離散数学

— *4.* 関係 —

4.1 ２項関係

4.2 同値関係

4.3 順序関係

栗原正純 kuri@ice.uec.ac.jp

(2007/12/3/12:52)

4. 関係

4.1 2項関係

定義 4. 1.
集合 X_1, X_2 に対し，直積集合 $X_1 \times X_2$ の部分集合を $X_1 \times X_2$ 上の 2 項関係 という．

定義 4. 2.
X, Y を空でない集合とし，R を $X \times Y$ 上の 2 項関係とする．
$(x, y) \in R$ に対し，$(x, y) \in R$ を xRy とも表す．
xRy が成り立つとき，x と y は R の関係がある という．

X, Y が有限集合のとき, $X \times Y$ 上の <u>*2* 項関係は行列で表現できる</u>.

$$X = \{x_1, \ldots, x_m\}, \quad Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$$

に対し,

i) $x_i R y_j$ のとき, かつ, そのときに限り, 行列の (i, j) 成分を 1 とし,

ii) それ以外の他の成分を 0 とする.

例 *4. 3.* 有限集合 X, Y を,

$$X = \{1, 2, 3\}, \quad Y = \{a, b, c, d\}$$

とする.

*2*項関係

$$R = \{(1, b), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (3, c)\} \subseteq X \times Y$$

の行列表現:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

定義 4. 5.

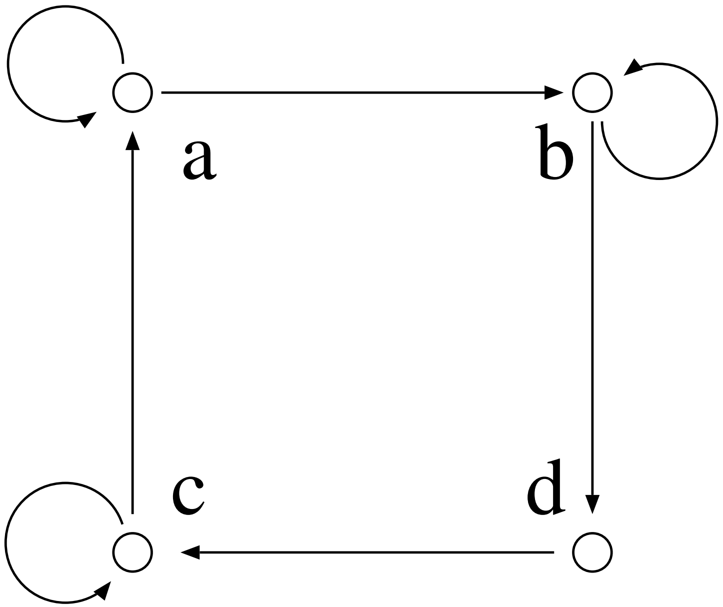
X を集合とするとき, $X \times X$ 上の 2項関係を $\underline{X \text{ 上の関係}}$ という.

定義 *4. 6.* (有向グラフ)

X 上の関係 R は, これを 有向グラフ と考えて図示することができる.
X の元を 頂点 といい, $(x_i, y_j) \in R$ のとき,
順序対 (x_i, y_j) を 始点 x_i から 終点 y_j に向かう 有向辺 という.

例 *4. 7.*

集合 $X = \{a, b, c, d\}$,
関係 $R = \{(a,a), (a,b), (b,b), (b,d), (c,a), (c,c), (d,c)\}$ とする.
R を有向グラフと行列で表現する:



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

定義 *4. 8.* R **を集合** X **上の関係とする.**

1. $\forall x \in X : xRx$ **が成り立つとき,**

R **は** **<u>反射的</u>** **であるという. (<u>反射律</u>)**

2. $\forall x, y \in X : [(xRy) \Rightarrow (yRx)]$ **が成り立つとき,**

R **は** **<u>対称的</u>** **であるという. (<u>対称律</u>)**

3. $\forall x, y \in X : [((xRy) \wedge (yRx)) \Rightarrow (x = y)]$ **が成り立つとき,**

R **は** **<u>反対称的</u>** **であるという. (<u>反対称律</u>)**

4. $\forall x, y, z \in X : [((xRy) \wedge (yRz)) \Rightarrow (xRz)]$ **が成り立つとき,**

R **は** **<u>推移的</u>** **であるという. (<u>推移律</u>)**

集合 X 上の関係 R とその行列表現と有向グラフの関係：

1. R **が反射的:** xRx

i. **行列：対角成分はすべて** 1 **である.**

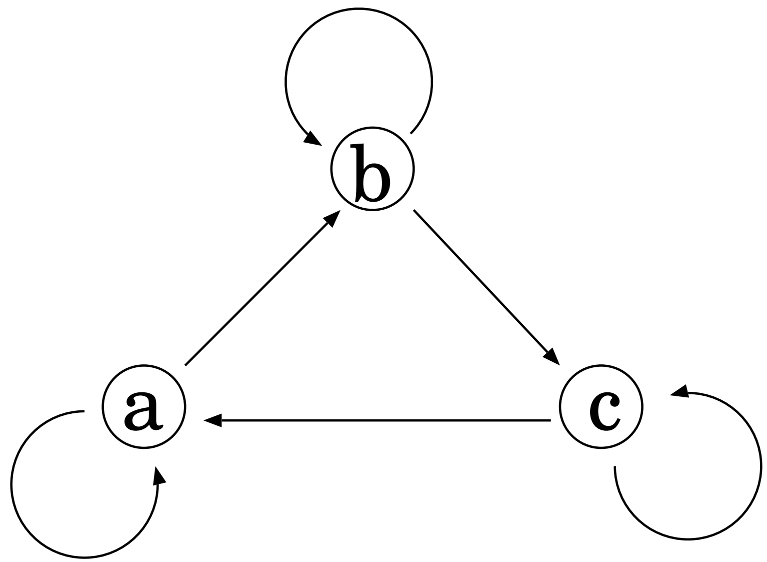
ii. **グラフ：すべての頂点** x_i **に対し,**

有向辺 (x_i, x_i) **がある. (**x_i **から** x_i **へ向かう辺がある)**

集合 $X = \{a, b, c\}$

関係 $R = \{(a,a), (a,b), (b,b), (b,c), (c,a), (c,c)\}$

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



2. R **が対称的：** $(xRy) \Rightarrow (yRx)$

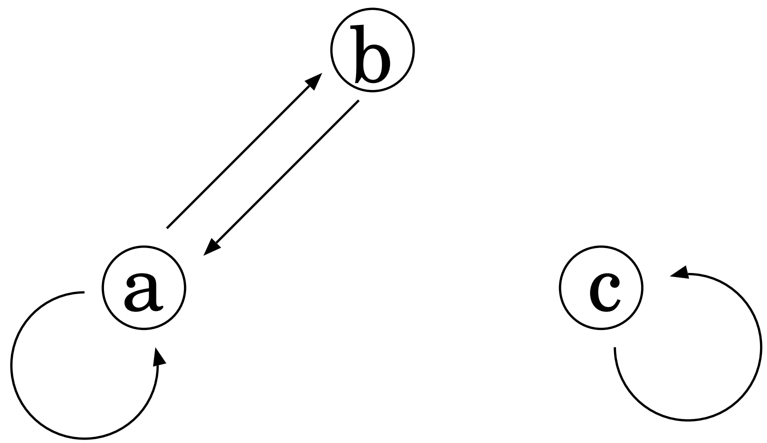
i. 行列：対称行列.

ii. グラフ：有向辺 (x_i, x_j) **があれば, 有向辺** (x_j, x_i) **もある.**

集合 $X = \{a, b, c\}$

関係 $R = \{(a,a), (a,b), (b,a), (c,c)\}$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



3. R が反対称的：$((xRy) \wedge (yRx)) \Rightarrow (x = y)$

i. 行列：$i \neq j$ ならば，

(i, j) 成分と (i, j) 成分が共に 1 になることはない．

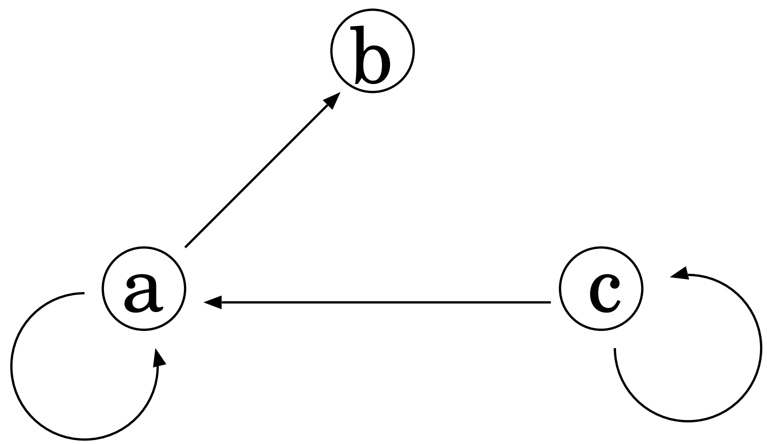
ii. グラフ：$i \neq j$ ならば，

有向辺 (x_i, x_j) と (x_j, x_i) の両方が存在することはない．

集合 $X = \{a, b, c\}$

関係 $R = \{(a, a), (a, b), (c, a), (c, c)\}$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



