離散数学

— 2. 論理 —

2.1 論理命題

2.2 述語と限定記号

栗原正純 kuri@ice.uec.ac.jp

定理 *42.* P, Q **を集合** X **上で定義された** *1* **変数述語とする．そのとき，次のことが成り立つ．**

1. $(\forall x P(x)) \ \wedge \ (\forall x Q(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x(\ P(x) \wedge Q(x)\ )$

2. $(\forall x P(x)) \ \vee \ (\forall x Q(x)) \quad \Rightarrow \quad \forall x(\ P(x) \vee Q(x)\ )$

3. $(\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x(P(x) \vee Q(x))$

4. $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \quad \Rightarrow \quad (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$

(証明の方針)

i. **「**$A \Leftrightarrow B$ **が** T **であること」を示すには，**

「$(A \Rightarrow B) = T$ **かつ** $(A \Leftarrow B) = T$**」 を示せばよい．**

ii. **さらに，「**$(A \Rightarrow B) = T$**」 を示すには，**

「$(A = T) \Rightarrow (B = T)$**」 を示せばよい．**

iii. **同様に，「**$(A \Leftarrow B) = T$**」 を示すには，**

「$(A = T) \Leftarrow (B = T)$**」 を示せばよい．**

1. $\underline{(\forall x P(x)) \land (\forall x Q(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x (P(x) \land Q(x))}$

i. $\Rightarrow)$ <u>**左辺**$= ((\forall x P(x)) \land (\forall x Q(x))) = T$</u> **とすると,**

<u>$(\forall x P(x)) = T$ **かつ** $(\forall x Q(x)) = T$</u> **である.**

これは, <u>**任意の** x **に対し,** $P(x) = T$ **かつ** $Q(x) = T$</u> **を示す.**

したがって, <u>**任意の** x **に対し,** $(P(x) \land Q(x)) = T$</u> **である.**

すなわち, <u>**右辺**$= (\forall x (P(x) \land Q(x))) = T$</u>**.**

ii. $\Leftarrow)$ <u>**右辺** $= (\forall x (P(x) \land Q(x))) = T$</u> **とすると,**

これは, <u>**任意の** x **に対し,** $(P(x) \land Q(x)) = T$</u> **である.**

さらに, <u>**任意の** x **に対し,** $P(x) = T$ **かつ** $Q(x) = T$</u> **を示す.**

したがって, <u>$(\forall x P(x)) = T$ **かつ** $(\forall x Q(x))) = T$</u> **より,**

<u>**左辺** $= ((\forall x P(x)) \land (\forall x Q(x))) = T$</u> **である.**

以上の *i*, *ii* **より, 両辺が同値** $(\Leftrightarrow)$ **であることが示せた.** ∎

2. $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \ \Rightarrow\ \forall x (P(x) \vee Q(x))$

$\Rightarrow$) **左辺** $= ((\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))) = T$ **であるとする.**

すると, $(\forall x P(x)) = T$ **または** $(\forall x Q(x))) = T$ **である.**

i) $(\forall x P(x)) = T$ **ならば 任意の** x **に対し,** $P(x) = T$ **であるから** $Q(x)$ **の真偽に関わらず,** $(P(x) \vee Q(x)) = T$ **である.**

ii) $(\forall x Q(x)) = T$ **の場合も同様に, 任意の** x **に対し,** $Q(x) = T$ **であるから** $P(x)$ **の真偽に関わらず,** $(P(x) \vee Q(x)) = T$ **である.**

ゆえに, 任意の x **に対し,** $(P(x) \vee Q(x)) = T$**.**

すなわち, 右辺 $= (\forall x (P(x) \vee Q(x))) = T$**.**

以上より, $\Rightarrow$ **が示せた.** ∎

逆 ($\Leftarrow$) が成り立たない例: $\underline{(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \quad \Rightarrow \quad \forall x (P(x) \vee Q(x))}$

例 *44.* **整数 $\mathbf{Z}$ 上の *1* 変数述語 $P(x)$ と $Q(x)$ を次のように定める:**

$$P(x) = \begin{cases} T, & \frac{x}{2} \in \mathbf{Z} \text{ のとき}; \\ F, & \frac{x}{2} \notin \mathbf{Z} \text{ のとき} \end{cases} \quad \text{と} \quad Q(x) = \begin{cases} T, & \frac{x+1}{2} \in \mathbf{Z} \text{ のとき}; \\ F, & \frac{x+1}{2} \notin \mathbf{Z} \text{ のとき} \end{cases}$$

“ $P(x)$ は x が偶数ならば T,”　“ $Q(x)$ は x が奇数ならば T. ”

右辺: 任意の $x \in \mathbf{Z}$ に対し, その x は偶数か奇数かのどちらかである.

