離散数学

— 2. 論理 —

2.1 論理命題

2.2 述語と限定記号

栗原正純 kuri@ice.uec.ac.jp

(2007/11/13/16:10)

次の文章の内容は「正しい」ですか、それとも、「正しくない」ですか.

1. $1+2=5$. 正しい ・ 正しくない
2. 三角形の内角の和は *180* 度である. 正しい ・ 正しくない
3. 各桁の数字の和が *3* で割り切れる数は、*3* で割り切れる. 正しい ・ 正しくない
4. 犬と猿は仲がよくない. 正しい ・ 正しくない
5. 風が吹けば桶屋が儲かる. 正しい ・ 正しくない

2.1 論理命題

1. 論理命題とは, “ かつ ”, “ または ”, “ ならば ” などの自然言語で表される 論理 を, 記号 を用いて 形式化 したもの.
2. 命題とは, “ 真(しん) ”か “ 偽(ぎ) ” かが明確に定まっている 陳述 のこと.
   ここで, 真とは, “ 正しい ” こと, 偽 とは, “ 正しくない ” こと
3. 陳述とは, これはこうである というような “ 主張 ” である.
4. 命題が 真 であるとき, それが 成り立つ, あるいは, 成立する ともいう.

例 *1.* 次の陳述は 命題か, 命題でないか.

1. $1+2=5$. (偽であるから, 命題である)
2. 三角形の内角の和は *180* 度である. (真であるから, 命題である)
3. 各桁の数字の和が *3* で割り切れる数は, *3* で割り切れる. (真であるから, 命題である)
4. 犬と猿は仲がよくない. (真偽が明確でないから, 命題ではない)
5. 風が吹けば桶屋が儲かる. (真偽が明確でないから, 命題ではない)

定義 *2.* (論理記号)

1. p, q を命題
2. 真 *(True)* を T, 偽 *(False)* を F で表す
3. T, F を 真理値 という
4. 命題結合記号とよばれる 論理記号 $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ による真理値を次の 真理値表 によって定義する.

p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$p\Rightarrow q$	$p\Leftarrow q$	$p\Leftrightarrow q$	$\neg p$
T	T	T	T	T	T	T	F
T	F	T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	F	F	T	T	T	T

1. $p\vee q$: p と q の 論理和 という.
   “ p または q ” という意味を表す.
2. $p\wedge q$: p と q の 論理積 という.
   “ p かつ q ” という意味を表す.

p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$p\Rightarrow q$	$p\Leftarrow q$	$p\Leftrightarrow q$	$\neg p$
T	T	T	T	T	T	T	F
T	F	T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	F	F	T	T	T	T

3. $p\Rightarrow q$: “ p は q を 含意 (がんい) する ” という.
   “ p ならば q ” という意味を表す.
   注 *1)* $(p\Rightarrow q)=F$ となるのは, $(p=T)\wedge(q=F)$ のときのみ.
   注 *2)* $p=F$ ならば常に $(p\Rightarrow q)=T$ となる.

p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$p\Rightarrow q$	$p\Leftarrow q$	$p\Leftrightarrow q$	$\neg p$
T	T	T	T	T	T	T	F
T	F	T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	F	F	T	T	T	T

   注 *3)* $p\Leftarrow q$ は, $p\Rightarrow q$ とは異なることに注意する.

4. “ $(p\Rightarrow q)=T$ ” のとき, “ p は q の 十分条件 である ”といい, “ q は p の 必要条件 である ”という.
5. “ $p\Leftrightarrow q$ ” は “ $(p\Rightarrow q)\wedge(p\Leftarrow q)$ ” と論理的に等しい.
6. “ $p\Leftrightarrow q$ ” が真のとき, すなわち, “ $(p\Leftrightarrow q)=T$ ” のとき, p と q は互いに他の必要十分条件であるという. また, p と q は同値であるという.
7. *i)* p と q が同値であることと,
   ii) p と q の真理値が一致することは同じこと.
   したがって, “ $p\Leftrightarrow q$ ” を “ $p=q$ ”とも書く.

p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$p\Rightarrow q$	$p\Leftarrow q$	$p\Leftrightarrow q$	$\neg p$
T	T	T	T	T	T	T	F
T	F	T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	F	F	T	T	T	T

8. $\neg p$: p の否定という.

p	$\neg p$
T	F
F	T

複合命題

1. 複合命題とは, 基本命題を論理記号で結合することにより構成される命題である.
   - *i.* 基本命題 : $p,\ q$
   - *ii.* 複合命題 : $p \vee q,\ p \wedge q,\ p \Rightarrow q$
2. 何と何が結合されるかを明示するために, カッコ " (", ") " を用いる.
3. ただし, 否定 $\neg$ は最も結合が強いとし, カッコを省略することがある.
   - *i.* $p,\ q$ を基本命題とする.
   - *ii.* 複合命題 $\neg p \vee q$ は $\neg(p \vee q)$ ではなく, $(\neg p) \vee q$ である.

定理 3. 任意の命題pに対し, 以下の等式が成り立つ.

1. $p \vee T = T,\ p \wedge T = p.$
2. $p \vee F = p,\ p \wedge F = F.$
3. $p \vee \neg p = T,\ p \wedge \neg p = F.$
4. $\neg(\neg p) = p.$

(等式を証明するための方針)

- *i.* " $p = q$ " であるとは, p と q が 同値 であること。
- *ii.* p と q は同値であるということは, " $(p \Rightarrow q) = T \wedge (p \Leftarrow q) = T$ " すなわち, " $(p \Leftrightarrow q) = T$ "
- *iii.* p と q が 同値 であることは, p と q の 真理値が一致する ことと同じ.

真理値が一致するを示そう.

1. $p \vee T = T,\ p \wedge T = p.$
2. $p \vee F = p,\ p \wedge F = F.$
3. $p \vee \neg p = T,\ p \wedge \neg p = F.$
4. $\neg(\neg p) = p.$

1.

p	T	$p \vee T$	$p \wedge T$
T	T	T	T
F	T	T	F

2.

p	F	$p \vee F$	$p \wedge F$
T	F	T	F
F	F	F	F

3.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

4.

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
T	F	T
F	T	F

定理 4. 任意の命題 p, q, r に対し, 以下のことが成り立つ.

