離散数学

— 3. 数学的帰納法 —

3.1 数学的帰納法

3.2 再帰的定義

栗原正純 kuri@ice.uec.ac.jp

(2007/11/13/17:59)

数学的帰納法 *I* では，

$n=1$ において $P(n)$ が真であること

を確かめ，その後，

すべての自然数 n に対して $P(n)$ が真であること

を導いた．

しかし，帰納法の基礎において，常に $n=1$ とする必要はなく，

一般の整数でも成り立つ．そのことを次の定理にて示す。

3.1 数学的帰納法

定理 1. $M \subseteq \mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ とする。
もし，M が次の条件

1. $1 \in M$,

2. $\forall k \in \mathbf{N} : [k \in M \Rightarrow k+1 \in M]$

を満たすならば，$M = \mathbf{N}$ である。

(証明の方針) 対偶を用いる．

$M \neq \mathbf{N}$ を仮定すると，条件 *1* と *2* は同時に成立しないことを示す．

i) $1 \notin M$ ならば 条件 *1* “$1 \in M$ ” が成立しない．

ii) $1 \in M$ とする．差集合 $\mathbf{N} - M$ の最小値を m とすれば，

$m \in \mathbf{N}$ かつ $m \notin M$ かつ $m-1 \in M \subseteq \mathbf{N}$ である．すなわち，

条件 *2* “$m-1 \in \mathbf{N} : [m-1 \in M \Rightarrow m \in M]$ ” が成立しない．■

定理 2. *(数学的帰納法 I)*
P を $\mathbf{N}$ 上で定義された述語，$P : \mathbf{N} \longrightarrow \{T,F\}$，とする。
もし、次の条件 *1*, *2* が成り立つならば，$\forall n \in \mathbf{N} : P(n)$ である．

1. $P(1)$,

2. $\forall k \in \mathbf{N} : [P(k) \Rightarrow P(k+1)]$

(証明) 条件 *1*, *2* が成立するとする．$M := \{n \in \mathbf{N} \mid P(n)\} (\subset \mathbf{N})$ とする．

条件 *1* より、$P(1)$ が成立するから，$1 \in M$．

さらに，条件 *2* と M の定義より，任意の $k \in \mathbf{N}$ に対し，

$$k \in M \Rightarrow P(k) \Rightarrow P(k+1) \Rightarrow k+1 \in M.$$

したがって，前記の定理より，$M = \mathbf{N}$.

ゆえに，任意の $k \in \mathbf{N}$ に対し，$k \in M$ であるから $P(n)$ が成り立つ．■

1. を帰納法の基礎，*2.* を帰納ステップ，*2.* の $P(k)$ を帰納法の仮定

例 3. 連続する *3* つの自然数の 3 乗の和は，9 で割り切れることを、数学的帰納法 *I* を用いて証明せよ。

(証明) 自然数 n に対し，$f(n) = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ とする．
命題 $P(n)$ を $P(n) =$ “ $f(n)$ は 9 で割り切れる ”とする．

1. *(帰納法の基礎)* $1 \in \mathbf{N}$ に対し，$f(1) = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 4 \times 9$ より，$P(1)$ は成り立つ．

2. *(帰納ステップ)* 自然数 k に対し，$P(k)$ が成り立つと仮定する *(帰納法の仮定)*．このとき，$P(k+1)$ について調べる．

$$\begin{aligned} f(k+1) &= (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 \\ &= (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 \\ &= k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9(k^2+3k+3) \\ &= P(k) + 9(k^2+3k+3) \end{aligned}$$

これより，$f(k+1)$ は 9 で割り切れ，$P(k+1)$ が成り立つ．

以上より，数学的帰納法 *I* より，任意の自然数 n に対し，$P(n)$ は成り立つ．■

定理 5. *(数学的帰納法 II)* $n_0 \in \mathbf{Z} = \{\ldots,-1,0,1,\ldots\}$ を任意に固定した整数とし，P を n_0 以上の整数に対して定義された述語とする．
もし，次の条件 *1*, *2* が成り立つならば，$\forall n \geq n_0 : P(n)$ である．

