2 項関係とするととき,
結合律

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$

が成り立つ.

(証明) $(x, w) \in R \circ (S \circ T) \Leftrightarrow (x, w) \in (R \circ S) \circ T$ を示せばよい.

定義 4. 70.

R を X 上の関係とする. そのとき, R^+ を以下のように定義する:

1. $R^1 := R;$

2. $n \geq 2$ に対し, $R^n := R^{n-1} \circ R;$

3. $R^+ := \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n.$

例 4. 71.

有限集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 上の関係 R を

表現する行列 $M = (m_{i,j}), 1 \leq i, j \leq n$, が与えられているとする.

このとき, R^2 を表現する行列を求めるにはどうすればよいか.

一般に, R^n を表現する行列を求めるにはどうすればよいか.

(解答のスケッチ)

R^1 の場合)

$$(x_i, x_j) \in R \quad \Leftrightarrow \quad x_i R x_j \quad \Leftrightarrow \quad m_{i,j} = 1$$

$R^2(= R \circ R)$ の場合)

$$\begin{aligned}(x_i, x_k) \in R^2 &\Leftrightarrow x_i(R \circ R)x_k \\&\Leftrightarrow \exists x_j : (x_i R x_j) \wedge (x_j R x_k) \\&\Leftrightarrow \exists j : (m_{i,j} = 1) \wedge (m_{j,k} = 1) \\&\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n m_{i,j} \cdot m_{j,k} \neq 0\end{aligned}$$

最後の積和は、行列 M の i 行目ベクトル と j 列目ベクトル の内積 :

$$\sum_{j=1}^n m_{i,j} \cdot m_{j,k} = (m_{i,1}, \dots, m_{i,n})(m_{1,j}, \dots, m_{n,j})^T \neq 0$$

以上より, R^2 を表現する行列は次のように定めればよい.

- i) M^2 の (i, j) 成分 $\neq 0$ ならば 1,
- ii) そうでなければ 0.

$R^3 (= R^2 \circ R)$ の場合)

R^2 と R の合成 (積) を考えればよい.

$R^n (= R^{n-1} \circ R)$ の場合)

R^{n-1} と R の合成 (積) を考えればよい. ■

1. R を集合 X 上の関係とする.

$x, y \in X$ が xRy を満たすとき, x から y に 1 ステップで到達可能 であるという.

2. $z_1, \dots, z_n \in X$ が存在し,

$$xRz_1 \wedge z_1Rz_2 \wedge \cdots \wedge z_{n-1}Rz_n \wedge z_nRy$$

が成り立つとき,

x から y に $n + 1$ ステップで到達可能であるという.

3. x から y に有限回数のステップで到達可能であるとき,

x から y に到達可能であるという.

4. $R^n = \{(x, y) \mid (x, y) \in X, x \text{ から } y \text{ に, } n \text{ ステップで到達可能}\},$

5. $R^+ = \{(x, y) \mid (x, y) \in X, x \text{ から } y \text{ に到達可能}\}.$

定理 4. 72.

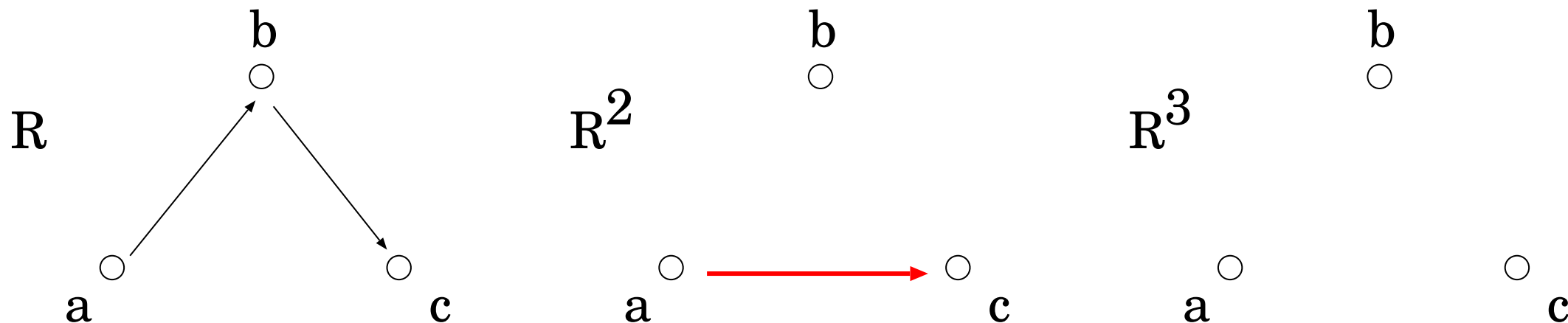
R を集合 X 上の関係とすると、以下が成り立つ.