1. $p \vee q = q \vee p,$
   $p \wedge q = q \wedge p.$ (交換律)
2. $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r),$
   $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r).$ (結合律)
3. $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r),$
   $(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r).$ (分配律)
4. $p \vee p = p,$
   $p \wedge p = p.$ (ベキ等律)
5. $(p \vee q) \wedge p = p,$
   $(p \wedge q) \vee p = p.$ (吸収律)

(等式 "=" (同値であること) を証明するための方針)

- *i.* 右辺と左辺の真理値が一致することを示せばよい . (真理値表の作成)
- *ii.* "(左辺$\Rightarrow$右辺)$= T$ かつ (左辺$\Leftarrow$右辺$) = T$" を示せばよい .
  このとき, (左辺$\Rightarrow$右辺)$= T$ を示すには、
  「 " 左辺$= T$ のとき , 右辺$= T$ となる " 」 ことを示せば十分であることに注意する .
  言い替えると、「 " 左辺$= T$ のとき , 右辺$= F$ とならない " 」 ことを示す。
  なぜなら, 含意 $\Rightarrow$ の定義より,

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ (分配律)

(証明) 真理値表で示す。

p	q	r	$p \vee q$	左辺	$p \wedge r$	$q \wedge r$	右辺
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

上記真理値表より, 左辺と右辺の真理値は一致する。
ゆえに, 左辺$=$右辺 が成り立つ. ∎

$(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ (分配律)

(別証明) "(左辺$\Rightarrow$右辺)$= T$ かつ (左辺$\Leftarrow$右辺$) = T$" を示す。

i. $\Rightarrow$) $((p \vee q) \wedge r) = T$ であるとする.
すると , $(p \vee q) = T$ かつ $r = T$ である .
すなわち , $p = T$ または $q = T$ であり, かつ $r = T$ である .
したがって , *1)* $p = T$ かつ $r = T$ ならば $(p \wedge r) = T$. または ,
2) $q = T$ かつ $r = T$ ならば $(q \wedge r) = T$.
ゆえに , $((p \wedge r) \vee (q \wedge r)) = T$. (左辺$\Rightarrow$右辺)$= T$ が言えた.

ii. $\Leftarrow$) 次に , $((p \wedge r) \vee (q \wedge r)) = T$ であるとする.
すると , $(p \wedge r) = T$ または $(q \wedge r) = T$ である .
これより , "$p = T$ かつ $r = T$" または "$q = T$ かつ $r = T$".
すなわち , $p = T$ または $q = T$であり , かつ $r = T$ である .
ゆえに , $((p \vee q) \wedge r) = T$. (左辺$\Leftarrow$右辺$) = T$ が言えた.

以上の *i*, *ii* より, 左辺$=$右辺 が成り立つことが言えた . ∎

定理 5. (ド・モルガンの法則)

任意の命題 p, q に対し，以下のことが成り立つ．

1. $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$.
2. $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.

1. $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$.
2. $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.

(証明) 以下の真理値表にて示す．

p	q	$p \vee q$	1.左辺 $\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	1.右辺 $\neg p \wedge \neg q$	$p \wedge q$	2.左辺 $\neg(p \wedge q)$	2.右辺 $\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	F	F	F	T	F	F
T	F	T	F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	F	T	T

上記の真理値表より，*1*, *2* のいずれの式も，その左辺と右辺の真理値は一致する．ゆえに，等号が成り立つ．

1. $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

(別証明) $\Rightarrow$ かつ $\Leftarrow$ を示す。
(例えば $\Rightarrow$ を示すには，「$\neg(p \vee q) = T$ とき $\neg p \wedge \neg q = T$」を示せばよい)

i. $\Rightarrow$) $\neg(p \vee q) = T$ ならば $p \vee q = F$.

$p \vee q = F$ ならば $p = F$ かつ $q = F$. すなわち，

$\neg p = T$ かつ $\neg q = T$ であり，$\neg p \wedge \neg q = T$.

ゆえに，$\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$ が成り立つ．$(\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q) = T$

ii. $\Leftarrow$) $\neg p \wedge \neg q = T$ ならば $\neg p = T$ かつ $\neg q = T$ であり，
$p = F$ かつ $q = F$.

したがって，$p \vee q = F$ より，$\neg(p \vee q) = T$ となる．

ゆえに，$\neg(p \vee q) \Leftarrow \neg p \wedge \neg q$ が成り立つ．$(\neg(p \vee q) \Leftarrow \neg p \wedge \neg q) = T$

以上 *1*, *2* より，$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ は成り立つ．■ (プリント訂正: $\Rightarrow$ を $=$ へ)

例 6. (論理記号の変換)

1. $p \vee q$ を $p, q, \neg, \wedge$ のみで表せ．
2. $p \vee q$ を $p, q, \neg, \Rightarrow$ のみで表せ．
3. $p \wedge q$ を $p, q, \neg, \vee$ のみで表せ．
4. $p \wedge q$ を $p, q, \neg, \Rightarrow$ のみで表せ．
5. $p \Rightarrow q$ を $p, q, \neg, \vee$ のみで表せ．
6. $p \Rightarrow q$ を $p, q, \neg, \wedge$ のみで表せ．

(解答)

1. $p \vee q$ を $p, q, \neg, \wedge$
   ド・モルガンの法則より，$p \vee q = \neg(\neg p \wedge \neg q)$.
2. $p \vee q$ を $p, q, \neg, \Rightarrow$
   $(p \Rightarrow q) = (\neg p \vee q)$ より，$p \vee q = \neg(\neg p) \vee q = (\neg p \Rightarrow q)$
3. $p \wedge q$ を $p, q, \neg, \vee$
   ド・モルガンの法則より，$p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$.
4. $p \wedge q$ を $p, q, \neg, \Rightarrow$
   ド・モルガンの法則と上記 *2* に結果より，$(p \Rightarrow q) = (\neg p \vee q)$ より，
   $p \wedge q = \neg(\neg p \vee (\neg q)) = \neg(p \Rightarrow (\neg q))$.
5. $p \Rightarrow q$ を $p, q, \neg, \vee$
   $(p \Rightarrow q) = (\neg p \vee q)$ より，そのもの．

6. $p \Rightarrow q$ を $p, q, \neg, \wedge$
   ド・モルガンの法則と $(p \Rightarrow q) = (\neg p \vee q)$ より，
   $(p \Rightarrow q) = (\neg p \vee q) = \neg(\neg(\neg p) \wedge (\neg q)) = \neg(p \wedge (\neg q))$.

集合と論理での記号の対応

集合	論理
$\cup$ (和集合)	$\vee$ (論理和)
$\cap$ (積集合)	$\wedge$ (論理積)
c (補集合)	$\neg$ (否定)
U (全体集合)	T (真)
ϕ (空集合)	F (偽)

例 7. 命題 $p \Rightarrow q$ が T であっても，その逆の命題 $q \Rightarrow p$ は必ずしも T でないことを，真理値表を用いて確かめよ．

例 8. 各命題の真理値表を示せ．

1. $p \Rightarrow p$
2. $(p \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg p)$
3. $(p \vee \neg q) \vee \neg p$
4. $p \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
5. $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

例 *9.* 各命題の真理値表を示せ.