4. R **が推移的：** $((xRy) \wedge (yRz)) \Rightarrow (xRz)$

i. 行列： (i,j) **成分と** (j,k) **成分が共に** 1 **ならば,**

(i,k) **成分も** 1 **である.**

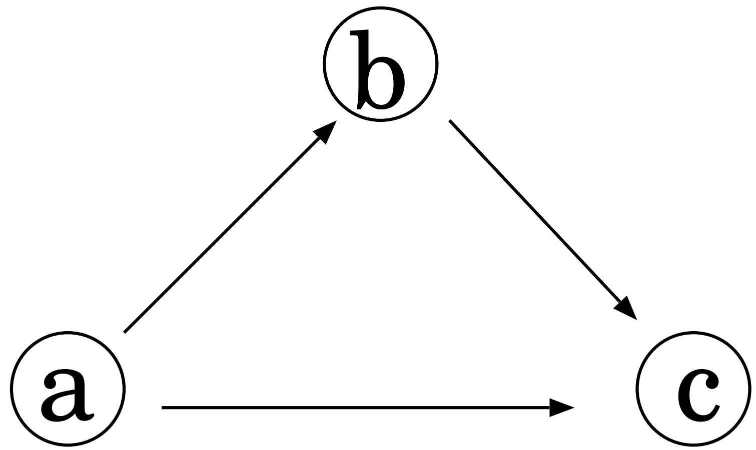
ii. グラフ：有向辺 (x_i, x_j) **と** (x_j, x_k) **が存在するならば,**

(x_i, x_k) **が存在する.**

集合 $X = \{a, b, c\}$

関係 $R = \{(a,b), (b,c), (a,c)\}$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$



例 *4. 9.* 集合 $X = \{a, b, c, d\}$ 上の関係を以下のように定義する.

$$R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(c,c),(d,d)\}$$
$$S = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$$
$$T = \{(a,a),(a,b),(a,c),(c,c)\}$$
$$U = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c)\}$$

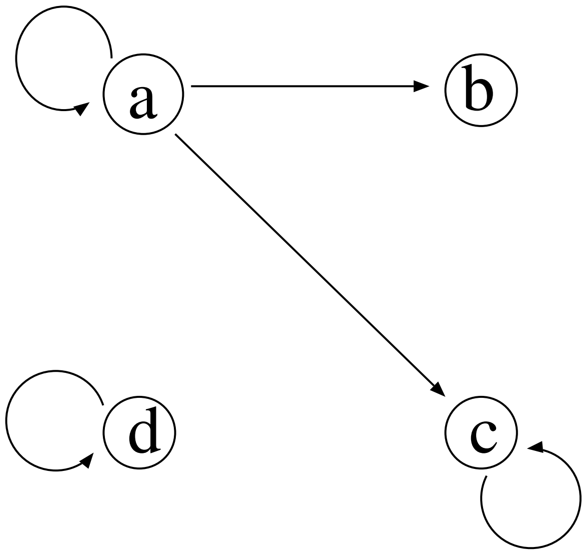
このとき,

1. 関係 R, S, T, U のそれぞれを行列と有向グラフで表せ.
2. 関係 R, S, T, U が, 反射律, 対称律, 反対称律, 推移律 のそれぞれを満たすかどうかを判定せよ.

1. $R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(c,c),(d,d)\}$

解)

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



関係	反射律	対称律	反対称律	推移律
R	×	×	○	○
	1	2		

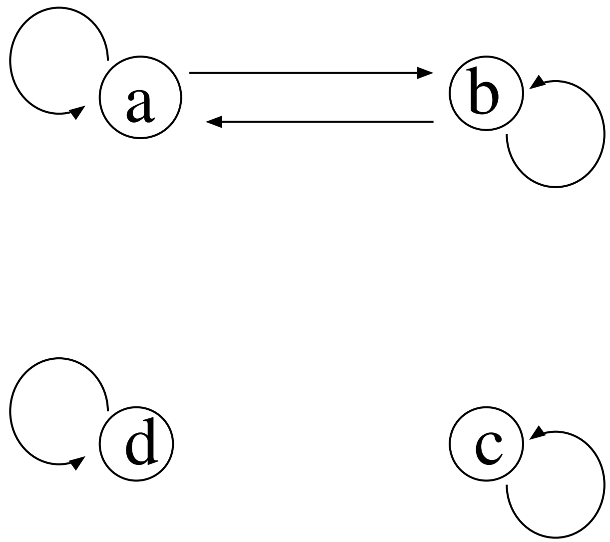
1. (b,b) **がない**

2. $[aRb \Rightarrow bRa] = F$**,** $[aRc \Rightarrow cRa] = F$

2. $S = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$

解)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



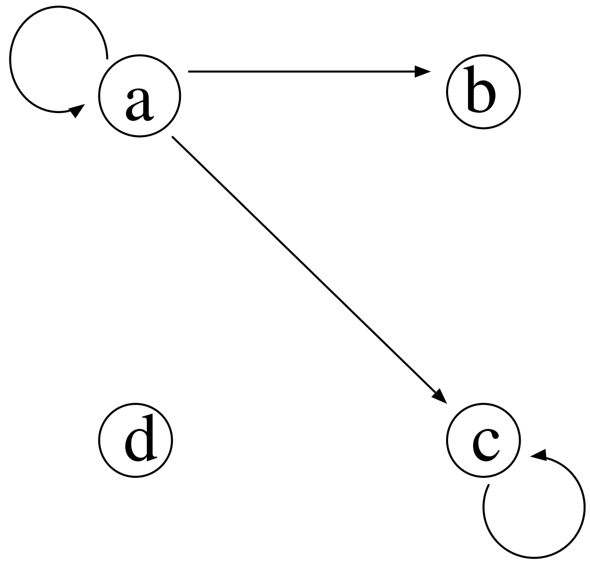
関係	反射律	対称律	反対称律	推移律
S	○	○	×	○
			3	

3. $((aRb) \wedge (bRa)) \Rightarrow a = b$

3. $T = \{(a,a),(a,b),(a,c),(c,c)\}$

解*)*

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



関係	反射律	対称律	反対称律	推移律
T	×	×	○	○
	4	5		

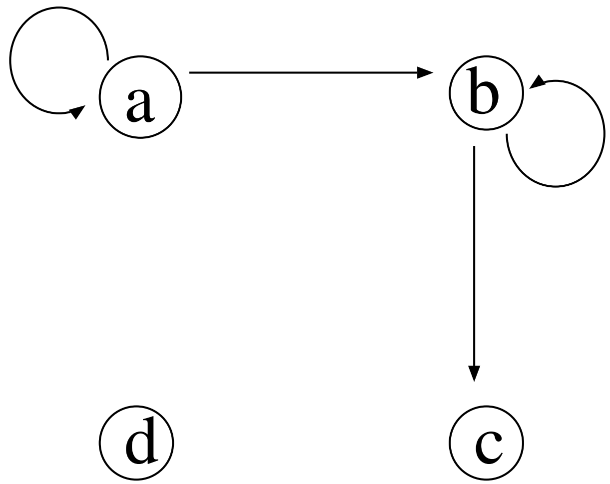
4. $(b,b),(d,d)$ **がない**

5. ***2*** **と同じ** ***(***$[aRb \Rightarrow bRa] = F$***,*** $[aRc \Rightarrow cRa] = F$***)***

4. $U = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c)\}$

解)

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



関係	反射律	対称律	反対称律	推移律
U	×	×	○	×
	6	7		8

6. $(c,c),(d,d)$ **がない**

7. $[aRb \Rightarrow bRa] = F$**,** $[bRc \Rightarrow cRb] = F$**,**

8. $[((aRb) \wedge (bRc)) \Rightarrow aRc] = F$

4.2 同値関係

定義 *4. 11.*
<u>反射律</u>, <u>対称律</u>, <u>推移律</u> の 3 つを満たす関係を <u>同値関係</u> という.

例 *4. 12.* 以下の関係 $R_{(n)}$ が $\mathbf{Z}$ 上の同値関係になることを証明せよ.

1. n を任意に固定した整数とするとき,

$$R_{(n)} := \{(x,y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x - y \text{ は } n \text{ の倍数 } \}$$

は $\mathbf{Z}$ 上の同値関係になる.

このとき, $xR_{(n)}y$ を

$$x \equiv y \ (\textbf{mod}\ n)$$

とも表し, x と y は n を法として合同である という.

2. 「$x - y$ は n の倍数 」とは,

$x - y = n \cdot k$ と書ける $k \in \mathbf{Z}$ が存在する ということ.

3. したがって,

$$R_{(n)} = \{(x,y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : x - y = n \cdot k\}$$

と書ける.

4. すなわち, $(x,y) \in R_{(n)} (\subseteq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z})$ ならば

$x - y = n \cdot k$ と書ける $k \in \mathbf{Z}$ が存在する.

5. $n=3$ **の場合：**

$$R_{(3)} = \{(x,y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x-y \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : x-y = 3 \cdot k\}$$
$$= \{(0,3),(3,0),(1,4),(4,1),(2,5),(5,2),\ldots\}$$

そして, $xR_{(3)}y$ **を**

$$x \equiv y \ (\boldsymbol{mod}\ 3)$$

と表し, <u>x **と** y **は** 3 **を法として合同である**</u> **という.**

6. **たとえば,「**1 **と** 4 **は** 3 **を法として合同である.」 そして,**

$$1 \equiv 4 \ (\boldsymbol{mod}\ 3)$$

と表す.

7. **同値関係は対称律を満たすので,**

$$4 \equiv 1 \ (\boldsymbol{mod}\ 3)$$

と書いても同じこと.

(証明) 関係 $R_{(n)}$ が $\mathbf{Z}$ 上の同値関係であることを示す.

反射律) 任意の $x \in \mathbf{Z}$ に対し,

$$x - x = 0 = n \cdot 0$$

と書けるから, $xR_{(n)}x$.

ゆえに, $R_{(n)}$ は反射律を満たす.

対称律) 任意の $(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ に対し,

$xR_{(n)}y$ ならば,

$$x - y = n \cdot k$$

となる $k \in \mathbf{Z}$ が存在する.

このとき,

$$y - x = -k \cdot n$$

と書けて, $-k \in \mathbf{Z}$ より, $yR_{(n)}x$.

ゆえに, $R_{(n)}$ は対称律を満たす.

