

離散数学

— 2. 論理 —

2.1 論理命題

2.2 述語と限定記号

定義 20. (恒真命題) (こうしんめいだい)

常に真である命題を 恒真命題 (*Tautology* トートロジー) という.

また, 常に偽である命題を 矛盾命題 (*Contradiction*) という.

例 21. p, q, r を命題とするとき, 次の複合命題は恒真命題であることを示せ.

1. $(p \Rightarrow q) = (\neg q \Rightarrow \neg p).$

(等号が成り立てば命題は T , そうでなければ F)

2. $(p \Rightarrow q) = ((p \wedge \neg q) \Rightarrow F).$

3. $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q.$

4. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r).$

$$1. \quad (p \Rightarrow q) = (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

(等号が成り立てば命題は T , そうでなければ F)

(証明) 真理値表を用いて証明する.

		左辺				右辺		
$p \quad q$		$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	命題		
1.	$T \quad T$	T	F	F	T	T		
	$T \quad F$	F	T	F	F	T		
	$F \quad T$	T	F	T	T	T		
	$F \quad F$	T	T	T	T	T		

ゆえに, 命題 $(p \Rightarrow q) = (\neg q \Rightarrow \neg p)$ は恒真命題である. ■

2. $(p \Rightarrow q) = ((p \wedge \neg q) \Rightarrow F)$.

		左辺		右辺		命題
p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \Rightarrow F$	
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

ゆえに、命題 $(p \Rightarrow q) = ((p \wedge \neg q) \Rightarrow F)$ は恒真命題である。■

3. $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q.$

3.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	命題
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

ゆえに、命題 $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ は恒真命題である。■

4. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	命題
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

ゆえに、命題 $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ は恒真命題である. ■

例 22. 次の命題が恒真命題であるか、矛盾命題であるか、あるいは、それらのいずれでもないかを判定せよ.

1. $p \vee \neg(p \wedge q)$

2. $(p \vee q) \wedge \neg(p \Rightarrow q)$

3. $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$

4. $p \Rightarrow \neg(p \wedge q)$

5. $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

例 23. 次の命題が恒真命題であることを示せ.

1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

2. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

3. $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$

4. $p \vee (p \Rightarrow q)$

定義 24. (論法 と 妥当)

論法 とは, 前提 とよばれる 命題 $P_1, \dots, P_n$ から 結論 とよばれる 命題 Q が導かれるという主張であり,

$$P_1, \dots, P_n \vdash Q$$

と表される.

論法 “ $P_1, \dots, P_n \vdash Q$ ” が 妥当 であるとは,

$$“ (P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \Rightarrow Q ”$$

が 恒真命題 であることをいう.

したがって, $P_1 \wedge \dots \wedge P_n$ が T ならば, Q が T であることが導かれる.

1. $(p \Rightarrow q) = T$ において, $p = T$ ならば $q = T$ であるということ.
2. すなわち, $p = T$ であることを示せば, $q = T$ を示したことになる.

定理 25. 次の論法は妥当である.

1. 対偶による証明: $(\neg q \Rightarrow \neg p) \vdash (p \Rightarrow q)$
2. 背理法による証明: $((p \wedge \neg q) \Rightarrow F) \vdash (p \Rightarrow q)$
3. 三段論法による証明: $(p \Rightarrow q, q \Rightarrow r) \vdash (p \Rightarrow r)$

1. 対偶による証明: $(\neg q \Rightarrow \neg p) \vdash (p \Rightarrow q)$
2. 背理法による証明: $((p \wedge \neg q) \Rightarrow F) \vdash (p \Rightarrow q)$
3. 三段論法による証明: $(p \Rightarrow q, q \Rightarrow r) \vdash (p \Rightarrow r)$

(証明)

1. 論法が妥当であることの証明は、その定義より、 $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ が恒真命題、すなわち、常に T であることを示せばよい。

前記の例 21 より、 $(\neg q \Rightarrow \neg p)$ と $(p \Rightarrow q)$ の真理値は一致する。

(含意 $A \Rightarrow B$ は、 A と B の真理値が同じ場合、常に T である。)

ゆえに、 $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ は常に T であり、恒真命題である。■

2. 3.のいずれも上記と同様に、前記の例 21 より、恒真命題であることが示される。■

例 26. 次の主張は、妥当な論法になっているかどうか、答えよ。

1. 雨が降るなら学校に行かない。学校に行かなければ家にいる。よって、雨が降るなら家にいる。
2. おもしろい授業ならば、それは良い授業である。よって、おもしろくない授業ならば、それは良くない授業である。
3. 良くない授業ならば、それはおもしろくない授業である。よって、おもしろい授業ならば、それは良い授業である。
4. 鯨は哺乳類である。哺乳類は授乳をする。よって、鯨は授乳する。

1. 雨が降るなら学校に行かない. 学校に行かなければ家にいる.
よって, 雨が降るなら家にいる.