1. $(p \Leftrightarrow \neg p) \Rightarrow (\neg p \wedge q)$

2. $(p \vee \neg q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \neg p)$

3. $[p \wedge (\neg q \Rightarrow p)] \wedge \neg[(p \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow (q \vee \neg p)]$

4. $[q \Leftrightarrow (r \Rightarrow \neg p)] \vee [(\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow r]$

例 *10.* 各命題を以下のように定義する.

そのとき, 次の命題を日本語に翻訳せよ.

$p =$ “ 氷あずきを食べる ”,

$q =$ “ すいかを食べる ”,

$r =$ “ 腹痛を起こす ”.

1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$

2. $r \Rightarrow (p \vee q)$

3. $p \wedge q \wedge \neg r$

4. $r \Rightarrow (p \wedge \neg q)$ (プリント訂正 $\vee$ を $\wedge$ へ)

$p =$ “ 氷あずきを食べる ”,

$q =$ “ すいかを食べる ”,

$r =$ “ 腹痛を起こす ”.

1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$

氷あずきとすいかの両方を食べると, 腹痛を起こす.

2. $r \Rightarrow (p \vee q)$

腹痛を起したならば, 氷あずき または すいか を食べた.

3. $p \wedge q \wedge \neg r$

氷あずきとすいかの両方を食べても腹痛を起さない.

4. $r \Rightarrow (p \wedge \neg q)$

腹痛を起したならば, 氷あずきを食べたが, すいかは食べていない.

例 *11.*

1. 命題 $p \Rightarrow q$ が F であるとき, $(\neg p \vee \neg q) \Rightarrow q$ の値は定まるか.
定まる場合, その値は何か.

2. 命題 $p \Rightarrow q$ が T であるとき, $\neg p \vee (p \Leftrightarrow q)$ の値は定まるか.
定まる場合, その値は何か.

1. 命題 $p \Rightarrow q$ が F であるとき, $(\neg p \vee \neg q) \Rightarrow q$ の値は定まるか.
定まる場合, その値は何か.

(解答)

$(p \Rightarrow q) = F$ であることより, $p = T$ かつ $q = F$. これより,
$(\neg p \vee \neg q) = (F \vee T) = T$.
したがって, 「$(\neg p \vee \neg q) \Rightarrow q$」は「$T \Rightarrow F$」 と定まる.
ゆえに, 「$(\neg p \vee \neg q) \Rightarrow q$」の値は定まり, その値は F となる. ∎

2. 命題 $p \Rightarrow q$ が T であるとき, $\neg p \vee (p \Leftrightarrow q)$ の値は定まるか.

(解答) $(p \Rightarrow q) = T$ であることより, p と q の組合せは以下の *1* の通り:

1.

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

2.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

i) $p = T$ かつ $q = T$ のとき, 「$\neg p \vee (p \Leftrightarrow q)$」は「$F \vee (T \Leftrightarrow T)$」.
$(T \Leftrightarrow T) = T$ より, $(F \vee (T \Leftrightarrow T)) = T$.
ii) $p = F$ かつ $q = T$ のとき, 「$\neg p \vee (p \Leftrightarrow q)$」は「$T \vee (F \Leftrightarrow T)$」.
$(F \Leftrightarrow T) = F$ より, $(T \vee (F \Leftrightarrow T)) = T$.
iii) $p = F$ かつ $q = F$ のとき, 「$\neg p \vee (p \Leftrightarrow q)$」は「$T \vee (F \Leftrightarrow F)$」.
$(F \Leftrightarrow F) = T$ より, $(T \vee (F \Leftrightarrow F)) = T$.
以上の *i, ii, iii* より, 「$\neg p \vee (p \Leftrightarrow q)$」は定まり, その値は T となる. ∎

p_1, p_2, p_3 を命題とするとき,

$$(p_1 \vee p_2) \vee p_3, \qquad p_1 \vee (p_2 \vee p_3), \qquad p_2 \vee (p_1 \vee p_3)$$

などの真理値はすべて等しい. これらを

$$p_1 \vee p_2 \vee p_3$$

と表しても混乱は生じない. これも和集合の場合と同じである.

一般に, $p_1, \ldots, p_n$ を命題とするとき,

$$p_1 \vee \cdots \vee p_n, \qquad p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$$

などの場合も同様である.

命題 $p_1, \ldots, p_n$ に対し, 以下の $\bigvee_{i=1}^{n} p_i$, $\bigwedge_{i=1}^{n} p_i$ を定義する.

$$\bigvee_{i=1}^{n} p_i := \begin{cases} T, & \text{ある } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ に対し, } p_i = T \text{ のとき;} \\ F, & \text{すべての } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ に対し, } p_i = F \text{ のとき.} \end{cases}$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i := \begin{cases} T, & \text{すべての } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ に対し, } p_i = T \text{ のとき;} \\ F, & \text{ある } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ に対し, } p_i = F \text{ のとき.} \end{cases}$$

このとき, 次の定理が成り立つことも和集合の場合と同様である.

定理 *12.* 任意の自然数 n と, n 個の任意の命題 $p_1, \ldots, p_n$ に対し, 以下が成り立つ.

1. $\bigvee_{i=1}^{n} p_i = p_1 \vee \cdots \vee p_n$.

2. $\bigwedge_{i=1}^{n} p_i := p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$.

論理関数：

基本命題 $p_1, \ldots, p_n$ から構成される複合命題 $P(p_1, \ldots, p_n)$ は，

$\{T, F\}$ に値を取る n 個の変数をもち，$\{T, F\}$ に値を取る写像

$$P\colon \{T, F\}^n \longrightarrow \{T, F\}$$

と考えられる．

この写像 P を n 変数 論理関数 とよび，$p_1, \ldots, p_n$ を 論理変数 という．

たとえば，p, q, r を基本命題とする．

論理関数 $P(p, q, r) = (p \wedge q) \vee \neg r$

写像 $P\colon \{T, F\}^3 \longrightarrow \{T, F\}$

$P\colon (p, q, r) \longmapsto v(= P(p, q, r) = (p \wedge q) \vee \neg r)$

p を論理変数，t を $\{T, F\}$ の要素とするとき，

$$p^t := \begin{cases} p, & t = T \text{ のとき;} \\ \neg p, & t = F \text{ のとき} \end{cases}$$

具体的には，

t	p	p^t
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$p_1, \ldots, p_n$ を n 個の論理変数とする．

n 重対の要素 $(t_1, \ldots, t_n)$ を直積集合 $\{T, F\}^n$ の要素とするとき，

$$p_1^{t_1} \wedge \cdots \wedge p_n^{t_n}$$

を $(t_1, \ldots, t_n)$ に対する $p_1, \ldots, p_n$ の 基本論理積 という．

補題 **13.**

$$p_1^{t_1} \wedge \cdots \wedge p_n^{t_n} = T \quad \Leftrightarrow \quad (p_1 = t_1) \wedge \cdots \wedge (p_n = t_n)$$