推移律）任意の $(x,y),(y,z),\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ に対し，

$xR_{(n)}y$ かつ $yR_{(n)}z$ ならば，

$x-y=n\cdot k$ かつ $y-z=n\cdot m$

と書ける，$k,m\in\mathbf{Z}$ が存在する．このとき，

$x-z=n\cdot k+n\cdot m=n(k+m)$

と書けて，$(k+m)\in\mathbf{Z}$ より，$xR_{(n)}z$．

ゆえに，$R_{(n)}$ は推移律を満たす．

以上より，$R_{(n)}$ は $\mathbf{Z}$ 上の同値関係となる．∎

定義 *4. 13.*
R を X 上の同値関係とする.
任意の $x \in X$ に対し, 以下を定義する.

1. 以下の X の部分集合を R による x の <u>同値類</u> という:

$$[x] := \{y \mid y \in X,\ xRy\}\ (\subseteq X)$$

2. それぞれの同値類に属する要素を, その同値類の <u>代表元</u> という.

例 *4. 14.* $n = 3$ **の場合の** Z **上の同値関係** $R_{(n)}$ **について**

1. $5 \in \mathbf{Z}$ **に対する同値類** $[5]$ **:**

$$\begin{aligned}
[5] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 5R_{(3)}y\} \\
&= \{y \in \mathbf{Z} \mid 5 - y \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\} \\
&= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : 5 - y = 3k\} \\
&= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = -3k + 5\} \\
&= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = 3(1 - k) + 2\} \qquad (m = 1 - k) \\
&= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists m \in \mathbf{Z} : y = 3m + 2\} \\
&= \{\ldots,\ -4,\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ \ldots\}
\end{aligned}$$

2. **同値類** $[5]$ **において,** 5 **は** $[5]$ **の代表元である.**

また, 2 **も** $[5]$ **の代表元である.**

3. $0, 1, 2 \in \mathbf{Z}$**に対する 同値類** $[0], [1], [2]$ **:**

$$[0] = \{y \in \mathbf{Z} \mid 0R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 0 - y \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\}$$
$$= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : 0 - y = 3k\}$$
$$= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = -3k\}$$
$$= \{\ldots,\ -6,\ -3,\ 0,\ 3,\ 6,\ \ldots\}$$

$$[1] = \{y \in \mathbf{Z} \mid 1R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 1 - y \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\}$$
$$= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : 1 - y = 3k\}$$
$$= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = -3k + 1\}$$
$$= \{\ldots,\ -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ \ldots\}$$

$$[2] = \{y \in \mathbf{Z} \mid 2R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 2 - y \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\}$$
$$= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : 2 - y = 3k\}$$
$$= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = -3k + 2\}$$
$$= \{\ldots,\ -4,\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ \ldots\} = [5]$$

(同値類 $[2]$ **の任意の代表元** $x \in [2]$ **に対し,** $[2] = [x]$ **となる.)**

4. $$\begin{aligned}[0] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 0R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 0 - y \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = 3k\} \\ &= \{\dots,\ -6,\ -3,\ 0,\ 3,\ 6,\ \dots\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[1] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 1R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 1 - y \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = 3k + 1\} \\ &= \{\dots,\ -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ \dots\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[2] &= \{y \in \mathbf{Z} \mid 2R_{(3)}y\} = \{y \in \mathbf{Z} \mid 2 - y \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = 3k + 2\} \\ &= \{\dots,\ -4,\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ \dots\}\end{aligned}$$

5.

$[0]$ **の要素は** 3 **で割って余りが** 0 **になる整数**

$[1]$ **の要素は** 3 **で割って余りが** 1 **になる整数**

$[2]$ **の要素は** 3 **で割って余りが** 2 **になる整数**

定理 *4. 16.*
R を X 上の同値関係とする.
このとき, 以下のことが成り立つ.

1. $\forall x \in X : x \in [x]$
2. $\forall x, y \in X : (xRy \Leftrightarrow [x] = [y])$
3. $\forall x, y \in X : (x \in [y] \Leftrightarrow [x] = [y])$
4. $\forall x, y \in X : ([x] \cap [y] \neq \phi \Rightarrow [x] = [y])$
5. $\forall x, y \in X : (xRy \Leftrightarrow (\exists z \in X : (x \in [z]) \wedge (y \in [z])))$

定義 *4. 17.*

R を X 上の同値関係とする．このとき，

$$X/R := \{[x] \mid x \in X\}$$

を X 上のRによる <u>商集合</u> という．

例 *4. 18.*
同値関係 $R_{(3)}$ の 商集合 を求めよ.

(解答) 商集合の定義より,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}/R_{(3)} &= \{[x] \mid x \in \mathbf{Z}\} \\
&= \{\ldots,\ [-2],\ [-1],\ [0],\ [1],\ [2],\ [3],\ \ldots\} \\
&= \{[0],[1],[2]\}.
\end{aligned}$$

なぜなら,

$$\cdots = [-3] = [0] = [3] = [6] = \cdots$$
$$\cdots = [-2] = [1] = [4] = [7] = \cdots$$
$$\cdots = [-1] = [2] = [5] = [8] = \cdots$$

定義 4. 22.
X を空でない集合とする.
集合族 $S(\subseteq 2^X)$ が X の <u>直和分割</u> であるとは, 次の 3 つの条件が満たされること:

1. $\phi \notin S$,
2. $\cup_{A \in S} A = X$,
3. $\forall A, B \in S : [A \cap B \neq \phi \Rightarrow A = B]$.

直和分割の要素を <u>ブロック</u> という.

例 4. 23. 集合 $X = \{a, b, c, d, e\}$ とする.
集合族

$$S = \{\ \{a\},\ \{b, c\},\ \{d, e\}\ \}(\subseteq 2^X)$$

は X の直和分割である.
このとき, この直和分割 S は 3 個の ブロック からなる.

定理 *4. 24.*
X を空でない集合とし, R を X 上の同値関係とする.
このとき, 商集合 X/R は X の直和分割である.

たとえば, $\mathbf{Z}$ 上の同値関係 $R_{(3)}$ による商集合 $\mathbf{Z}/R_{(3)}$

$$\begin{aligned} S &= \mathbf{Z}/R_{(3)} = \{[0],[1],[2]\} \\ [0] &= \{\ldots,\ -6,\ -3,\ 0,\ 3,\ 6,\ \ldots\} \\ [1] &= \{\ldots,\ -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ \ldots\} \\ [2] &= \{\ldots,\ -4,\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ \ldots\} \end{aligned}$$

は直和分割である. つまり, 以下の直和分割の条件を満たす.

1. $\phi \notin S$,

2. $\cup_{A\in S} A = X$,

3. $\forall A, B \in S : [A \cap B \neq \phi \Rightarrow A = B]$.

例 *4. 25.* **商集合 $\mathbf{Z}/R_{(3)}$ が $\mathbf{Z}$ の直和分割であることを確かめる.**

(証明) $\mathbf{Z}/R_{(3)} = \{[0],[1],[2]\}$ **であることに注意する.**

1. **任意の** $[x] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}$ **に対し,** $x \in [x]$ **より,** $[x] \neq \phi$**.**

ゆえに, $\phi \notin \mathbf{Z}/R_{(3)}$**.**

2. $\bigcup_{A \in \mathbf{Z}/R_{(3)}} A = \mathbf{Z}$ **を示す.**

$\subseteq$) $\bigcup_{[x] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}} [x] = [0] \cup [1] \cup [2] \subseteq \mathbf{Z}$ **は明らか.**

$\supseteq$) **任意の** $z \in \mathbf{Z}$ **に対し,**

z **を** 3 **で割ったときの余りは** $0, 1, 2$ **のいずれかである. これより,**

$$z \in [0] \cup [1] \cup [2] = \bigcup_{[x] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}} [x].$$

すなわち, $\bigcup_{[x] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}} [x] \supseteq \mathbf{Z}$**.**

ゆえに, $\bigcup_{[x] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}} [x] = \mathbf{Z}$**.**

3. **任意の** $[x], [y] \in \mathbf{Z}/R_{(3)}$ **に対し,**

$[x] \cap [y] \neq \phi$ **ならば** $z \in [x] \cap [y]$ **となる** z **が存在し,**

$$z \in [x] \text{ ならば } z = 3m + x,\ m \in \mathbf{Z},$$
$$z \in [y] \text{ ならば } z = 3k + y,\ k \in \mathbf{Z}$$

と表される.

したがって,

$$x - y = 3(m - k),\ (m - k) \in \mathbf{Z}$$

となり, $xR_{(3)}y$ **である.**

ゆえに, 定理 ***4.16*** **の** ***2*** $(xRy \Rightarrow [x] = [y])$ **より,** $[x] = [y]$**.**

以上より, $\mathrm{Z}/R_{(3)}$ **が** Z **の直和分割であることが示された.** ∎

定理 *4. 24.* 商集合 X/R は X の直和分割である の証明

1. 任意の $[x] \in X/R$ に対し, $x \in [x]$ より, $[x] \neq \phi$.

ゆえに, $\phi \notin X/R$.

2. $\bigcup_{A \in X/R} A = X$ を示す.

$\subseteq$) 任意の $x \in \bigcup_{A \in X/R} A$ に対し,

$x \in A$ となる $A \in X/R$ が存在する.

したがって, $x \in A \subseteq X$ より, $x \in X$.

ゆえに, $\bigcup_{A \in X/R} A \subseteq X$.

$\supseteq$) 任意の $x \in X$ に対し,

$x \in [x]$ となる $[x] \in X/R$ が存在する.

したがって, $x \in [x] \subseteq \bigcup_{A \in X/R} A$ より, $x \in \bigcup_{A \in X/R} A$.

ゆえに, $\bigcup_{A \in X/R} A \supseteq X$.

以上より, $\cup_{A \in X/R} A = X$.