1. $P(n_0)$,

2. $\forall k \geq n_0 : [P(k) \Rightarrow P(k+1)]$

(証明) $n := m - 1 + n_0$ とすると，$Q(m) := P(m-1+n_0)$ は，

$\mathbf{N}$ 上で定義された述語となる．($m = 1,2,\ldots$)

そして,条件 *1*, *2* が成立するならば，

1'. $Q(1) = P(n_0)$ より，$Q(1)$ は真．

2'. $Q(k) = P(k-1+n_0)$ かつ $Q(k+1) = P((k+1)-1+n_0)$．そして，

$P(k-1+n_0) \Rightarrow P((k+1)-1+n_0)$ より $Q(k) \Rightarrow Q(k+1)$．

したがって，数学的帰納法 *I* より，$\forall m \in \mathbf{N} : Q(m)$ が成り立つ．

すなわち、$\forall n \geq n_0 : P(n)$ が成り立つ．■

例 6. *3* 円と *4* 円の切手だけで *6* 円以上の任意の郵便代金を支払えることを数学的帰納法 *II* を用いて証明せよ．

(証明) $f(a,b) = 3a + 4b$ とする．

1. $k = 6 (= n_0)$ のとき，$(a,b) = (2,0)$ とすれば $f(2,0) = 6$．

2. $k \geq 6$ に対し，$f(a_1,b_1) = k$ となる (a_1,b_1) が存在すると仮定する．
このとき，$k+1$ に対しても $f(a_2,b_2) = k+1$ となる (a_2,b_2) が存在することを示す．

ここで，$(a,b) = (3,-2) = (-1,1)$ のとき，$f(a,b) = 1$ に注意する．

i. $a_1 = 0$ のとき，$4b_1 = k \geq 6$ より、$b_1 \geq 2$．したがって、

$$\begin{aligned} k+1 &= f(a_1,b_1) + f(3,-2) = 3a_1 + 4b_1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) \\ &= 3(a_1+3) + 4(b_1-2) = f(a_1+3, b_1-2). \end{aligned}$$

このとき，$a_1 + 3 \geq 0$ かつ $b_1 - 2 \geq 0$ より，

$(a_2,b_2) = (a_1+3, b_1-2)$ とすれば $f(a_2,b_2) = k+1$ となる．

ii. $a_1 > 0$ のとき，

$$k+1 = f(a_1,b_1) + f(-1,1) = f(a_1-1, b_1+1).$$

このとき，$a_1 - 1 \geq 0$ かつ $b_1 + 1 \geq 0$ より，

$(a_2,b_2) = (a_1-1, b_1+1)$ とすれば $f(a_2,b_2) = k+1$ となる．

以上のことより，数学的帰納法 *II* より，*3* 円と *4* 円の切手だけで *6* 円以上の任意の郵便代金を支払えることが示された．■

6 以上の任意の整数 n に対し，

$$f(a,b) = n$$

を満たす非負整数の組 (a,b) が存在する．

注意 **7.**

一般に、互いに素な整数 $x,\ y$ と非負整数 $a,\ b$ に対し、整数 $(x-1)(y-1)$ 以上のすべての整数を $a\cdot x+b\cdot y$ のかたちで表現できる。■

下線部分のプリント要訂正: $(a-1)(b-1) \to (x-1)(y-1)$

$(3-1)(4-1)=2\times 3=6$

例 **8.**

50 円と **70** 円の切手だけで **240** 円以上の任意の郵便代金を支払えることを証明せよ。
ただし, 代金は **10** 円単位とする.

$(50-10)(70-1)=40\times 60=240$

3.2 再帰的定義

定義 **13.** (再帰的定義)

ある種の集合は, 次のように再帰的に定義できる.