(証明) 具体的に，「$p^t = T \Leftrightarrow (p = t)$」 であることを確認する：

t	p	p^t
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

論理関数 $P(p_1, \ldots, p_n)$ の 真理集合 $\widetilde{P}$ を

$$\widetilde{P} := \{(s_1, \ldots, s_n) \mid (s_1, \ldots, s_n) \in \{T, F\}^n,\ P(s_1, \ldots, s_n) = T\}$$

と定義する．

($P(p_1, \ldots, p_n) = T$ となる論理変数の組 $(s_1, \ldots, s_n)$ の全体からなる集合)

定理 **14.** 任意の論理関数 $P(p_1, \ldots, p_n)$ は次のように表される．ただし，P の真理集合 $\widetilde{P}$ が $\widetilde{P} = \phi$ のときは，右辺の論理和は F と約束する．

$$P(p_1, \ldots, p_n) = \bigvee_{(t_1, \ldots, t_n) \in \widetilde{P}} p_1^{t_1} \wedge \cdots \wedge p_n^{t_n}.$$

右辺を論理関数 $P(p_1, \ldots, p_n)$ の 主論理和標準形 という．■

定理は任意の論理関数は複合命題として表すことができることを主張している．

(例 **16**) 次の論理関数 $P(p, q, r)$ の 主論理和標準形 を示せ．

p	q	r	$P(p, q, r)$
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	T

$$P(p_1, \ldots, p_n) = \bigvee_{(t_1, \ldots, t_n) \in \widetilde{P}} p_1^{t_1} \wedge \cdots \wedge p_n^{t_n} \qquad \text{(主論理和標準形)}$$

$$\widetilde{P} = \{(T, T, F), (T, F, F), (F, F, T), (F, F, F)\} \qquad \text{(真理集合)}$$

p	q	r	$P(p, q, r)$
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	T

$(t_1, t_2, t_3) = (T, T, F)$ $\Rightarrow p^{t_1} \wedge q^{t_2} \wedge r^{t_3} = p \wedge q \wedge \neg r$
$(t_1, t_2, t_3) = (T, F, F)$ $\Rightarrow p^{t_1} \wedge q^{t_2} \wedge r^{t_3} = p \wedge \neg q \wedge \neg r$
$(t_1, t_2, t_3) = (F, F, T)$ $\Rightarrow p^{t_1} \wedge q^{t_2} \wedge r^{t_3} = \neg p \wedge \neg q \wedge r$
$(t_1, t_2, t_3) = (F, F, F)$ $\Rightarrow p^{t_1} \wedge q^{t_2} \wedge r^{t_3} = \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

主論理和標準形 ： 真理集合は

$$\widetilde{P} = \{(T, T, F), (T, F, F), (F, F, T), (F, F, F)\}$$

となる。これより，主論理和標準形 は以下のようになる：

$$P(p, q, r) = (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

実際に，真理値表を書いて確認する：

$$P(p, q, r) = (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

p	q	r	$p \wedge q \wedge \neg r$	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	右辺	P
T	T	T	F	F	F	F	F	F
T	T	F	T	F	F	F	T	T
T	F	T	F	F	F	F	F	F
T	F	F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	F	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	T	T	T

主論理和標準形 に対し，これと 双対 な形の標準形として 主論理積標準形 が存在する．

$(t_1, \ldots, t_n)$ に対する $p_1, \ldots, p_n$ の 基本論理積 として，

$$p_1^{t_1} \wedge \cdots \wedge p_n^{t_n}$$

を定義した．

それに対し，$(t_1, \ldots, t_n)$ に対する $p_1, \ldots, p_n$ の 基本論理和 として，

$$p_1^{t_1} \vee \cdots \vee p_n^{t_n}$$

を定義する．

このとき，前記の 補題 *13* ：

$$p_1^{t_1} \wedge \cdots \wedge p_n^{t_n} = T \quad \Leftrightarrow \quad (p_1 = t_1) \wedge \cdots \wedge (p_n = t_n)$$

に対し，以下の補題が成り立つ．

補題 ***15.***

$$p_1^{\neg t_1} \vee \cdots \vee p_n^{\neg t_n} = F \quad \Leftrightarrow \quad (p_1 = t_1) \wedge \cdots \wedge (p_n = t_n)$$

(証明) 具体的に，「$p^{\neg t} = F \Leftrightarrow (p = t)$」 であることを確認する：

t	p	$p^{\neg t}$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

前記にて，論理関数 $P(p_1, \ldots, p_n)$ の 真理集合 $\widetilde{P}$ を

$$\widetilde{P} := \{(s_1, \ldots, s_n) \mid (s_1, \ldots, s_n) \in \{T, F\}^n,\ P(s_1, \ldots, s_n) = T\}$$

と定義した．

それに対し，論理関数 $P(p_1, \ldots, p_n)$ の 真理集合 $\widetilde{P}$ の 補集合 を $\overline{P}$ と表す：

$$\overline{P} := \{(s_1, \ldots, s_n) \mid (s_1, \ldots, s_n) \in \{T, F\}^n,\ P(s_1, \ldots, s_n) = F\}$$

($P(p_1, \ldots, p_n) = F$ となる論理変数の組 $(s_1, \ldots, s_n)$ の全体からなる集合)

このとき，前記の 定理 *14* (主論理和標準形) ：

$$P(p_1, \ldots, p_n) = \bigvee_{(t_1, \ldots, t_n) \in \widetilde{P}} p_1^{t_1} \wedge \cdots \wedge p_n^{t_n}$$

に対し，以下の定理が成り立つ．

定理 ***16.*** 任意の論理関数 $P(p_1, \ldots, p_n)$ は次のように表される． ただし，$\overline{P} = \phi$ のときは，右辺の論理積は T と約束する．

$$P(p_1, \ldots, p_n) = \bigwedge_{(t_1, \ldots, t_n) \in \overline{P}} p_1^{\neg t_1} \vee \cdots \vee p_n^{\neg t_n}$$

右辺を論理関数 $P(p_1, \ldots, p_n)$ の 主論理積標準形 という．

例 ***17.*** 次の論理関数 $P(p, q, r)$ の 主論理積標準形 を示せ．

p	q	r	$P(p, q, r)$
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	T

$$P(p_1, \ldots, p_n) \quad = \quad \bigwedge_{(t_1, \ldots, t_n) \in \overline{P}} p_1^{\neg t_1} \vee \cdots \vee p_n^{\neg t_n} \qquad \text{(主論理積標準形)}$$

$$\overline{P} \quad = \quad \{(T,T,T), (T,F,T), (F,T,T), (F,T,F)\} \text{(真理集合の補集合)}$$

p	q	r	$P(p, q, r)$
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	T

$(t_1, t_2, t_3) = (T, T, T)$ $\Rightarrow p^{\neg t_1} \vee q^{\neg t_2} \vee r^{\neg t_3} = \neg p \vee \neg q \vee \neg r$
$(t_1, t_2, t_3) = (T, F, T)$ $\Rightarrow p^{\neg t_1} \vee q^{\neg t_2} \vee r^{\neg t_3} = \neg p \vee q \vee \neg r$
$(t_1, t_2, t_3) = (F, T, T)$ $\Rightarrow p^{\neg t_1} \vee q^{\neg t_2} \vee r^{\neg t_3} = p \vee \neg q \vee \neg r$
$(t_1, t_2, t_3) = (F, T, F)$ $\Rightarrow p^{\neg t_1} \vee q^{\neg t_2} \vee r^{\neg t_3} = p \vee \neg q \vee r$