3. **任意の** $[x], [y] \in X/R$ **に対し,**

定理 *4.16* の *4* $(([x] \cap [y] \neq \phi) \Rightarrow [x] = [y])$ **より,**

$[x] \cap [y] \neq \phi$ **ならば** $[x] = [y]$**.**

以上より, X/R **が** X **の直和分割であることが示された.** ∎

定理 *4. 26.*

X を空でない集合とし, 集合族 S を X の直和分割とする. このとき, 以下が成り立つ.

1. $R := \bigcup_{A \in S} A \times A \ (\subseteq X \times X)$
   と定義すると, R は同値関係になる.
2. $X/R = S$.

（例）集合 $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ に対し，

直和分割 $S = \{\ \{a\},\ \{b, c\},\ \{d, e, f\}\ \}$ とする．

$$
\begin{aligned}
R &= \bigcup_{A \in S} A \times A \\
&= (\{a\} \times \{a\}) \cup (\{b, c\} \times \{b, c\}) \cup (\{d, e, f\} \cup \{d, e, f\}) \\
&= \{(a, a)\}\ \cup\ \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\} \\
&\quad \cup \{(d, d), (d, e), (d, f), (e, e), (e, f), (e, d), (f, f), (f, d), (f, e)\} \\
&= \{(a, a),\ (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), \\
&\qquad (d, d), (d, e), (d, f), (e, e), (e, f), (e, d), (f, f), (f, d), (f, e)\}.
\end{aligned}
$$

たとえば，

$$a \in X \ \Rightarrow\ (a, a) \in R \quad \text{(反射律)}$$

$$(b, c) \in R \ \Rightarrow\ (c, b) \in R \quad \text{(対称律)}$$

$$(d, e),\ (e, f) \in R \ \Rightarrow\ (d, f) \in R \quad \text{(推移律)}$$

$$
\begin{aligned}
X/R &= \{\ [x] \mid x \in X\ \} \\
&= \{\ [a],\ [b],\ [c],\ [d],\ [e],\ [f]\ \} \\
&= \{\ [a],\ [b],\ [d]\ \} \\
&= \{\ \{a\},\ \{b,c\},\ \{d,e,f\}\ \} = S
\end{aligned}
$$

なぜなら，

$$[a] = \{a\},\ [b] = \{b,c\} = [c],\ [d] = \{d,e,f\} = [e] = [f].$$

定理 *4. 27.*
空でない集合 X に対し,
X の直和分割の全体からなる集合を $\widehat{S}$,
X 上の同値関係の全体からなる集合を $\widehat{R}$ とする.
このとき,
　直和分割 $S \in \widehat{S}$ に対し,
　同値関係 $R_S = \bigcup_{A \in S} A \times A \in \widehat{R}$
を対応させる写像は,
　$\widehat{S}$ から $\widehat{R}$ へ
の全単射である.

この定理より, 有限集合 X 上の <u>同値関係の総数</u> は,
X の <u>直和分割の総数</u> と同じである. すなわち,

$$|\widehat{S}| = |\widehat{R}|$$

例 $4.\ 29.$ 集合 $\{a,b,c\}$ 上の同値関係をすべて列挙せよ.

(解答)

集合 $\{a,b,c\}$ の直和分割は, その分割の個数を $1,2,3$ の順にして, 以下の 5 通りである.

直和分割	$\longrightarrow$	**同値関係**
$S_1=\{\{a,b,c\}\}$	$\longrightarrow$	$R_1=\{a,b,c\}\times\{a,b,c\}$
$S_2=\{\{a,b\},\{c\}\}$	$\longrightarrow$	$R_2=(\{a,b\}\times\{a,b\})\cup(\{c\}\times\{c\})$
$S_3=\{\{a\},\{b,c\}\}$	$\longrightarrow$	$R_3=(\{a\}\times\{a\})\cup(\{b,c\}\times\{b,c\})$
$S_4=\{\{b\},\{c,a\}\}\}$	$\longrightarrow$	$R_4=(\{b\}\times\{b\})\cup(\{c,a\}\times\{c,a\})$
$S_5=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$	$\longrightarrow$	$R_5=(\{a\}\times\{a\})\cup(\{b\}\times\{b\})\cup(\{c\}\times\{c\})$

例 $4.\ 30.$ 集合 $\{a,b,c,d\}$ 上の同値関係をすべて列挙せよ.

定理 *4. 31.* **(直和分割の総数)**
m **個の要素をもつ集合** X **を**
n **個のブロックに分割する直和分割の総数は,**

$$\sum_{n=1}^{m} S(m,n)$$

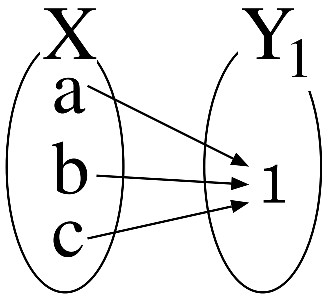
となる. ここで, (第 *2* **種スターリング数)**

$$S(m,n) := \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m$$

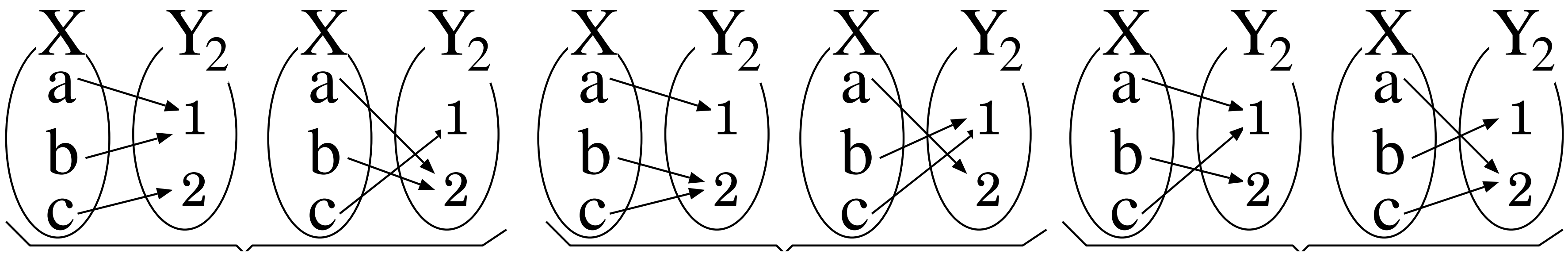
ここで, 式 $S(m,n)$ **中の** $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m$ **は,**
$\underline{m\text{ 個の要素をもつ集合}}$**から**$\underline{n\text{ 個の要素をもつ集合}}$**への** **<u>全射の総数</u>.**

$\dfrac{1}{n!}$ **の意味は** *?*

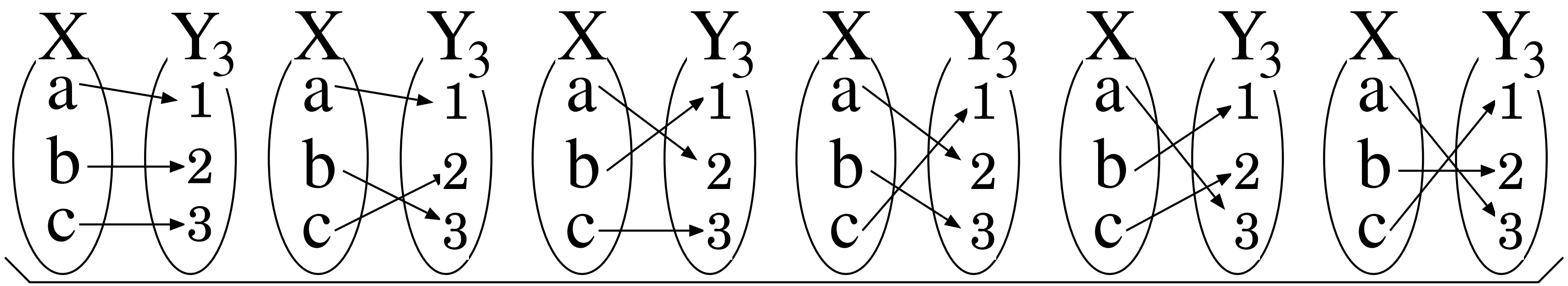
$X=\{a,b,c\}$, $Y_1=\{1\}$, $Y_2=\{1,2\}$, $Y_3=\{1,2,3\}$ とする.



$\{\{a, b, c\}\}$



$\{\{a,b\},\ \{c\}\}$ $\{\{a\},\ \{b,c\}\}$ $\{\{a,c\},\ \{b\}\}$



$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

確かに, 1 つの直和分割 S に対し, $|S|!$ 通りの全射が存在している.

例 *4. 42.* $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ **上の関係** $\sim$ **を,**
任意の $(m_1,n_1),(m_2,n_2)\in\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ **に対し,**

$$(m_1,n_1)\sim(m_2,n_2) \quad\Leftrightarrow\quad m_1n_2=m_2n_1$$

と定義する.
このとき, $\sim$ **が** $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ **上の同値関係になるを示せ.**

分数 $\dfrac{a}{b}$ **とは,** $(a,b)\in\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ **の** $\sim$ **による同値類** $[(a,b)]$**.**

集合 $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ **に対し, 同値関係** $\sim$ **による商集合**

$$(\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\}))\ /\ \sim$$

は有理数の全体からなる集合 $\mathbf{Q}$ **である.**

整数 n_1, n_2 が非ゼロであることがポイント.

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \quad \Leftrightarrow \quad m_1 n_2 = m_2 n_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$$

$$\begin{aligned}
[(a, b)] &= \{(m, n) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\}) \mid (a, b) \sim (m, n)\} \\
&= \left\{(m, n) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\}) \mid \frac{a}{b} = \frac{m}{n}\right\} \\
&= \{(a, b),\ (m_1, n_1),\ (m_2, n_2),\ (m_3, n_3),\ \ldots\ \} \\
&\quad \frac{a}{b} = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_3}{n_3} = \ \cdots \\
&\quad \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \ \cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= (\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\}))\ /\ \sim \\
&= \{[(a, b)] \mid (a, b) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})\}
\end{aligned}$$

例 *4.22* の証明 *(* $\sim$ は $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ 上の同値関係である*)*

反射律) 任意の $(m,n)\in\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ に対し,

$mn=mn$ より, $(m,n)\sim(m,n)$.