1. (初期ステップ) 集合 S の要素なるものを幾つか列挙する。
2. (再帰ステップ) S の要素であることが分かっているものを用いて、S の新たな要素を定義する。
3. (限定句) 上記の **1**, **2** で定まるものだけが S の要素であることを述べる。(この条件は、省略することが多い)

定理 **9.** (数学的帰納法 ***III***)

P を $\mathbf{N}$ 上で定義された述語とする.

もし, 次の条件 **1**, **2** が成り立つならば, $\forall n\in\mathbf{N}: P(n)$ である.

1. $P(1)$,
2. $\forall k\in\mathbf{N}: [(1\le \forall \ell \le k: P(\ell))\Rightarrow P(k+1)]$

(定理の主張)

(数学的帰納法 ***I***) : $\forall n\in\mathbf{N}: P(n)$

「$P(k)$ が成り立つならば, $P(k+1)$ も成り立つ」

(数学的帰納法 ***III***) : $\forall n\in\mathbf{N}: P(n)$

「$P(1), P(2), \ldots, P(k)$ が成り立つならば, $P(k+1)$ も成り立つ」

例 **14.** (再帰的定義)

次のように再帰的に定義される集合 S はどのような集合であるか。

1. A さんを S の要素とする。
2. x さんが S の要素ならば、x さんの子供を S の要素とする。
3. 上記の **1**, **2** で定まるものだけを S の要素とする。

(解答)

1 より、A さんは S に含まれる。

2 より、A さんの子供はすべて S に含まれる。

さらに、A さんの子供の子供も S に含まれる。

これが繰り返される。

3 より、上記以外の人は S には含まない。

以上より、集合 S は A さんの子孫の全体からなる集合である。■

例 **10.**

数列 $a_1, a_2, \ldots$ を $a_1=1,\quad a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_k+1\ (n\ge 2)$ と定義する. 任意の自然数 n に対し, $a_n=2^{n-1}$ が成り立つことを数学的帰納法 ***III*** により証明せよ。

(証明)

i. $n=1$ のとき, $a_n=a_1=1=2^0=2^{n-1}$ より, 等式が成り立つ.

ii. $k=1,2,\ldots,n$ のすべての k に対し, $a_k=2^{k-1}$ が成り立つと仮定する.
そして, $n+1$ の場合に, $a_{n+1}=2^{(n+1)-1}=2^n$ が成り立つことを示す.

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a^k+1=\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}+1=(2^0+2^1+\ldots+2^{n-1})+1=\frac{(1-2^n)}{1-2}+1=2^n$$

以上のことより、数学的帰納法 ***III*** より、任意の自然数nに対し、$a_n=2^{n-1}$ が成り立つ。■

ヒント: $(x^0+x^1+x^2+\ldots+x^{n-1})(1-x)=1-x^n$

定義 **15.** ある種の関数 $f:\mathbf{N}\longrightarrow\mathbf{N}$ は, 次のように再帰的に定義できる.

1. (初期ステップ) 幾つかの関数の値 $f(1), f(2), \ldots, f(m)$ を列挙する。
2. (再帰ステップ) $n>m$に対し、$f(k), 1\le k\le m$ の中の幾つかを用いて $f(n)$ を定義する。

再帰的定義の例として、次の階乗の関数や漸化式があげられる。

例 **11.**

任意の自然数 a, r に対し, a から始まる連続する r 個の整数の積 $a(a+1)(a+2)\cdots(a+r-1)$ は $r!$ で割り切れる.

$5\times 4\times 3(=60)$ は $3!=3\times 2\times 1(=6)$ で割り切れる.