主論理積標準形 ： 真理集合 P の補集合は

$$\overline{P} = \{(T,T,T), (T,F,T), (F,T,T), (F,T,F)\}$$

となる．これより，主論理積標準形 は以下のようになる：

$$P(p, q, r) = (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r).$$

例 ***18.*** (双対性)
ド・モルガンの法則 により，主論理和標準形 と 主論理積標準形 の双対関係 が言える．

i) 主論理和標準形の構成法を用いて主論理積標準形を作ることができる．

逆に，

ii) 主論理積標準形の構成法を用いて主論理和標準形を作ることができる．

たとえば，*i)* 主論理和標準形の構成法を用いて主論理積標準形を得る手続きは以下の通り：

1. $P(p, q, r)$ の真理値を反転した $\neg P(p, q, r)$ を作る．
2. $\neg P(p, q, r)$ の 主論理和標準形 を構成する．
3. $\neg(\neg P(p, q, r))$ を ド・モルガンの法則 を利用し，整理し，主論理積標準形 を得る．

1. $P(p, q, r)$ の真理値を反転した $\neg P(p, q, r)$ を作る：

p	q	r	$P(p, q, r)$	$\neg P(p, q, r)$
T	T	T	F	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	F
F	F	F	T	F

2. $\neg P(p, q, r)$ の主論理和標準形を構成法する ：
   $\overline{P} = \{(T,T,T), (T,F,T), (F,T,T), (F,T,F)\}$ ($\neg P(p, q, r)$の真理集合)
   $\neg P(p, q, r) = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$
3. ド・モルガンの法則を利用し，整理し，主論理積標準形を得る：
   $P(p, q, r) = \neg(\neg P(p, q, r))$ より，
   $\neg(\neg P(p, q, r)) = (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$
   これは，前記の例で得た解と一致する．■

例 ***19.***

1. *3* つの命題 p, q, r のうちの *2* つが T であるとき，かつ，そのときに限り T であるような複合命題を構成せよ．
2. *3*つの命題 p, q, r のうち，どれもが T でないか，どれか *1* つが T であるとき，かつ，そのときに限り T であるような複合命題を構成せよ．

1. **3** つの命題 p, q, r のうちの **2** つが T であるとき，かつ，そのときに限り T であるような複合命題を構成せよ．

2. **3**つの命題 p, q, r のうち，どれもが T でないか，どれか **1** つが T であるとき，かつ，そのときに限り T であるような複合命題を構成せよ．

1.

p	q	r	$P(p,q,r)$
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

2.

p	q	r	$P(p,q,r)$
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

2. $(p \Rightarrow q) = ((p \wedge \neg q) \Rightarrow F)$.

2.

p	q	左辺 $p \Rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	右辺 $(p \wedge \neg q) \Rightarrow F$	命題
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

ゆえに，命題 $(p \Rightarrow q) = ((p \wedge \neg q) \Rightarrow F)$ は恒真命題である．■

定義 **20.** (恒真命題) *(こうしんめいだい)*

常に真である命題を 恒真命題 *(Tautology トートロジー)*という．

また，常に偽である命題を 矛盾命題 *(Contradiction)*という．

3. $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$.

3.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	命題
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

ゆえに，命題 $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ は恒真命題である．■

例 **21.** p, q, r を命題とするとき，次の複合命題は恒真命題であることを示せ．

1. $(p \Rightarrow q) = (\neg q \Rightarrow \neg p)$.
(等号が成り立てば命題は T, そうでなければ F)

2. $(p \Rightarrow q) = ((p \wedge \neg q) \Rightarrow F)$.

3. $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$.

4. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

4. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	命題
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

ゆえに，命題 $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ は恒真命題である．■

1. $(p \Rightarrow q) = (\neg q \Rightarrow \neg p)$.
(等号が成り立てば命題は T, そうでなければ F)

(証明) 真理値表を用いて証明する．

1.

p	q	左辺 $p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	右辺 $\neg p \Rightarrow \neg q$	命題
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

ゆえに，命題 $(p \Rightarrow q) = (\neg q \Rightarrow \neg p)$ は恒真命題である．■

例 **22.** 次の命題が恒真命題であるか，矛盾命題であるか，あるいは，それらのいずれでもないかを判定せよ．

1. $p \vee \neg(p \wedge q)$

2. $(p \vee q) \wedge \neg(p \Rightarrow q)$

3. $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$

4. $p \Rightarrow \neg(p \wedge q)$

5. $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

例 **23.** 次の命題が恒真命題であることを示せ．

1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
2. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
3. $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
4. $p \vee (p \Rightarrow q)$

定義 **24.** (論法 と 妥当)

論法とは，前提とよばれる 命題 $P_1, \ldots, P_n$ から結論とよばれる 命題 Q が導かれるという主張であり，

$$P_1,\ \ldots,\ P_n\ \vdash\ Q$$

と表される．

論法 “ $P_1, \ldots, P_n \vdash Q$ ” が 妥当 であるとは，

“ $(P_1 \wedge \cdots \wedge P_n) \Rightarrow Q$ ”

が 恒真命題 であることをいう．

したがって，$P_1 \wedge \cdots \wedge P_n$ が T ならば，Q が T であることが導かれる．

1. $(p \Rightarrow q) = T$ において，$p = T$ ならば $q = T$ であるということ．
2. すなわち，$p = T$ であることを示せば，$q = T$ を示したことになる．

定理 **25.** 次の論法は妥当である．

1. 対偶による証明: $(\neg q \Rightarrow \neg p) \vdash (p \Rightarrow q)$
2. 背理法による証明: $((p \wedge \neg q) \Rightarrow F) \vdash (p \Rightarrow q)$
3. 三段論法による証明: $(p \Rightarrow q, q \Rightarrow r) \vdash (p \Rightarrow r)$

1. 対偶による証明: $(\neg q \Rightarrow \neg p) \vdash (p \Rightarrow q)$
2. 背理法による証明: $((p \wedge \neg q) \Rightarrow F) \vdash (p \Rightarrow q)$
3. 三段論法による証明: $(p \Rightarrow q, q \Rightarrow r) \vdash (p \Rightarrow r)$

(証明)