対称律) 任意の $(m_1,n_1),\ (m_2,n_2)\in\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ に対し,

$(m_1,n_1)\sim(m_2,n_2)\ \Leftrightarrow\ m_1n_2=m_2n_1$ ($\sim$ の定義より)

$\Leftrightarrow\ m_2n_1=m_1n_2$ ($A=B$ ならば $B=A$ より)

$\Leftrightarrow\ (m_2,n_2)\sim(m_1,n_1)$. ($\sim$ の定義より)

推移律) 任意の $(m_1,n_1),(m_2,n_2),(m_3,n_3)\in\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ に対し,

$(m_1,n_1)\sim(m_2,n_2)$ かつ $(m_2,n_2)\sim(m_3,n_3)$

$\Leftrightarrow m_1n_2=m_2n_1$ かつ $m_3n_2=m_2n_3$ ($\sim$ の定義より)

$\Leftrightarrow \frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_3}{n_3}$ ($n_i\neq 0$, $i=1,2,3$, より)

$\Leftrightarrow m_1n_3=m_3n_1\ \Leftrightarrow (m_1,n_1)\sim(m_3,n_3)$. ($\sim$ の定義より)

以上より, $\sim$ は 反射律, 対称律, 推移律を満たす.

ゆえに, $\sim$ は $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ 上の同値関係である. ∎

4.3 順序関係

定義 4. 43.
反射律, **反対称律**, **推移律** の 3 つを満す関係を **順序関係**, あるいは **半順序関係** と呼ぶ.

順序関係 R が定義されている集合 X を **順序集合** といい, (X, R) と表す.

1. R **が順序関係のとき,** xRy **を** $x \leq y$ **と表すことがある.**

2. $x \leq y$ **のとき,**

y **は** x **より** $(R$ **の意味で** $)$ **大きい, あるいは,**

x **は** y **より** $(R$ **の意味で** $)$ **小さいという.**

3. $x \leq y$ **かつ** $x \neq y$ **のとき,**

y **は** x **より真に** $(R$ **の意味で** $)$ **大きい,**

あるいは, x **は** y **より真に** $(R$ **の意味で** $)$ **小さいといい,**

$x < y$ **と表す.**

4. $x < y$ **であって,** $x < z < y$ **を満たす** z **が存在しないとき,**

“ x **は** y **の** **<u>直前の要素である</u>** **”, あるいは,**

“ y **は** x **の** **<u>直後の要素である</u>** **” という.**

例 $4.\ 44.$ S を空でない集合とするとき,
$(2^S, \subseteq)$ は順序集合になる.
ここで, $(2^S$ は S のべき集合, 記号 $\subseteq$ は集合の包含関係を表す.

(証明) $(2^S, \subseteq)$ が反射律, 反対称律, 推移律を満たすことを示せばよい.

反射律) 任意の $A \in 2^S$ に対し, $A \subseteq A$.

反対称律) 任意の $A, B \in 2^S$ に対し,
$A \subseteq B$ かつ $A \supseteq B$ ならば $A = B$.

推移律) 任意の $A, B, C \in 2^S$ に対し,
$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ とする.
任意の $x \in A$ に対し, $x \in B \subseteq C$ より, $x \in C$.
ゆえに, $A \subseteq C$ が成り立つ.

以上より, $\subseteq$ は 反射律, 反対称律, 推移律 を満たす.
ゆえに, $(2^S, \subseteq)$ は順序集合になる.

定義 *4. 45.* X の要素を次のように作成した図形を <u>ハッセ図</u> という.

$(X, \leq)$ を順序集合とする.

i. もし $x < y$ ならば, y を x より上に書く.

ii. そして, y が x の直後のとき, かつ そのときに限り,
y と x を線で結ぶ.

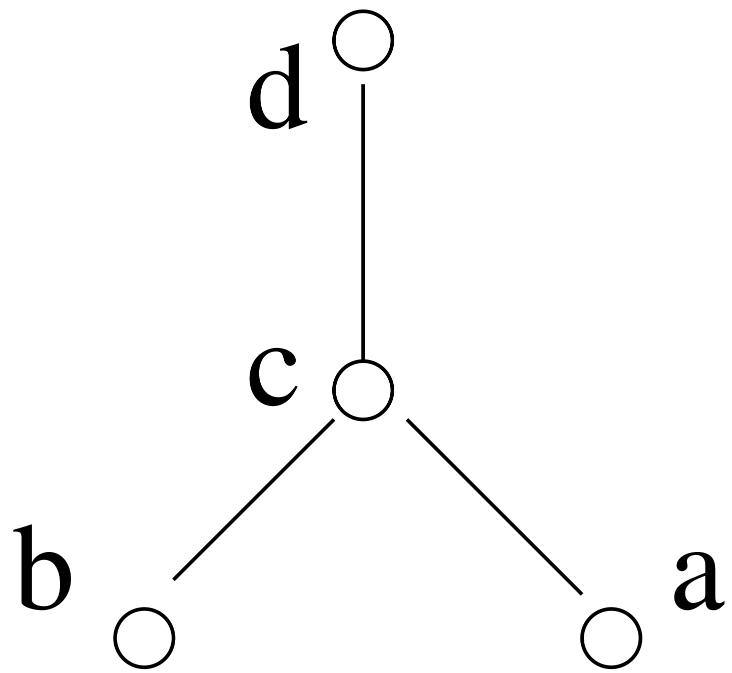
例 *4. 46.* 順序集合 $(X, \leq)$ を以下のように定義する:

$X = \{a, b, c, d\}$,

$\leq = \{(a, c), (b, c), (c, d), (a, d), (b, d), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$.

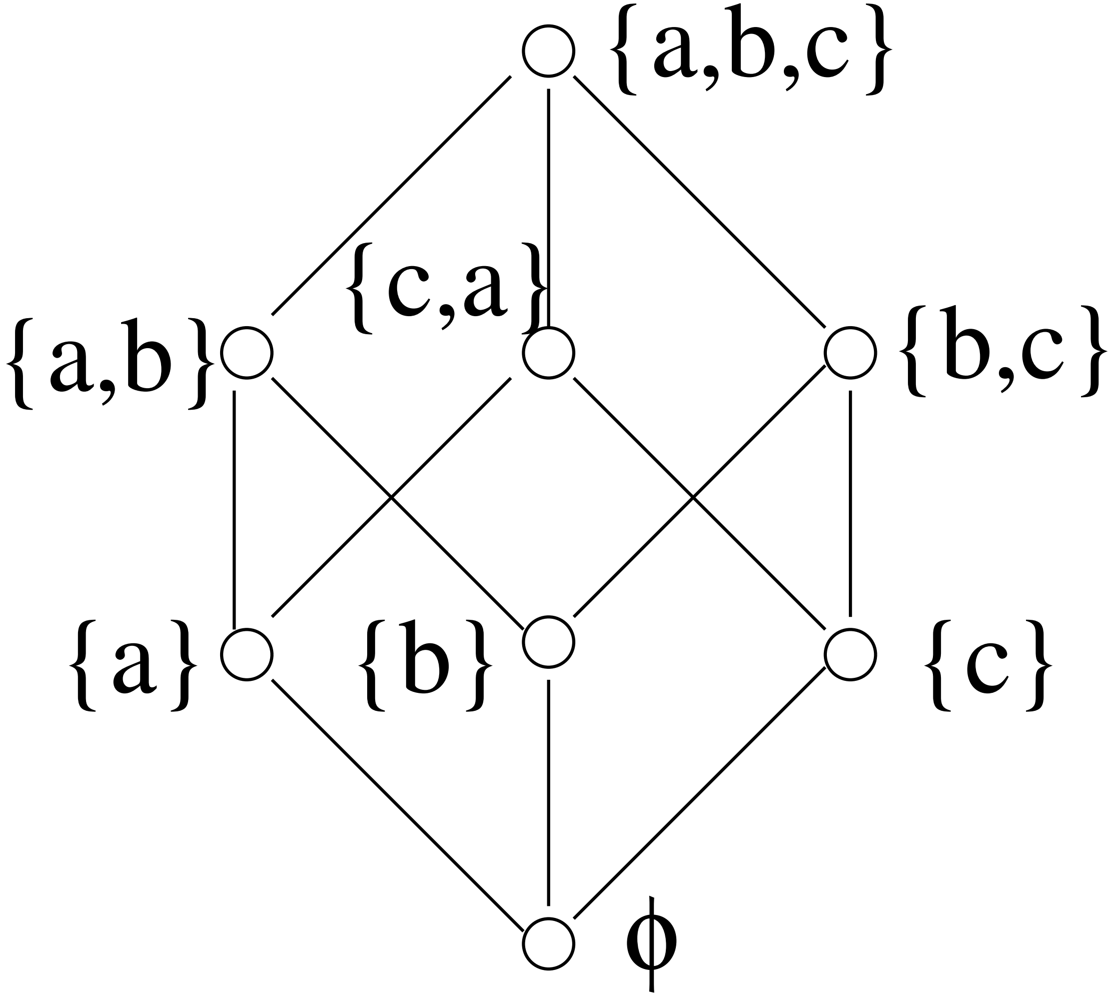
このとき, 順序集合 $(X, \leq)$ のハッセ図を記せ.

(解答)



例 *4. 47.* $S=\{a,b,c\}$ **とするとき，**
順序集合 $(2^S,\subseteq)$ **のハッセ図を示せ．**
(解答)

$2^S=\{\phi,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{b,c\},\ \{c,a\},\ \{a,b,c\}\}$ **より，**



定義 *4. 49.* $(X, \leq)$ **を順序集合とし,** Y **を** X **の空でない部分集合とする.**

1. a **が** Y **の** <u>**最大元**</u> **であるとは :** $a \in Y$ **かつ** $\forall x \in Y : x \leq a$.