1. $R^n = R^{n-k} \circ R^k$. ただし、非負整数 n, k は $n - k \geq 0$ を満たす.
2. R^+ は推移的な関係である.

(例) 集合 $X = \{ a, b, c \}$, 関係 $R = \{ (a, b), (b, c) \}$ とする.

1. 関係の積 : $R^2 = R \circ R = \{ (a, c) \}$, $R^3 = R^2 \circ R = \{ \} = \phi$.

2. グラフ :



3. 行列 :

$$\begin{matrix} M & M^2 & M^3 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} .$$

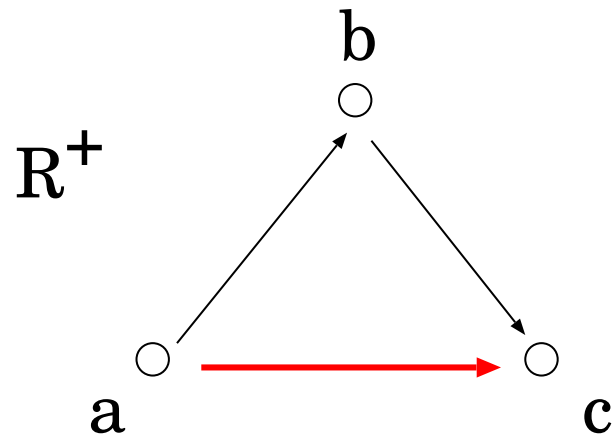
4. R^2 と行列の積について : $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

$$M^2 = M \times M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. R^+ :

$$R^+ = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

$$= R^1 \cup R^2 = \{ (a, b), (b, c), (a, c) \}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(例) 集合 $X = \{ a, b, c, d, e \}$, 関係 $R = \{ (a, b), (b, c), (c, d), (d, e) \}$ とする.