1. 論法が妥当であることの証明は，その定義より，$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ が恒真命題，すなわち，常に T であることを示せばよい．
   前記の例 **21** より，$(\neg q \Rightarrow \neg p)$ と $(p \Rightarrow q)$ の真理値は一致する．
   (含意 $A \Rightarrow B$ は，A と B の真理値が同じ場合，常に T である．)
   ゆえに，$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ は常に T であり，恒真命題である．■
2. 3.のいずれも上記と同様に，前記の例 **21** より，恒真命題であることが示される．■

例 **26.** 次の主張は，妥当な論法になっているかどうか，答えよ．

1. 雨が降るなら学校に行かない．学校に行かなければ家にいる．よって，雨が降るなら家にいる．
2. おもしろい授業ならば，それは良い授業である．よって，おもしろくない授業ならば，それは良くない授業である．
3. 良くない授業ならば，それはおもしろくない授業である．よって，おもしろい授業ならば，それは良い授業である．
4. 鯨は哺乳類である．哺乳類は授乳をする．よって，鯨は授乳する．

1. 雨が降るなら学校に行かない．学校に行かなければ家にいる．
   よって，雨が降るなら家にいる．

(証明)

1. (三段論法)
   命題を $p =$“ 雨が降る ”, $q =$“ 学校に行かない ”, $r =$“ 家にいる ”と表す．
   問いの主張は，三段論法のかたち
   $$(p \Rightarrow q, q \Rightarrow r) \vdash (p \Rightarrow r)$$
   と記述できる．ゆえに，その主張は妥当である．■

例 **27.** (背理法)

最大の素数は存在しないことを示せ．

(証明) 背理法を用いて証明する．

命題 $p =$“ 素数は 1 より大きい整数で 1 と自分自身以外の正の約数をもたない ”(素数の定義)

命題 $q =$“ 最大の素数は存在しない ”

このとき，証明する論法は，背理法 $((p \wedge \neg q) \Rightarrow F) \vdash (p \Rightarrow q)$ となる．

したがって，

$$((p \wedge \neg q) \Rightarrow F) = T$$

を示せばよい．すなわち，$(p \wedge \neg q) = F$ を示せばよい．

ここで，$\neg q$ は，「最大の素数 M が存在する」を意味する．■

例 **28.** 次の論法は妥当か．

1. 私は旅行するなら勉強しない．
2. 私は勉強するか，または，離散数学の試験に合格する．
3. 私は旅行した．

したがって，私は離散数学の試験に合格した．

(証明) 命題 $p,\ q,\ r$ を以下のようにする:

$p =$ “ 旅行する ”, $q =$ “ 勉強する ”,

$r =$ “ 離散数学の試験に合格する ”.

すると，問題の論法は，$(p \Rightarrow \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge p \ \vdash\ r$ となる．

すなわち，論法が妥当であるかどうか判定するには，

$$((p \Rightarrow \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge p) \ \Rightarrow\ r$$

が恒真命題になるかどうかを判定すればよい．■

2.2 述語と限定記号

論理を展開する手段として，命題以外に 述語 や 限定記号 とよばれるものを導入する。

定義 29. （ 述語 ）

$X_1, \ldots, X_n$ を集合とする。そのとき、写像

$$P : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow \{T, F\}$$

を （ n 変数） 述語 という。 ∎

$P(X_1, \ldots, X_n)$ と書いたとき、$P(X_1, \ldots, X_n) = T$ を主張する．

すなわち、P が $(X_1, \ldots, X_n)$ に対して T であること．

例 30.

1. X を集合とし、$A \subseteq X$ とする。$x \in X$ に対し、

$$P(x) := \begin{cases} T, & x \in A \text{ のとき;} \\ F, & x \notin A \ (x \in A^c) \text{ のとき} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} P & : & X & \longrightarrow & \{T, F\} \\ & & x & \longmapsto & v \end{pmatrix}$$

と定義される P は、1 変数述語 である。

この述語を単に，$x \in A$ と表すことができる。

2. X を集合とする $x,\ y \in X$ に対し、

$$P(x, y) := \begin{cases} T, & x = y \text{ のとき;} \\ F, & x \neq y \text{ のとき} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} P & : & X \times X & \longrightarrow & \{T, F\} \\ & & (x, y) & \longmapsto & v \end{pmatrix}$$

と定義される P は、2 変数述語 である。

この述語を単に，$x = y$ と表すことができる。

定義 31. （ 全称記号と存在記号 ）

1. P を集合 X 上で定義された 述語 とする。そのとき、命題 $\forall x P(x)$ を

$$\forall x P(x) := \begin{cases} T, & X \text{ のすべての } x \text{ に対し、} P(x) = T \text{ のとき;} \\ F, & X \text{ のある } x \text{ に対し、} P(x) = F \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義とする。

“ $\forall x$ ” を x に関する 全称記号 とよぶ。(for all, for any)

“ $\forall x P(x)$ ” は、 “ すべての x に対し、$P(x)$ は真である ” という。

2. P を集合 X 上で定義された述語とする。そのとき、命題 $\exists x P(x)$を

$$\exists x P(x) := \begin{cases} T, & X \text{ のある } x \text{ に対し、} P(x) = T \text{ のとき;} \\ F, & X \text{ のすべての } x \text{ に対し、} P(x) = F \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義とする。

“ $\exists x$ ” を x に関する 存在記号 とよぶ。(exist)

“ $\exists x P(x)$ ” は、 “ $P(x)$ が真であるような x が存在する ” という。

3. 全称記号 と 存在記号 を併せて 限定記号 といい，論理記号の一つ．

4. 述語 $P(x)$ の定義域 X を明示するために、

$\forall x P(x)$ を $\forall x \in X : P(x)$,

$\exists x P(x)$ を $\exists x \in X : P(x)$

と表すことがある。

例 32. （ 全称記号と存在記号 ）

実数 $\mathbf{R}$ 上の関数を $f(x) = x^2 + 3x$ とし，以下の述語 $P(x)$ を考える．

$$P(x) := \begin{cases} T, & f(x) < 0 \text{ のとき;} \\ F, & f(x) \geq 0 \text{ のとき.} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} P & : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \{T, F\} \\ & & x & \longmapsto & v \end{pmatrix}$$

このとき，述語 $P(x)$ を単に $f(x) < 0$ と書くことができる．
そして，以下のことが言える：

1. $(\exists x \in \mathbf{R} : f(x) < 0) = T$
2. $(\forall x \in \mathbf{R} : f(x) < 0) = F$

何故なら，

1. $x = -2$ のとき，$f(-2) = -2$ より，
   $f(x) < 0$ を満たす実数 $x = -2$ が存在するから．
2. $x = 1$ のとき，$f(1) = 4 > 0$ より，
   すべての実数 x に対して，$f(x) < 0$ が成立しないから．∎