例 **12.**

n 個の中から r 個を取り出す組合せの総数

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1))}{r!}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$$

は常に 整数値 となる.

$$\binom{5}{3}=\frac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}=\frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{(3\times 2\times 1)(2\times 1)}=10$$

例 **16.** (再帰的定義)

1. (階乗) 関数 $f(n)=n!, n\in\mathbf{N}$ は、次のように定義される。

   i. $f(1)=1$,

   ii. $f(n)=nf(n-1), n\ge 2$

   このとき, $a_n=f(n)$ とすれば,
   数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ は, $1, 2, 6, 24, \ldots$ となる.

2. (等差数列) 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots,$ は、次のように定義される。

   i. $a_1=3$,

   ii. $a_{n+1}=a_n+2, n\ge 1$

   このとき, 数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ は, $3, 5, 7, 9, \ldots$ となる.
   これは公差 2 の等差数列で, $a_n=3+2(n-1)$ と書ける.

3. *(フィボナッチ数 (Fibonacci number))*

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots,$ は、次のように定義される。

i. $a_0 = 0,\ a_1 = 1,$

ii. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2$

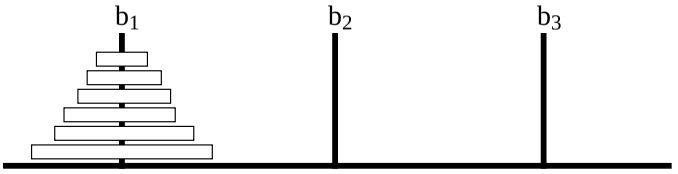
このとき, 数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$ は,

$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots$

となる.

ファイボナッチ数列の第 n 項 a_n はどのように書き表されるか.

(ハノイの塔 (Tower of Hanoi))



1. n 個の円盤を移し終えるために必要な操作回数を $f(n)$ とするとき, $f(n)$ と $f(n-1)$ の間の再帰的な関係を求めよ.

2. $f(n)$ が n のどのような関数になるかを予想し, それを数学的帰納法で証明せよ.

例 **17.** *(フィボナッチ数列 (Fibonacci number))*

下記の再帰式で定義される数列を フィボナッチ数列 という。

i. $a_0 = 0,\ a_1 = 1,$

ii. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2$

この再帰式に対し, 多項式 $X^2 - X - 1$ を その特性多項式という.
この多項式の **2** 根を α, β $(\alpha > \beta)$ とすると,
ファイボナッチ数列の第 n 項は

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$

と表されることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

ここで, $X^2 - X - 1$ の根である α, βについて,

$$\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = -1$$

であり, また, 解の公式より, $X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. $(\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2})$.

(証明) n 個の円盤を小さい順に $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}, D_n$ とする.

1. ***i.*** $n-1$ 個の円盤 $D_1, \ldots, D_{n-1}$ を棒 b_1 から b_3 に移す. $f(n-1)$ 回

ii. 一番大きい円盤 D_n を 棒 b_1 から b_2 に移す. 1 回

iii. $n-1$ 個の円盤 $D_1, \ldots, D_{n-1}$ を棒 b_3 から b_2 に移す. $f(n-1)$ 回

ゆえに,

$$f(n) = 2f(n-1) + 1.$$

(証明) $(\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = -1)$

1. $n = 0$ のとき, $a_0 = 0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^0 - \beta^0)$.

$n = 1$ のとき, $a_1 = 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^1 - \beta^1)$.

2. n のとき, $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ は正しいと仮定する.