$$R^2 = \{ (a, c), (b, d), (c, e) \}$$

$$R^3 = R^2 \circ R = \{ (a, d), (b, e) \}$$

$$R^3 = R \circ R^2 = \{ (a, d), (b, e) \}$$

$$R^4 = R^3 \circ R = \{ (a, e) \}$$

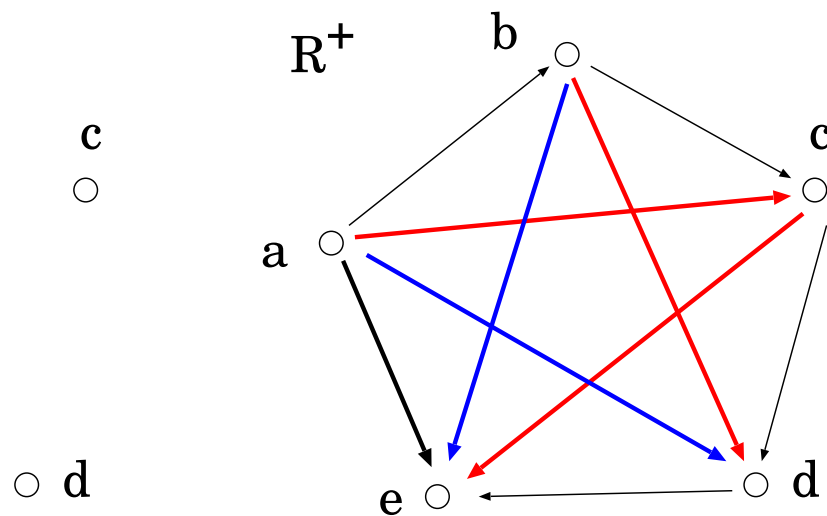
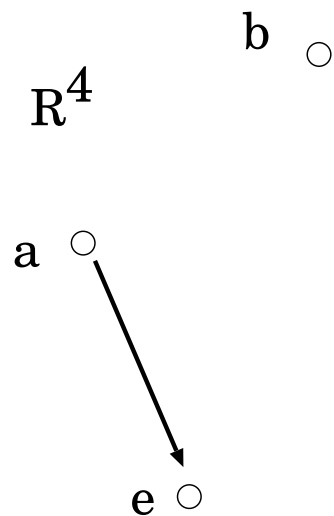
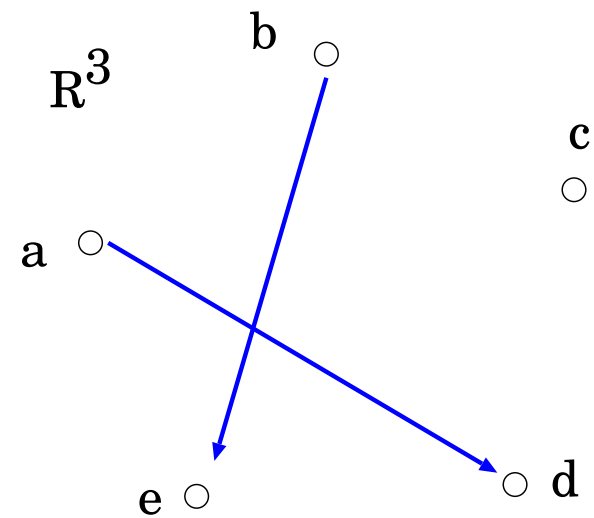
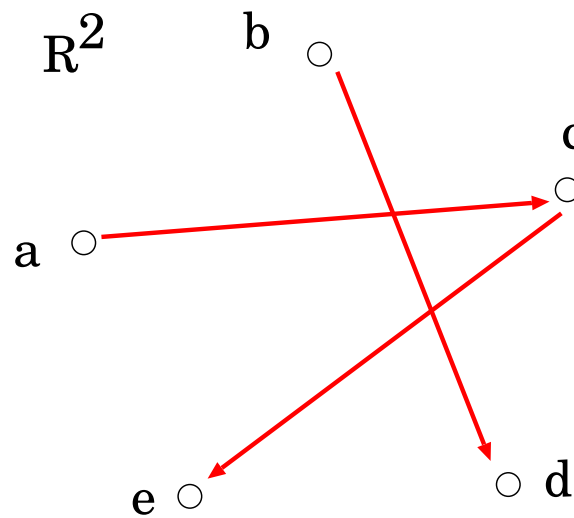
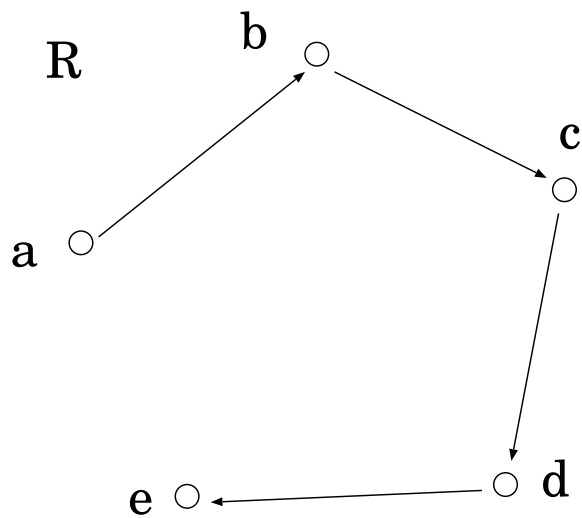
$$R^5 = R^4 \circ R = \{ \} = \phi$$

$$R^+ = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5 \cup \dots$$

$$= R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$$

$$= \{ (a, c), (b, d), (c, e), (a, d), (b, e), (a, d), (b, e), (a, e) \}$$

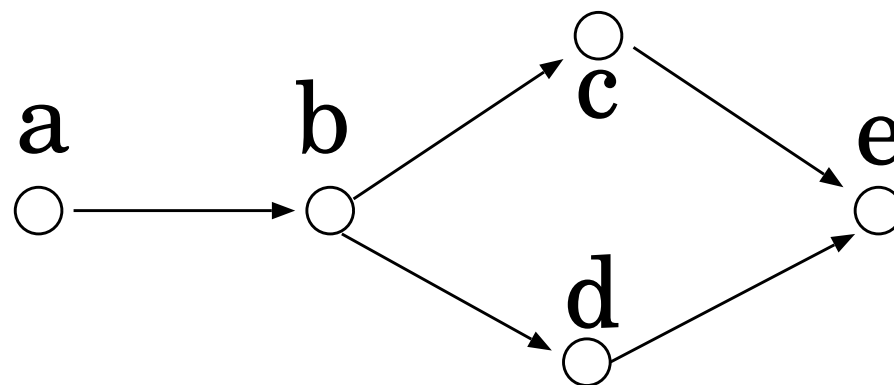
R^n と R^+ に対応するグラフ :



4.5 グラフと隣接行列

4.5.1 その 1 (パスの本数)

1. 与えられたグラフ G :



2. グラフ G に対応する 集合 X と 関係 R :

集合 $X = \{a, b, c, d, e\}$.

関係 $R = \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, e), (d, e)\} (\subseteq X^2)$.