定理 33. 任意の 1 変数述語に対し，以下の命題が成り立つ．

1. $\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg P(x))$
2. $\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg P(x))$

2. $\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg P(x))$

(証明) (同値を示すには，左辺と右辺の真理値が一致することを示せばよい)

i) $(\exists x P(x)) = T$ の場合，$\neg(\exists x P(x)) = F$ である．

$(\exists x P(x)) = T$ は，$P(x) = T$ となるある x が存在するということ．

すなわち，$\neg P(x) = F$ となるある x が存在するということである．

したがって，すべての x に対し，$\neg P(x) = T$ とはならないことから，$(\forall x(\neg P(x)) = F$ である．

ii) 次に，$(\exists x P(x)) = F$ の場合，$\neg(\exists x P(x)) = T$ である．

$(\exists x P(x)) = F$ は，$P(x) = T$ となる x が存在しないということ．

すなわち，$\neg P(x) = F$ となるある x が存在しないということである．

したがって，すべての x に対し，$\neg P(x) = T$ となることから，$(\forall x(\neg P(x)) = T$ である．

以上の *i, ii)* より，$\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg P(x))$ が成り立つ．∎

定義 34.

1. *i.* $P : X_1 \times X_2 \longrightarrow \{T, F\}$ を 2 変数述語とする．

   ii. Q_1, Q_2 を $\forall$ または $\exists$ の限定記号とする．

   iii. このとき，命題 $Q_1 x_1 Q_2 x_2 P(x_1, x_2)$ を以下のように定義する．

$$Q_1 x_1\ Q_2 x_2\ P(x_1, x_2) \ := \ Q_1 x_1\ (Q_2 x_2\ P(x_1, x_2))$$

   iv.
$$\forall x_1\ \exists x_2\ P(x_1, x_2) \ = \ \forall x_1\ (\exists x_2\ P(x_1, x_2))$$
$$\exists x_1\ \forall x_2\ P(x_1, x_2) \ = \ \exists x_1\ (\forall x_2\ P(x_1, x_2))$$

2. $(Q_2 x_2 P(x_1, x_2))$ は，x_1 のみを変数とする 1 変数述語である．
   この述語に，$Q_1 x_1$ を付け加えたものが $Q_1 x_1 Q_2 x_2 P(x_1, x_2)$．

3. 一般に，$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n P(x_1, \ldots, x_n)$ を定義可能．
   (ここで，$P : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow \{T, F\}$ は n 変数述語)

注意 **35.**

1. “ $\forall x \exists y P(x,y)$ ” とは，
“ 任意の x に対し，(x ごとに定まる)ある y が存在し，
$P(x,y) = T$ となる ”

たとえば， $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R} :\ (x = x + y)$

2. “ $\exists x \forall y P(x,y)$ ” とは，
“ ある x が存在し，(その x を固定したとき，)任意の y に対し，
$P(x,y) = T$ となる”

たとえば， $\exists x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R} :\ (y = x + y)$

3. 1 変数の場合と同様に，定義域を明示すると，
命題 $Q_1 x_1 Q_2 x_2 P(x_1, x_2)$ を以下のように書く：

$$Q_1 x_1 \in X_1, Q_2 x_2 \in X_2 : P(x_1, x_2)$$

4. また，$X_1 = X_2 = X$ のとき，

$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X : P(x_1, x_2)$ を $\forall x_1, x_2 \in X : P(x_1, x_2)$ と略記．

$\exists x_1 \in X, \exists x_2 \in X : P(x_1, x_2)$ を $\exists x_1, x_2 \in X : P(x_1, x_2)$ と略記．

例 **37.** 命題の真偽を判定せよ．

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R} : x = y$

2. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : x = y$

3. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R} : x = y$

4. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : x = y$

(解答) x, y は共に実数である．

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R} : x = y$
任意の x と y に対し，$x = y$ となることはないから，F．

2. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : x = y$
任意の x に対し，$x = y$ を満たす y を選ぶことが可能であるから，
$x = y$ を満たす y は存在し，T．

3. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R} : x = y$
ある x が存在し，任意の y が $x = y$ となることはないから，F．

4. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : x = y$
ある x が存在し，$x = y$ を満たす y を選ぶことが可能であるから，
$x = y$ を満たす y は存在し，T．

例 **38.** 命題の真偽を判定せよ．

1. $\forall x \in \mathbf{N}, \exists y \in \mathbf{N} : y = x^2$

2. $\forall y \in \mathbf{N}, \exists x \in \mathbf{N} : y = x^2$

3. $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{N} : y = x^2$

4. $\forall y \in \mathbf{N}, \exists x \in \mathbf{R} : y = x^2$

5. $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R} : y = x^2$

(解) $1.T, 2.F, 3.F, 4.T, 5.F.$

定理 **39.** P を 2 変数の述語とする．

$$\widetilde{Q}_i := \begin{cases} \exists, & Q_i = \forall \text{ のとき;} \\ \forall, & Q_i = \exists \text{ のとき} \end{cases}$$

とするとき，以下が成り立つ．

$$\neg(Q_1 x_1 Q_2 x_2 P(x_1, x_2)) = \widetilde{Q}_1 x_1 \widetilde{Q}_2 x_2 (\neg P(x_1, x_2))$$

系 **40.** P を n 変数の述語とするとき，以下が成り立つ．

$$\neg(Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n P(x_1, \ldots, x_n)) = \widetilde{Q}_1 x_1 \cdots \widetilde{Q}_n x_n (\neg P(x_1, \ldots, x_n))$$

例 **41.** 次の 2 つの命題は，同じ真理値をもつ (ことを確かめよ)．

1. $\neg(\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : x = y)$

2. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R} : x \neq y$

定理 **42.** P, Q を集合 X 上で定義された 1 変数述語とする．
そのとき，次のことが成り立つ．

1. $(\forall x P(x)) \ \wedge\ (\forall x Q(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x(\ P(x) \wedge Q(x)\ )$

2. $(\forall x P(x)) \ \vee\ (\forall x Q(x)) \quad \Rightarrow \quad \forall x(\ P(x) \vee Q(x)\ )$

3. $(\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x (P(x) \vee Q(x))$

4. $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \quad \Rightarrow \quad (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$