(証明)

1. (三段論法)

命題を $p =$ “ 雨が降る ”, $q =$ “ 学校に行かない ”, $r =$ “ 家にいる ” と表す.

問いの主張は, 三段論法のかたち

$$(p \Rightarrow q, q \Rightarrow r) \vdash (p \Rightarrow r)$$

と記述できる. ゆえに, その主張は妥当である. ■

例 27. (背理法)

最大の素数は存在しないことを示せ.

(証明) 背理法を用いて証明する.

命題 $p =$ “素数は 1 より大きい整数で 1 と自分自身以外の正の約数をもたない” (素数の定義)

命題 $q =$ “最大の素数は存在しない”

このとき, 証明する論法は, 背理法 $((p \wedge \neg q) \Rightarrow F) \vdash (p \Rightarrow q)$ となる.

したがって,

$$((p \wedge \neg q) \Rightarrow F) = T$$

を示せばよい. すなわち, $(p \wedge \neg q) = F$ を示せばよい.

ここで, $\neg q$ は, 「最大の素数 M が存在する」を意味する. ■

例 28. 次の論法は妥当か.

1. 私は旅行するなら勉強しない.
2. 私は勉強するか, または, 離散数学の試験に合格する.
3. 私は旅行した.

したがって, 私は離散数学の試験に合格した.

(証明) 命題 p, q, r を以下のようにする:

$p =$ “ 旅行する ”, $q =$ “ 勉強する ”,

$r =$ “ 離散数学の試験に合格する ”.

すると, 問題の論法は, $\frac{(p \Rightarrow \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge p}{r}$ となる.

すなわち, 論法が妥当であるかどうか判定するには,

$$((p \Rightarrow \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge p) \Rightarrow r$$

が恒真命題になるかどうかを判定すればよい. ■

2.2 述語と限定記号

論理を展開する手段として、命題以外に 述語 や 限定記号 とよばれるものを導入する。

定義 29. (述語)

$X_1, \dots, X_n$ を集合とする。そのとき、写像

$$P : X_1 \times \dots \times X_n \longrightarrow \{T, F\}$$

を (n 変数) 述語 という。 ■

$P(X_1, \dots, X_n)$ と書いたとき、 $P(X_1, \dots, X_n) = T$ を主張する。

すなわち、 P が $(X_1, \dots, X_n)$ に対して T であること。

例 30.

1. X を集合とし、 $A \subseteq X$ とする。 $x \in X$ に対し、

$$P(x) := \begin{cases} T, & x \in A \text{ のとき;} \\ F, & x \notin A \text{ (} x \in A^c \text{) のとき} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc} P & : & X \longrightarrow \{T, F\} \\ & x & \longmapsto v \end{array} \right)$$

と定義される P は、1 変数述語 である。

この述語を単に、 $x \in A$ と表すことができる。

2. X を集合とする $x, y \in X$ に対し、

$$P(x, y) := \begin{cases} T, & x = y \text{ のとき;} \\ F, & x \neq y \text{ のとき} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc} P & : & X \times X \longrightarrow \{T, F\} \\ & (x, y) & \longmapsto v \end{array} \right)$$

と定義される P は、2 変数述語 である。

この述語を単に、 $x = y$ と表すことができる。

定義 31. (全称記号と存在記号)

1. P を集合 X 上で定義された 述語 とする。そのとき、命題 $\forall x P(x)$ を

$$\forall x P(x) := \begin{cases} T, & X \text{ のすべての } x \text{ に対し、} P(x) = T \text{ のとき;} \\ F, & X \text{ のある } x \text{ に対し、} P(x) = F \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義とする。

“ $\forall x$ ” を x に関する 全称記号 とよぶ。(for all, for any)

“ $\forall x P(x)$ ” は、“ すべての x に対し、 $P(x)$ は真である ” という。

2. P を集合 X 上で定義された述語とする。そのとき、命題 $\exists x P(x)$ を

$$\exists x P(x) := \begin{cases} T, & X \text{ のある } x \text{ に対し、} P(x) = T \text{ のとき;} \\ F, & X \text{ のすべての } x \text{ に対し、} P(x) = F \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義とする。

“ $\exists x$ ” を x に関する 存在記号 とよぶ。(exist)