   Y **の最大元を** $\max Y$ **と表す.**

2. a **が** Y **の** <u>**最小元**</u> **であるとは :** $a \in Y$ **かつ** $\forall x \in Y : a \leq x$.

   Y **の最小元を** $\min Y$ **と表す.**

3. a **が** Y **の** <u>**極大元**</u> **であるとは :**

   $a \in Y$ **かつ** $\forall x \in X : [(a \leq x$ **かつ** $a \neq x) \Rightarrow x \notin Y]$.

4. a **が** Y **の** <u>**極小元**</u> **であるとは :**

   $a \in Y$ **かつ** $\forall x \in X : [(x \leq a$ **かつ** $a \neq x) \Rightarrow x \notin Y]$.

5. a **が** Y **の** **<u>上界</u>** **であるとは：**

$a \in X$ **かつ** $\forall x \in Y : x \leq a$**.**

6. a **が** Y **の** **<u>下界</u>** **であるとは：**

$a \in X$ **かつ** $\forall x \in Y : a \leq x$**.**

7. a **が** Y **の** **<u>上限</u>** **であるとは，** **<u>a が Y の上界の最小元であること</u>.**

Y **の上限を** $\sup Y$ **と表す.**

8. a **が** Y **の** **<u>下限</u>** **であるとは，** **<u>a が Y の下界の最大元であること</u>.**

Y **の下限を** $\inf Y$ **と表す.**

上記の定義より，上限，下限は以下のように表すこともできる．

1. $\overline{Y} := \{a \mid a \in X,\ a$ は Y の上界$\}$とする．

   $\overline{Y}$ の最小元が存在すれば，それが Y の上限である．

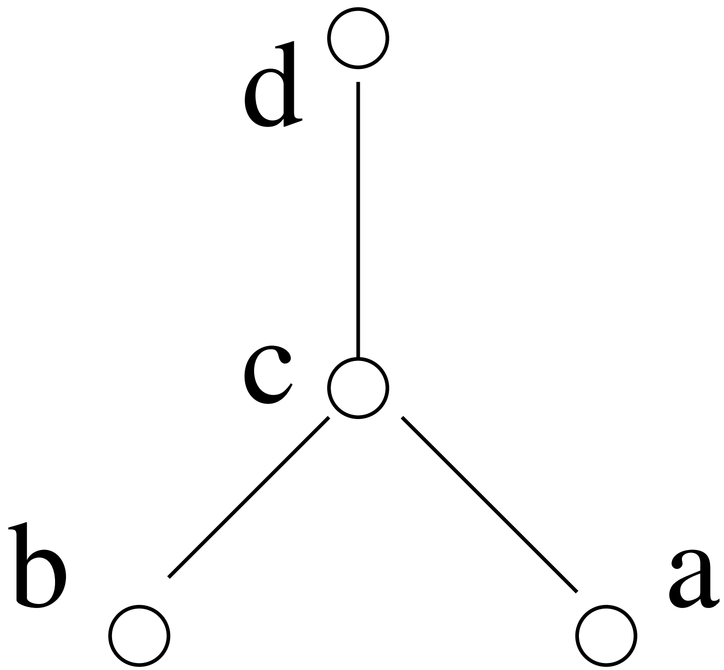
2. $\underline{Y} := \{a \mid a \in X,\ a$ は Y の下界$\}$とする．

   $\underline{Y}$ の最大元が存在すれば，それが Y の上限である．

注意 *4. 50.*

1. 極大元と極小元は必ず存在する．
2. 最大元や最小元は存在するとは限らない．
3. 極大元 (極小元) は複数存在することもある．
4. 最大元 (最小元) は存在するとしてもただ 1 つである．

例 *4. 51.* **順序集合** $(X, \leq)$ **を例** *46* **と同じものとする．このとき，**X **の最大元，最小元，極大元，極小元を示せ．**



(*解答*)

最大元: d**，最小元: なし，極大元:** d**，極小元:** a, b**.**

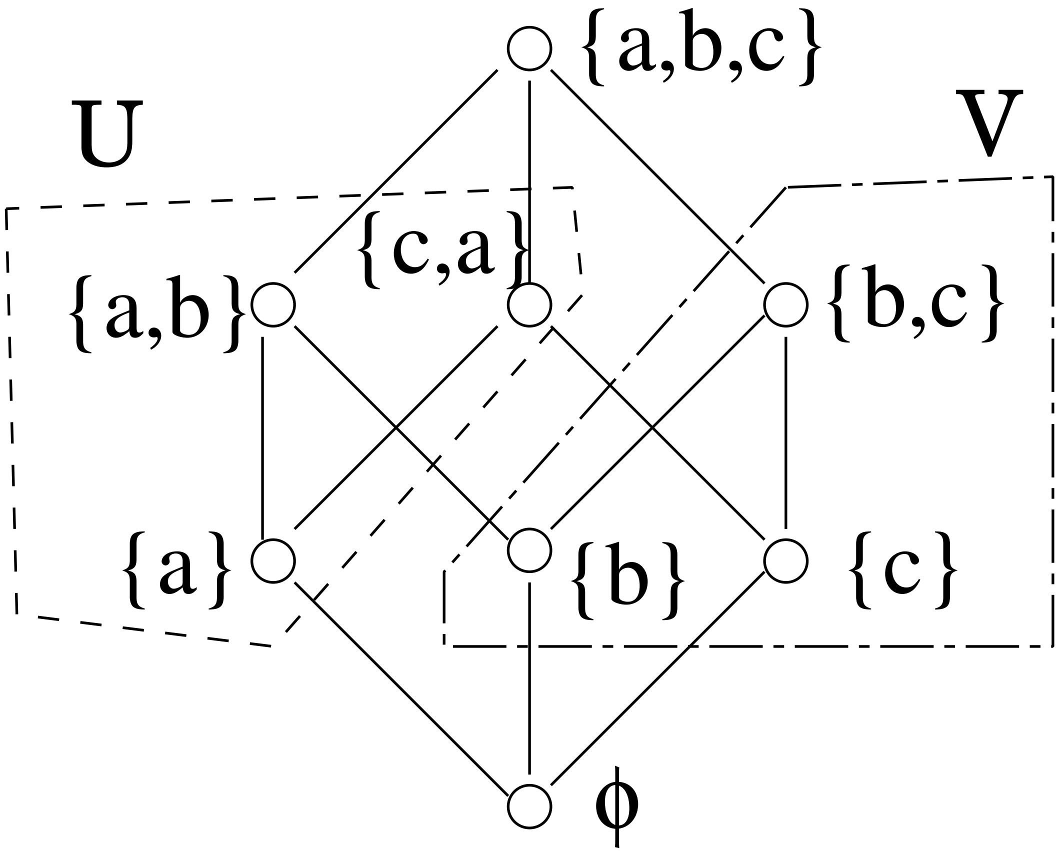
例 *4. 52.* $S=\{a,b,c\}$ **とし, 例 *47* と同じ順序集合** $(2^S,\subseteq)$ **を考える. そこで,** 2^S **の部分集合として,**

$U=\{\{a\},\{a,b\},\{c,a\}\}$, $\quad V=\{\{b\},\{c\},\{b,c\}\}$

とする. このとき, 部分集合 U **と** V **のそれぞれの**

最大元, 最小元, 極大元, 極小元, 上界, 下界, 上限, 下限　を示せ.

(解答)



	U	V
最大元	**なし**	$\{b,c\}$
最小元	$\{a\}$	**なし**
極大元	$\{a,b\}$, $\{c,a\}$	$\{b,c\}$
極小元	$\{a\}$	$\{b\},\{c\}$
上界	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$, $\{b,c\}$
下界	$\{a\},\phi$	ϕ
上限	$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$
下限	$\{a\}$	ϕ

定義 4. 56. $(X, \leq)$ を順序集合とする.
$x, y \in X$ に対し,

$x \leq y$ または $y \leq x$

が成り立つとき,

x と y は <u>比較可能</u> であるという.

そうでないとき, <u>比較不能</u> であるという.
任意の 2 要素が比較可能ならば, $\leq$ を <u>全順序関係</u>,
あるいは, <u>線型順序関係</u> と呼ぶ.

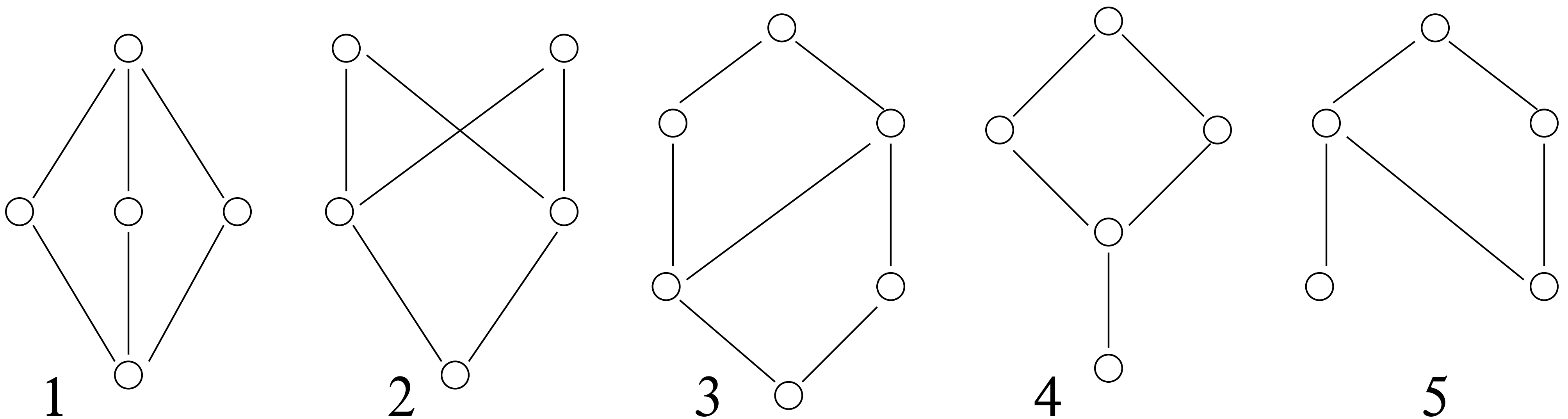
例 4. 57. 関係 $\leq$ を, 整数の全体 $\mathbf{Z}$ 上の通常の大小関係とすれば,
任意の整数 $x, y \in \mathbf{Z}$ に対し,

$x \leq y$ あるいは $y \leq x$

のいずれかが成り立つ.
ゆえに, 整数の大小関係 $\leq$ は全順序関係である.