ゆえに, $\forall x (P(x) \vee Q(x)) = (T \vee F) = (F \vee T) = T$ **である.**

左辺: 任意の $x \in \mathbf{Z}$ に対し, その x は常に偶数とは限らないから,

$(\forall x P(x)) = F$. **同様に,** $(\forall x Q(x)) = F$.

ゆえに, $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) = (F \vee F) = F$ **である.**

以上より, (左辺 $\Leftarrow$ 右辺) $= (F \Leftarrow T) = F$ より, 逆 $(\Leftarrow)$ は成り立たない.

例 *45.* ***2*** **変数述語 “ x さんは y さんが好き ” を $L(x,y)$ で表す.**

このとき, 次の命題はどのような意味を表すか.

意味の違いが分かるように，自然な日本語で表現せよ.

1. $\forall x \exists y : L(x,y)$
2. $\exists y \forall x : L(x,y)$
3. $\exists x \forall y : L(x,y)$
4. $\forall y \exists x : L(x,y)$

1. $\forall x \; \exists y : L(x, y)$

(解答)

「すべての x に対し，$L(x, y)$ となる y が存在する.」

$\rightarrow$ **「すべての人 (x) に対し，その人 (x) は好きな人 (y) がいる.」**

$\rightarrow$ **「誰にも，好きな人がいる.」**

2. $\exists y \; \forall x : L(x, y)$

(解答)

「ある y が存在し，すべての x に対し，$L(x, y)$ となる.」

$\rightarrow$ **「ある人 (y) がいて，すべての人 (x) はその人 (y) が好き.」**

$\rightarrow$ **「誰からも，好かれる人がいる.」**

例 49. (解答) 命題 p, q を

$p =$ “ ここは、正直村です ”,

$q =$ “ あなたは正直村の住人です ”

とする。このとき, 以下の真理値表を満たす p, q を用いた複合命題 $P(p,q)$ で質問すればよい. (それには, 主論理和標準形の考えを用いればよい)

p	q	$P(p,q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$$P(p,q) = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

例 50. 天使は常に真実を述べ, 悪魔は常に嘘をつくとする.

A, B は天使か悪魔であることは, はっきりしている.

しかし, 彼らが天使か悪魔かは分からない.

そこで, A は言いました：「私が天使ならば B も天使です.」

さて, この二人の正体は, それぞれ天使か悪魔か.

(問題を解く方針)

$p =$「A は天使である」, $q =$「B は天使である」という 2 つの命題を考える.

このれらの命題に対し, 命題「私が天使ならば B も天使です」の真偽を場合分けすることで, p, q の可能な真理値を調べる.

答えは, A, B 共に天使である. ∎

$p =$「Aは天使である」, $q =$「Bは天使である」より,

「私が天使ならばBも天使です」 は 「$p \Rightarrow q$」 となる.

1. A を天使とする.

   これより, A の言うことは正しい, すなわち, $(p \Rightarrow q) = T$.

   $p = T$ と $(p \Rightarrow q) = T$ より, $q = T$.

   ゆえに, A, B は共に天使.

2. A を悪魔とする.

   これより, A の言うことは正しくない, すなわち, $(p \Rightarrow q) = F$.

   一方, 仮定より, $p = F$ であるが, このとき, $(p \Rightarrow q) = (F \Rightarrow q) = T$.

   これは, 矛盾. ゆえに, A は悪魔ではない.

3. 以上より, A, B と共に天使.

References

[1] 尾関和彦, (情報技術者のための)離散系数学入門, 共立出版, 2004.

[2] 尾関和彦, 太田和夫, 國廣昇, "離散数学第一"及び "離散数学第一演習問題集" 電気通信大学情報通信工学科講義資料, 2004.

[3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 2003.

[4] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 2003.

[5] S. Lipschutz著, 成嶋弘監訳, 離散数学 (コンピュータサイエンスの基礎数学), オーム社, 2004(H16).

[6] 小倉久和, 情報の基礎離散数学 (– 演習を中心とした –), 近代科学社, 2006.

[7] 町田元, 横森貴, 計算機数学, 森北出版, 1990.