“ $\exists x P(x)$ ” は、“ $P(x)$ が真であるような x が存在する ” という。

3. 全称記号 と 存在記号 を併せて 限定記号 といい、論理記号の一つ。

4. 述語 $P(x)$ の定義域 X を明示するために、

$\forall x P(x)$ を $\forall x \in X : P(x)$,

$\exists x P(x)$ を $\exists x \in X : P(x)$

と表すことがある。

例 32. (全称記号と存在記号)

実数 $\mathbf{R}$ 上の関数を $f(x) = x^2 + 3x$ とし, 以下の述語 $P(x)$ を考える.

$$P(x) := \begin{cases} T, & f(x) < 0 \text{ のとき;} \\ F, & f(x) \geq 0 \text{ のとき.} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc} P & : & \mathbf{R} \longrightarrow \{T, F\} \\ & x & \longmapsto v \end{array} \right)$$

このとき, 述語 $P(x)$ を単に $f(x) < 0$ と書くことができる.

そして, 以下のことが言える:

1. $(\exists x \in \mathbf{R} : f(x) < 0) = T$
2. $(\forall x \in \mathbf{R} : f(x) < 0) = F$

何故なら,

1. $x = -2$ のとき, $f(-2) = -2$ より,
 $f(x) < 0$ を満たす実数 $x = -2$ が存在するから.
2. $x = 1$ のとき, $f(1) = 4 > 0$ より,
すべての実数 x に対して, $f(x) < 0$ が成立しないから. ■

定理 33. 任意の1変数述語に対し、以下の命題が成り立つ.

1. $\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg P(x))$

2. $\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg P(x))$

2. $\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg P(x))$

(証明) (同値を示すには、左辺と右辺の真理値が一致することを示せばよい)

i) $(\exists x P(x)) = T$ の場合, $\neg(\exists x P(x)) = F$ である.

$(\exists x P(x)) = T$ は、 $P(x) = T$ となるある x が存在するという事.

すなわち、 $\neg P(x) = F$ となるある x が存在するという事である.

したがって、すべての x に対し、 $\neg P(x) = T$ とはならないことから、
 $(\forall x(\neg P(x))) = F$ である.

ii) 次に、 $(\exists x P(x)) = F$ の場合, $\neg(\exists x P(x)) = T$ である.

$(\exists x P(x)) = F$ は、 $P(x) = T$ となる x が存在しないという事.

すなわち、 $\neg P(x) = F$ となるある x が存在しないという事である.

したがって、すべての x に対し、 $\neg P(x) = T$ となることから、
 $(\forall x(\neg P(x))) = T$ である.

以上の i, ii) より、 $\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg P(x))$ が成り立つ. ■

定義 34.

1. i. $P : X_1 \times X_2 \longrightarrow \{T, F\}$ を 2 変数述語とする.

ii. Q_1, Q_2 を $\forall$ または $\exists$ の限定記号とする.

iii. このとき, 命題 $Q_1x_1Q_2x_2P(x_1, x_2)$ を以下のように定義する.

$$Q_1x_1 Q_2x_2 P(x_1, x_2) := Q_1x_1 (Q_2x_2 P(x_1, x_2))$$

$$\text{iv. } \forall x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2) = \forall x_1 (\exists x_2 P(x_1, x_2))$$

$$\exists x_1 \forall x_2 P(x_1, x_2) = \exists x_1 (\forall x_2 P(x_1, x_2))$$

2. $(Q_2x_2P(x_1, x_2))$ は, x_1 のみを変数とする 1 変数述語である.

この述語に, Q_1x_1 を付け加えたものが $Q_1x_1Q_2x_2P(x_1, x_2)$.

3. 一般に, $Q_1x_1 \cdots Q_nx_nP(x_1, \dots, x_n)$ を定義可能.

(ここで, $P : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow \{T, F\}$ は n 変数述語)

注意 35.

1. “ $\forall x \exists y P(x, y)$ ” とは,
“任意の x に対し, (x ごとに定まる)ある y が存在し,
 $P(x, y) = T$ となる”

たとえば, $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : (x = x + y)$

2. “ $\exists x \forall y P(x, y)$ ” とは,
“ある x が存在し, (その x を固定したとき,)任意の y に対し,
 $P(x, y) = T$ となる”

たとえば, $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R} : (y = x + y)$

3. 1 変数の場合と同様に, 定義域を明示すると,
命題 $Q_1x_1Q_2x_2P(x_1, x_2)$ を以下のように書く:

$$Q_1x_1 \in X_1, Q_2x_2 \in X_2 : P(x_1, x_2)$$

4. また, $X_1 = X_2 = X$ のとき,

$$\frac{\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X : P(x_1, x_2)}{\quad} \text{を } \frac{\forall x_1, x_2 \in X : P(x_1, x_2)}{\quad} \text{と略記.}$$

$$\frac{\exists x_1 \in X, \exists x_2 \in X : P(x_1, x_2)}{\quad} \text{を } \frac{\exists x_1, x_2 \in X : P(x_1, x_2)}{\quad} \text{と略記.}$$

例 37. 命題の真偽を判定せよ.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R} : x = y$

2. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : x = y$

3. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R} : x = y$

4. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : x = y$

(解答) x, y は共に実数である.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R} : x = y$

任意の x と y に対し, $x = y$ となることはないから, F .

2. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : x = y$

任意の x に対し, $x = y$ を満たす y を選ぶことが可能であるから,
 $x = y$ を満たす y は存在し, T .

3. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R} : x = y$

ある x が存在し, 任意の y が $x = y$ となることはないから, F .

4. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : x = y$

ある x が存在し, $x = y$ を満たす y を選ぶことが可能であるから,
 $x = y$ を満たす y は存在し, T .

例 38. 命題の真偽を判定せよ.

1. $\forall x \in \mathbf{N}, \exists y \in \mathbf{N} : y = x^2$

2. $\forall y \in \mathbf{N}, \exists x \in \mathbf{N} : y = x^2$

3. $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{N} : y = x^2$

4. $\forall y \in \mathbf{N}, \exists x \in \mathbf{R} : y = x^2$

5. $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R} : y = x^2$

(解) 1.*T*, 2.*F*, 3.*F*, 4.*T*, 5.*F*.

定理 39. P を 2変数の述語とする.

$$\tilde{Q}_i := \begin{cases} \exists, & Q_i = \forall \text{ のとき;} \\ \forall, & Q_i = \exists \text{ のとき} \end{cases}$$

とするとき, 以下が成り立つ.

$$\neg(Q_1x_1Q_2x_2P(x_1, x_2)) = \tilde{Q}_1x_1\tilde{Q}_2x_2(\neg P(x_1, x_2))$$

系 40. P を n 変数の述語とするとき, 以下が成り立つ.

$$\neg(Q_1x_1 \cdots Q_nx_nP(x_1, \dots, x_n)) = \tilde{Q}_1x_1 \cdots \tilde{Q}_nx_n(\neg P(x_1, \dots, x_n))$$

例 41. 次の 2つの命題は, 同じ真理値をもつ (ことを確かめよ).

1. $\neg(\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : x = y)$
2. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R} : x \neq y$

定理 42. P, Q を集合 X 上で定義された 1 変数述語とする.
そのとき, 次のことが成り立つ.

$$1. (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$$

$$2. (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$$

$$3. (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x)) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$$

$$4. \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$$

(証明の方針)

$A \Leftrightarrow B$ が T であることを示すには,

$(A \Rightarrow B) = T$ かつ $(A \Leftarrow B) = T$ を示せばよい.

$$1. \quad \underline{(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))}$$

i. $\Rightarrow$ $((\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))) = T$ とすると,
 $(\forall x P(x)) = T$ **かつ** $(\forall x Q(x)) = T$ である.

これは, 任意の x に対し, $P(x) = T$ **かつ** $Q(x) = T$ を示す.

したがって, 任意の x に対し, $(P(x) \wedge Q(x)) = T$ である.

すなわち, $(\forall x (P(x) \wedge Q(x))) = T$.

ii. $\Leftarrow$ $(\forall x (P(x) \wedge Q(x))) = T$ とすると,

これは, 任意の x に対し, $(P(x) \wedge Q(x)) = T$ である.

さらに, 任意の x に対し, $P(x) = T$ **かつ** $Q(x) = T$ を示す.

したがって, $(\forall x P(x)) = T$ **かつ** $(\forall x Q(x)) = T$ より,

$((\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))) = T$ である.

以上の i, ii より, 両辺が同値 $\Leftrightarrow$ であることが示せた. ■

2. $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$

$\Rightarrow$) $((\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))) = T$ であるとする.

すると, $(\forall x P(x)) = T$ または $(\forall x Q(x)) = T$ である.

i) $(\forall x P(x)) = T$ ならば 任意の x に対し, $P(x) = T$ であるから $Q(x)$ の真偽に関わらず, $(P(x) \vee Q(x)) = T$ である.

ii) $(\forall x Q(x)) = T$ の場合も同様に, 任意の x に対し, $Q(x) = T$ であるから $P(x)$ の真偽に関わらず, $(P(x) \vee Q(x)) = T$ である.