定義 4. 62. $(X, \leq)$ を順序集合とする．任意の $x, y \in X$ に対し，集合 $\{x, y\}$ の $\sup\{x, y\}$ と $\inf\{x, y\}$ が存在するとき，$(X, \leq)$ を <u>束</u> という．

例 4. 63. 次のハッセ図で示される順序集合は，束であるかどうか述べよ．



1　　2　　3　　4　　5

(解) 束である: 1,3,4. 束でない: 2,5.

4.5 関係の閉包

定義 4. 68.
R を $X \times Y$ 上の2項関係, S を $Y \times Z$ 上の2項関係とするとき,
$X \times Z$ 上の 2 項関係 $R \circ S$ を

$$R \circ S := \{(x, z) \mid \exists y \in Y : [((x, y) \in R) \land ((y, z) \in S)]\}$$

と定義する.

$R \circ S$ を R と S の合成, あるいは 積という.

例 4. 69.
R, S, T を, それぞれ$X \times Y$, $Y \times Z$, $Z \times W$ 上の 2 項関係とするとき,
結合律

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$

が成り立つ.

(証明) $(x, w) \in R \circ (S \circ T) \Leftrightarrow (x, w) \in (R \circ S) \circ T$ を示せばよい.

定義 *4. 70.*

R を X 上の関係とする．そのとき，R^+ を以下のように定義する:

1. $R^1 := R$;
2. $n \geq 2$ に対し，$R^n := R^{n-1} \circ R$;
3. $R^+ := \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$.

例 *4. 71.*

有限集合 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ **上の関係** R **を**

表現する行列 $M = (m_{i,j})$**,** $1 \leq i, j \leq n$**, が与えられているとする.**

このとき, R^2 **を表現する行列を求めるにはどうすればよいか.**

一般に, R^n **を表現する行列を求めるにはどうすればよいか.**

(解答のスケッチ)

R^1 **の場合)**

$$(x_i, x_j) \in R \quad \Leftrightarrow \quad x_i R x_j \quad \Leftrightarrow \quad m_{i,j} = 1$$

$R^2 (= R \circ R)$ **の場合)**

$$
\begin{aligned}
(x_i, x_k) \in R^2 \quad & \Leftrightarrow \quad x_i (R \circ R) x_k \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x_j \;:\; (x_i R x_j) \wedge (x_j R x_k) \\
& \Leftrightarrow \quad \exists j \;:\; (m_{i,j} = 1) \wedge (m_{j,k} = 1) \\
& \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \cdot m_{j,k} \neq 0
\end{aligned}
$$

最後の積和は, 行列 M **の** i **行目ベクトル と** j **列目ベクトル の内積 :**

$$
\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \cdot m_{j,k} = (m_{i,1}, \ldots, m_{i,n})(m_{1,j}, \ldots, m_{n,j})^T \neq 0
$$

以上より, R^2 **を表現する行列は次のように定めればよい.**

i) M^2 **の** (i, j) **成分** $\neq 0$ **ならば** 1,

ii) **そうでなければ** 0.

$R^3 (= R^2 \circ R)$ **の場合** *)*

R^2 **と** R **の合成** ***(*****積*****)*****を考えばれよい.**

$R^n (= R^{n-1} \circ R)$ **の場合** *)*

R^{n-1} **と** R **の合成** ***(*****積*****)*****を考えればよい.** ∎

1. R を集合 X 上の関係とする.

$x, y \in X$ が xRy を満たすとき, x から y に **1** ステップで

<u>到達可能</u> であるという.

2. $z_1, \ldots, z_n \in X$ が存在し,

$$xRz_1 \ \wedge \ z_1Rz_2 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ z_{n-1}Rz_n \ \wedge \ z_nRy$$

が成り立つとき,

x から y に $n+1$ ステップで到達可能であるという.

3. x から y に有限回数のステップで到達可能であるとき,

x から y に到達可能であるという.

4. $R^n = \{(x, y) \mid (x, y) \in X$, x から y に, n ステップで到達可能$\}$,

5. $R^+ = \{(x, y) \mid (x, y) \in X$, x から y に到達可能$\}$.

定理 *4. 72.*

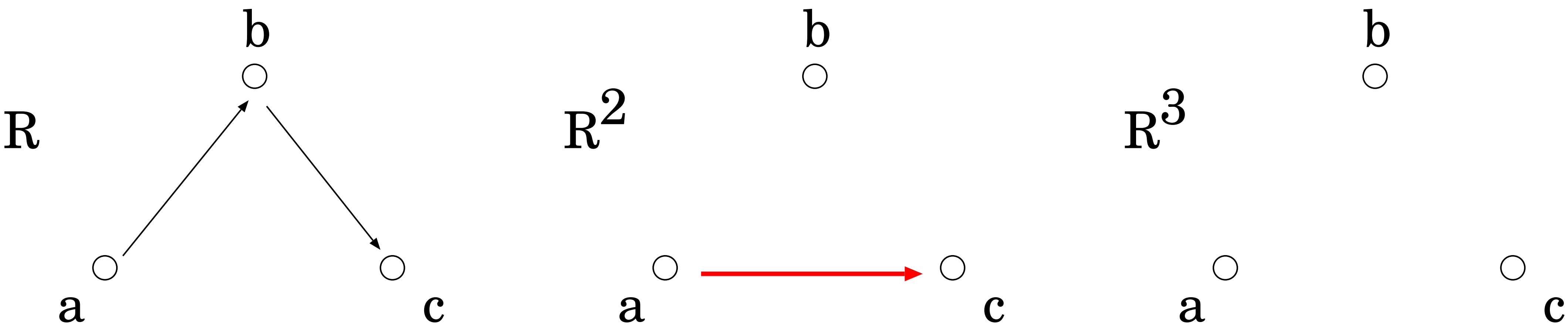
R を集合 X 上の関係とするとき, 以下が成り立つ.

1. $R^n = R^{n-k} \circ R^k$. ただし, 非負整数 n, k は $n - k \leq 1$ を満たす.
2. R^+ は推移的な関係である.

（例） 集合 $X = \{\ a,\ b,\ c\ \}$, 関係 $R = \{\ (a,b),\ (b,c)\ \}$ とする.

1. 関係の積： $R^2 = R \circ R = \{\ (a,c)\ \}$, $R^3 = R^2 \circ R = \{\quad\} = \phi$.

2. グラフ：



3. 行列：

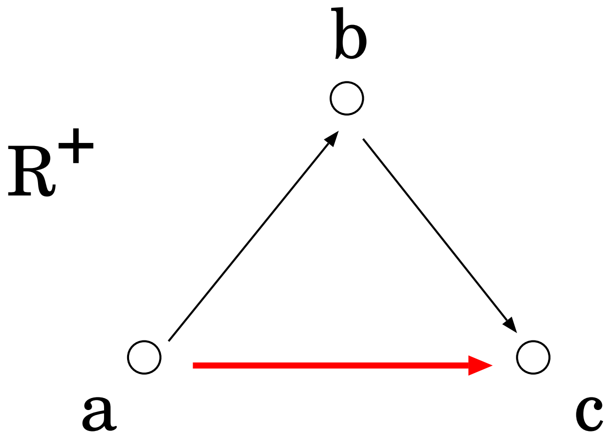
$$\overset{M}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad \overset{M^2}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad \overset{M^3}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}.$$

4. R^2 **と 行列の積について：** $aRb \wedge bRc \ \Rightarrow \ aRc$

$$M^2 = M \times M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. R^+ **：**

$$\begin{aligned} R^+ \quad &= \quad R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \\ &= \quad R^1 \cup R^2 = \{\ (a,b),\ (b,c),\ (a,c)\ \} \end{aligned}$$