(証明の方針)

i. 「$A \Leftrightarrow B$ が T であること」を示すには，
「$(A \Rightarrow B) = T$ かつ $(A \Leftarrow B) = T$」 を示せばよい．

ii. さらに，「$(A \Rightarrow B) = T$」 を示すには，
「$(A = T) \Rightarrow (B = T)$」 を示せばよい．

iii. 同様に，「$(A \Leftarrow B) = T$」 を示すには，
「$(A = T) \Leftarrow (B = T)$」 を示せばよい．

1. $(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) \ \Leftrightarrow\ \forall x (P(x) \wedge Q(x))$

i. $\Rightarrow$) 左辺$= ((\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))) = T$ とすると，
$(\forall x P(x)) = T$ かつ $(\forall x Q(x)) = T$ である．
これは，任意の x に対し，$P(x) = T$ かつ $Q(x) = T$ を示す．
したがって，任意の x に対し，$(P(x) \wedge Q(x)) = T$ である．
すなわち，右辺$= (\forall x (P(x) \wedge Q(x))) = T$．

ii. $\Leftarrow$) 右辺 $= (\forall x (P(x) \wedge Q(x))) = T$ とすると，
これは，任意の x に対し，$(P(x) \wedge Q(x)) = T$ である．
さらに，任意の x に対し，$P(x) = T$ かつ $Q(x) = T$ を示す．
したがって，$(\forall x P(x)) = T$ かつ $(\forall x Q(x))) = T$ より，
左辺 $= ((\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))) = T$ である．

以上の ***i***, ***ii*** より，両辺が同値 $(\Leftrightarrow)$ であることが示せた．∎

2. $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$

$\Rightarrow$) 左辺 $= ((\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))) = T$ であるとする.

すると, $(\forall x P(x)) = T$ または $(\forall x Q(x))) = T$ である.

i) $(\forall x P(x)) = T$ ならば 任意の x に対し, $P(x) = T$ であるから $Q(x)$ の真偽に関わらず, $(P(x) \vee Q(x)) = T$ である.

ii) $(\forall x Q(x)) = T$ の場合も同様に, 任意の x に対し, $Q(x) = T$ であるから $P(x)$ の真偽に関わらず, $(P(x) \vee Q(x)) = T$ である.

ゆえに, 任意の x に対し, $(P(x) \vee Q(x)) = T$.

すなわち, 右辺 $= (\forall x(P(x) \vee Q(x))) = T$.

以上より, $\Rightarrow$ が示せた. ∎

逆 ($\Leftarrow$)が成り立たない例: $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$

例 **44.** 整数 $\mathbf{Z}$ 上の *1* 変数述語 $P(x)$ と $Q(x)$ を次のように定める:

$$P(x) = \begin{cases} T, & \frac{x}{2} \in \mathbf{Z} \text{ のとき;} \\ F, & \frac{x}{2} \notin \mathbf{Z} \text{ のとき} \end{cases} \quad \text{と} \quad Q(x) = \begin{cases} T, & \frac{x+1}{2} \in \mathbf{Z} \text{ のとき;} \\ F, & \frac{x+1}{2} \notin \mathbf{Z} \text{ のとき} \end{cases}$$

“ $P(x)$ は x が偶数ならば T,” “ $Q(x)$ は x が奇数ならば T. ”

右辺: 任意の $x \in \mathbf{Z}$ に対し, その x は偶数か奇数かのどちらかである.

ゆえに, $\forall x(P(x) \vee Q(x)) = (T \vee F) = (F \vee T) = T$ である.

左辺: 任意の $x \in \mathbf{Z}$ に対し, その x は常に偶数とは限らないから,

$(\forall x P(x)) = F$. 同様に, $(\forall x Q(x)) = F$.

ゆえに, $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) = (F \vee F) = F$ である.

以上より, (左辺 $\Leftarrow$ 右辺) $= (F \Leftarrow T) = F$ より, 逆 ($\Leftarrow$) は成り立たない.

例 **45.** *2* 変数述語 “ x さんは y さんが好き ” を $L(x, y)$ で表す.

このとき, 次の命題はどのような意味を表すか.

意味の違いが分かるように , 自然な日本語で表現せよ.

1. $\forall x \exists y : L(x, y)$

2. $\exists y \forall x : L(x, y)$

3. $\exists x \forall y : L(x, y)$

4. $\forall y \exists x : L(x, y)$

1. $\forall x\ \exists y : L(x, y)$

(解答)

「すべての x に対し , $L(x, y)$ となる y が存在する 」.

$\rightarrow$ 「すべての人 (x) に対し , その人 (x) は好きな人 (y) がいる 」.

$\rightarrow$ 「誰にも , 好きな人がいる 」.

2. $\exists y\ \forall x : L(x, y)$

(解答)

「ある y が存在し , すべての x に対し , $L(x, y)$ となる 」.

$\rightarrow$ 「ある人 (y) がいて , すべての人 (x) はその人 (y) が好き 」.

$\rightarrow$ 「誰からも , 好かれる人がいる 」.

例 **49.** (解答) 命題 $p,\ q$ を

$p =$ “ ここは、正直村です ”,

$q =$ “ あなたは正直村の住人です ”

とする。このとき, 以下の真理値表を満たす $p,\ q$ を用いた複合命題 $P(p, q)$ で質問すればよい. (それには, 主論理和標準形の考えを用いればよい)

p	q	$P(p, q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$P(p, q) = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

例 **50.** 天使は常に真実を述べ, 悪魔は常に嘘をつくとする.

A, B は天使か悪魔であることは, はっきりしている.

しかし, 彼らが天使か悪魔かは分からない.

そこで, A は言いました : 「私が天使ならば B も天使です.」

さて, この二人の正体は, それぞれ天使か悪魔か.

(問題を解く方針)

$p =$「A は天使である」, $q =$「B は天使である」という *2* つの命題を考える.

このれらの命題に対し, 命題「私が天使ならば B も天使です」の真偽を場合分けすることで, p, q の可能な真理値を調べる.

答えは, A, B 共に天使である. ∎

$p =$「Aは天使である」, $q =$「Bは天使である」より,

「私が天使ならばBも天使です」 は 「$p \Rightarrow q$」 となる.

1. A を天使とする.

これより, A の言うことは正しい, すなわち, $(p \Rightarrow q) = T$.

$p = T$ と $(p \Rightarrow q) = T$ より, $q = T$.

ゆえに, A, B は共に天使.

2. A を悪魔とする.

これより, A の言うことは正しくない, すなわち, $(p \Rightarrow q) = F$.

一方, 仮定より, $p = F$ であるが, このとき, $(p \Rightarrow q) = (F \Rightarrow q) = T$.

これは, 矛盾. ゆえに, A は悪魔ではない.

3. 以上より, A, B と共に天使.

References

[1] 尾関和彦, (情報技術者のための)離散系数学入門, 共立出版, ***2004.***

[2] 尾関和彦, 太田和夫, 國廣昇, “離散数学第一”及び “離散数学第一演習問題集” 電気通信大学情報通信工学科講義資料, ***2004.***

[3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, ***2003.***

[4] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, ***2003.***

[5] ***S. Lipschutz***著, 成嶋弘監訳, 離散数学 (コンピュータサイエンスの基礎数学), オーム社, ***2004(H16).***

[6] 小倉久和, 情報の基礎離散数学 (– 演習を中心とした –), 近代科学社, ***2006.***

[7] 町田元, 横森貴, 計算機数学, 森北出版, ***1990.***