ゆえに, 任意の x に対し, $(P(x) \vee Q(x)) = T$.

すなわち, $(\forall x (P(x) \vee Q(x))) = T$.

以上より, $\Rightarrow$ が示せた. ■

逆 ($\Leftarrow$) が成り立たない例: $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$

例 44. 整数 $\mathbb{Z}$ 上の 1 変数述語 $P(x)$ と $Q(x)$ を次のように定める:

$$P(x) = \begin{cases} T, & \frac{x}{2} \in \mathbb{Z} \text{ のとき;} \\ F, & \frac{x}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ のとき} \end{cases} \quad \text{と} \quad Q(x) = \begin{cases} T, & \frac{x+1}{2} \in \mathbb{Z} \text{ のとき;} \\ F, & \frac{x+1}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ のとき} \end{cases}$$

“ $P(x)$ は x が偶数ならば T , ” “ $Q(x)$ は x が奇数ならば T . ”

右辺: 任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対し, その x は偶数か奇数かのどちらかである.

ゆえに, $\forall x (P(x) \vee Q(x)) = (T \vee F) = (F \vee T) = T$ である.

左辺: 任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対し, その x は常に偶数とは限らないから,

$(\forall x P(x)) = F$. 同様に, $(\forall x Q(x)) = F$.

ゆえに, $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) = (F \vee F) = F$ である.

以上より, (左辺 $\Leftarrow$ 右辺) = $(F \Leftarrow T) = F$ より, 逆 ($\Leftarrow$) は成り立たない.



例 45. 述語 “ x さんは y さんが好き” を $L(x, y)$ で表す.

このとき, 次の命題はどのような意味を表すか.

意味の違いが分かるように, 自然な日本語で表現せよ.

1. $\forall x \exists y : L(x, y)$

2. $\exists y \forall x : L(x, y)$

3. $\exists x \forall y : L(x, y)$

4. $\forall y \exists x : L(x, y)$

1. $\forall x \exists y : L(x, y)$

(解答)

「すべての x に対し, $L(x, y)$ となる y が存在する。」

→ 「すべての人 (x) に対し, その人 (x) は好きな人 (y) がいる。」

→ 「誰にも, 好きな人がいる。」

2. $\exists y \forall x : L(x, y)$

(解答)

「ある y が存在し, すべての x に対し, $L(x, y)$ となる。」

→ 「ある人 (y) がいて, すべての人 (x) はその人 (y) が好き。」

→ 「誰からも, 好かれる人がいる。」

例 50. 天使は常に真実を述べ、悪魔は常に嘘をつくとする。

A, B は天使か悪魔であることは、はっきりしている。

しかし、彼らが天使か悪魔かは分からない。

そこで、 A は言いました：「私が天使ならば B も天使です。」

さて、この二人の正体は、それぞれ天使か悪魔か。

(問題を解く方針)

$p = 「Aは天使である」$, $q = 「Bは天使である」$ という2つの命題を考える。

これらの命題に対し、命題「私が天使ならば B も天使です」の真偽を場合分けすることで、 p, q の可能な真理値を調べる。

答えは、 A, B 共に天使である。 ■

$p =$ 「 A は天使である」, $q =$ 「 B は天使である」 より,

「私が天使ならば B も天使です」 は 「 $p \Rightarrow q$ 」 となる.

1. A を天使とする.

これより, A の言うことは正しい, すなわち, $(p \Rightarrow q) = T$.

$p = T$ と $(p \Rightarrow q) = T$ より, $q = T$.

ゆえに, A, B は共に天使.

2. A を悪魔とする.

これより, A の言うことは正しくない, すなわち, $(p \Rightarrow q) = F$.

一方, 仮定より, $p = F$ であるが, このとき, $(p \Rightarrow q) = (F \Rightarrow q) = T$.

これは, 矛盾. ゆえに, A は悪魔ではない.

3. 以上より, A, B と共に天使.

References

- [1] 尾関和彦, (情報技術者のための)離散系数学入門, 共立出版, 2004.
- [2] 尾関和彦, 太田和夫, 國廣昇, ‘離散数学第一’及び‘離散数学第一演習問題集’ 電気通信大学情報通信工学科講義資料, 2004.
- [3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 2003.
- [4] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 2003.
- [5] *S. Lipschutz* 著, 成嶋弘監訳, 離散数学 (コンピュータサイエンスの基礎数学), オーム社, 2004(H16).
- [6] 小倉久和, 情報の基礎離散数学 (— 演習を中心とした —), 近代科学社, 2006.
- [7] 町田元, 横森貴, 計算機数学, 森北出版, 1990.