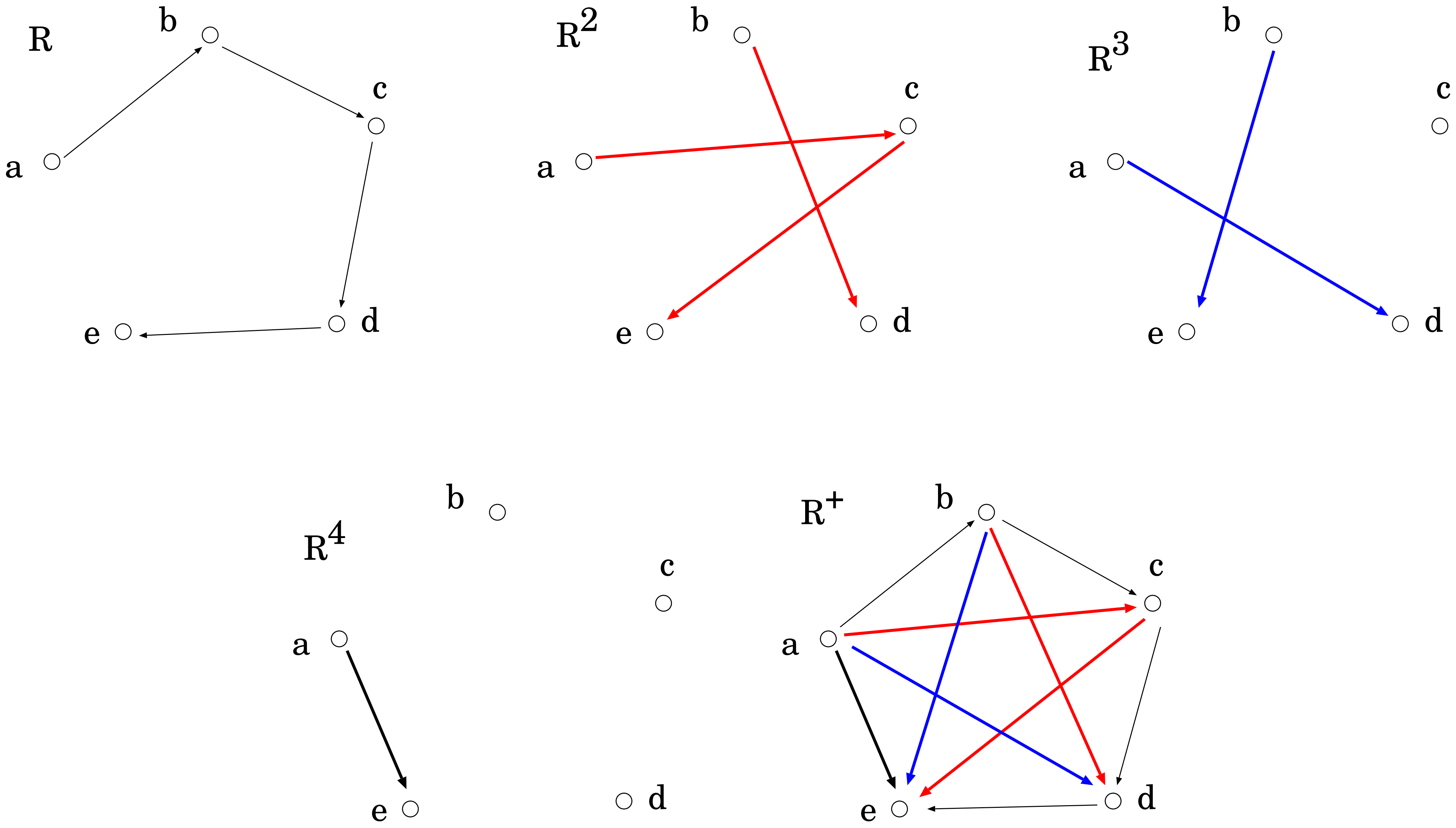
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（例）集合 $X = \{\ a,\ b,\ c,\ d,\ e\ \}$**, 関係** $R = \{\ (a,b),\ (b,c),\ (c,d),\ (d,e)\ \}$ **とする.**

$$\begin{aligned}
R^2 &= \{\ (a,c),\ (b,d),\ (c,e)\ \} \\
R^3 &= R^2 \circ R = \{\ (a,d),\ (b,e)\ \} \\
R^3 &= R \circ R^2 = \{\ (a,d),\ (b,e)\ \} \\
R^4 &= R^3 \circ R = \{\ (a,e)\ \} \\
R^5 &= R^4 \circ R = \{\quad\} = \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^+ &= R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5 \cup \cdots \\
&= R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \\
&= \{\ (a,c),(b,d),(c,e),\ (a,d),(b,e),\ (a,d),(b,e),\ (a,e)\ \}
\end{aligned}$$

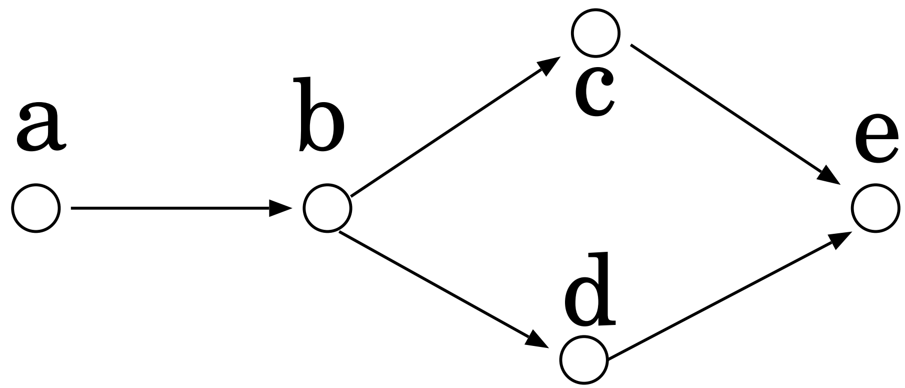
R^n と R^+ に対応するグラフ：



4.5 グラフと隣接行列

4.5.1 その 1 (パスの本数)

1. 与えられたグラフ G :



2. グラフ G に対応する 集合 X と 関係 R :

集合 $X = \{a, b, c, d, e\}$.

関係 $R = \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, e), (d, e)\} (\subseteq X^2)$.

3. **グラフ** G **に対応する** **<u>隣接行列</u>** M **:**

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. R^n **と** M^n **の関係 :**

$$\begin{array}{ccc} M^2 & M^3 & M^4 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

5. 行列 M^n の (i, j) 成分の値は,

x_i **から** x_j **へ** n **ステップで到達可能な パス** $(path)$ **の本数を表す.**

6. 頂点 x **から 頂点** y **へ到達するパスとは,**

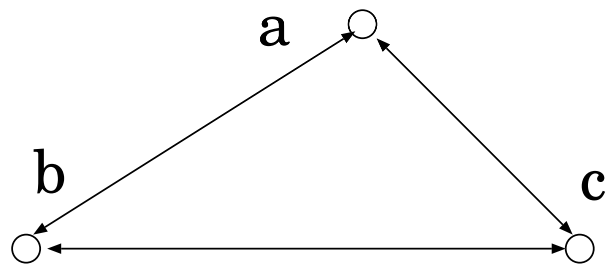
有限個の 有向辺 と 頂点 を経由することで,

x **から** y **へ到達できる経路のこと.**

4.5.2 その *2* (三角形の個数)

1. 集合 $X = \{a, b, c\}$, 関係 $R = \{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,b),(c,a)\}$.

グラフ G :



2. 隣接行列 M および M^2, M^3. (隣接行列 M は 対称行列) :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. *1* 個の 三角形 に対し, *6* 本のパスを数える: aR^3a, bR^3b, cR^3c

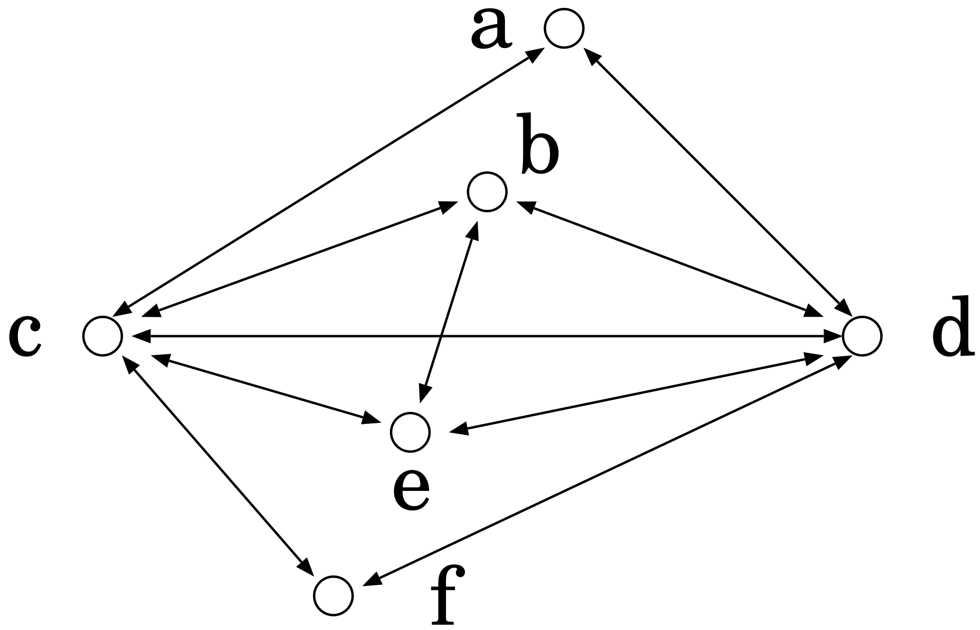
i) *1* 個の頂点で *2* 回 数える;

($\triangle abc$, $\triangle acb$), ($\triangle bca$, $\triangle bac$), ($\triangle cab$, $\triangle cba$)

ii) *1* 個の三角形に *3* 個の頂点がある ; (頂点 $a,\ b,\ c$)

4. グラフ G の中の 三角形の数 $= \dfrac{1}{6}(2+2+2) = 1$

1. グラフ G の中には, 幾つの三角形があるか *?*



2. 隣接行列 M および M^3 *:*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 & 9 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 11 & 11 & 7 & 4 \\ 9 & 11 & 10 & 11 & 11 & 9 \\ 9 & 11 & 11 & 10 & 11 & 9 \\ 4 & 7 & 11 & 11 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 9 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. グラフ G の中の三角形の数 $= \dfrac{1}{6}(2+6+10+10+6+2) = 6$

References

[1] 尾関和彦, (情報技術者のための)離散系数学入門, 共立出版, *2004.*

[2] 尾関和彦, 太田和夫, 國廣昇, "離散数学第一"及び "離散数学第一演習問題集" 電気通信大学情報通信工学科講義資料, *2004.*

[3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, *2003.*

[4] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, *2003.*

[5] *S. Lipschutz*著, 成嶋弘監訳, 離散数学 (コンピュータサイエンスの基礎数学), オーム社, *2004(H16).*

[6] 小倉久和, 情報の基礎離散数学 (– 演習を中心とした –), 近代科学社, *2006.*

[7] 町田元, 横森貴, 計算機数学, 森北出版, *1990.*