このとき, $n+1$ についても正しいことを示す。

$$\begin{aligned}\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} &= (\alpha^n - \beta^n)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) \\ &= \sqrt{5}a_n(\alpha + \beta) - \alpha\beta\sqrt{5}a_{n-1} \\ &= \sqrt{5}a_n + \sqrt{5}a_{n-1} = \sqrt{5}(a_n + a_{n-1}) \\ &= \sqrt{5}a_{n+1}.\end{aligned}$$

ゆえに, $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$ が成り立つ。

以上より, 数学的帰納法より, 0 を含む 任意の自然数 n について

$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ が成り立つ。∎

2.

n		$f(n)$	$f(n) - f(n-1)$
1	$1 =$	1	
2	$2 \times 1 + 1 =$	3	$2 = 2^1$
3	$2 \times 3 + 1 =$	7	$4 = 2^2$
4	$2 \times 7 + 1 =$	15	$8 = 2^3$
5	$2 \times 15 + 1 =$	31	$16 = 2^4$

これより,

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k + 1, \quad n \geq 1$$

と推測される。さらに, $f(n)$ を整理し、

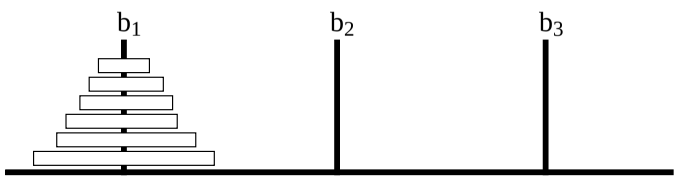
$$f(n) = \frac{2^n - 2}{2 - 1} + 1 = 2^n - 1$$

となる。

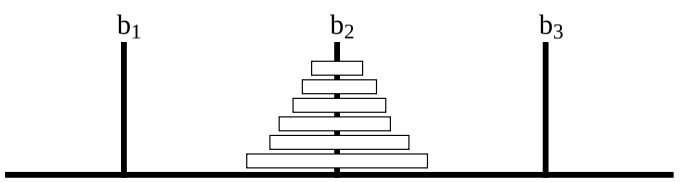
あとは, これが正しいことを、数学的帰納法を用いて示せばよい. ∎

例 **18.** *(ハノイの塔 (Tower of Hanoi))*

はじめ



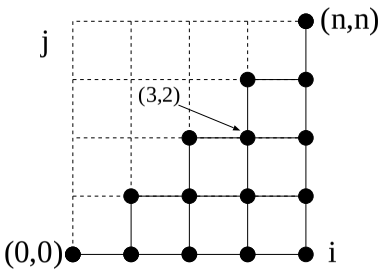
おわり



$$f(n) = \frac{2^n - 2}{2 - 1} + 1 = 2^n - 1$$

n	$f(n) = 2^n - 1$	
10	$2^{10}/(60) = 17.06666667$	約 ***17*** 分
20	$2^{20}/(60 * 60 * 24) = 12.1362963$	約 ***12*** 日
25	$2^{25}/(60 * 60 * 24 * 365) = 1.064004059$	約 ***1*** 年
30	$2^{30}/(60 * 60 * 24 * 365) = 34.04812988$	約 ***34*** 年

例 **19.** *(カタラン数 (Catalan numbers))* カタラン数 C_n は，図のような $n \times n$ の格子上において，格子点 $(0,0)$ から (n,n) へ至る最短経路の総数である。ただし，図の実線部分のみが利用できる経路である．



1. カタラン数 C_n は，次のような再帰的な関係をもつことを示せ．

$C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$.

2. カタラン数 C_n は，$C_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ と表されることを示せ。

References

[1] 尾関和彦，*(*情報技術者のための*)*離散系数学入門，共立出版，***2004.***

[2] 尾関和彦，太田和夫，國廣昇，“離散数学第一”及び“離散数学第一演習問題集” 電気通信大学情報通信工学科講義資料，***2004.***

[3] 松坂和夫，集合・位相入門，岩波書店，***2003.***

[4] 松坂和夫，代数系入門，岩波書店，***2003.***

[5] ***S. Lipschutz***著，成嶋弘監訳，離散数学 *(*コンピュータサイエンスの基礎数学*)*，オーム社，***2004(H16).***

[6] 小倉久和，情報の基礎離散数学 *(–* 演習を中心とした *–)*，近代科学社，***2006.***

[7] 町田元，横森貴，計算機数学，森北出版，***1990.***