3. グラフ G に対応する 隣接行列 M :

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & a & b & c & d & e \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

4. R^n と M^n の関係 :

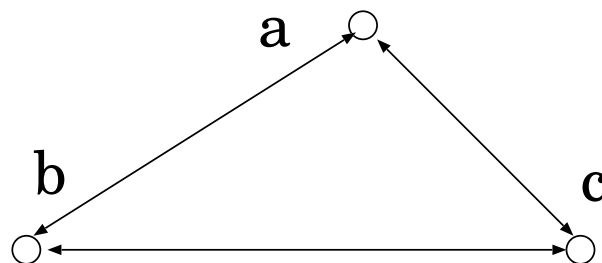
$$\begin{array}{ccc} M^2 & M^3 & M^4 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \end{array}$$

5. 行列 M^n の (i, j) 成分の値は,
 x_i から x_j へ n ステップで到達可能な パス (*path*) の本数を表す.
6. 頂点 x から 頂点 y へ到達するパスとは,
有限個の 有向辺 と 頂点 を経由することで,
 x から y へ到達できる経路のこと.

4.5.2 その 2 (三角形の個数)

1. 集合 $X = \{a, b, c\}$, 関係 $R = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, b), (c, a)\}$.

グラフ G :



2. 隣接行列 M および M^2, M^3 . (隣接行列 M は 対称行列) :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. 1 個の 三角形 に対し, 6 本のパスを数える: aR^3a, bR^3b, cR^3c

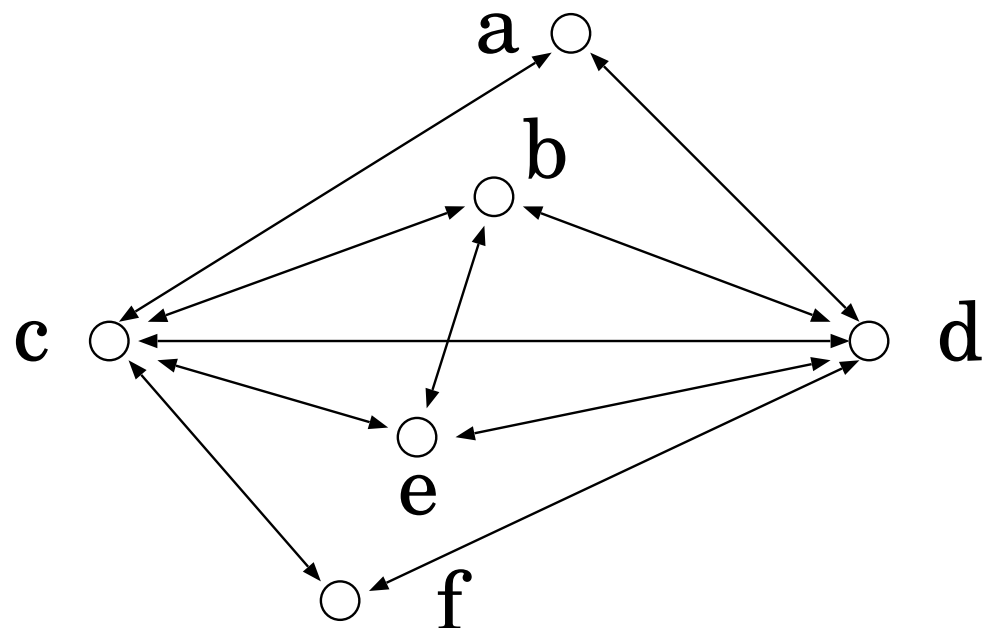
i) 1 個の頂点で 2 回 数える;

(abc, acb), (bca, bac), (cab, cba)

ii) 1 個の三角形に 3 個の頂点がある ; (頂点 a, b, c)

4. グラフ G の中の 三角形の数 $= \frac{1}{6}(2 + 2 + 2) = 1$

1. グラフ G の中には、幾つの三角形があるか？



2. 隣接行列 M および M^3 :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 & 9 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 11 & 11 & 7 & 4 \\ 9 & 11 & 10 & 11 & 11 & 9 \\ 9 & 11 & 11 & 10 & 11 & 9 \\ 4 & 7 & 11 & 11 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 9 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. グラフ G の中の三角形の数 $= \frac{1}{6}(2 + 6 + 10 + 10 + 6 + 2) = 6$

References

- [1] 尾関和彦, (情報技術者のための)離散系数学入門, 共立出版, 2004.
- [2] 尾関和彦, 太田和夫, 國廣昇, “離散数学第一”及び“離散数学第一演習問題集” 電気通信大学情報通信工学科講義資料, 2004.
- [3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 2003.
- [4] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 2003.
- [5] *S. Lipschutz* 著, 成嶋弘監訳, 離散数学 (コンピュータサイエンスの基礎数学), オーム社, 2004(H16).
- [6] 小倉久和, 情報の基礎離散数学 (— 演習を中心とした —), 近代科学社, 2006.
- [7] 町田元, 横森貴, 計算機数学, 森北出版, 1990.