離散数学

— 2. 論理 —

2.1 論理命題

2.2 述語と限定記号

次の文章の内容は「正しい」ですか、それとも、「正しくない」ですか。

1. $1 + 2 = 5$.

正しい ・ 正しくない

2. 三角形の内角の和は180度である.

正しい ・ 正しくない

3. 各桁の数字の和が3で割り切れる数は、
3で割り切れる.

正しい ・ 正しくない

4. 犬と猿は仲がよくない.

正しい ・ 正しくない

5. 風が吹けば桶屋が儲かる.

正しい ・ 正しくない

2.1 論理命題

1. 論理命題とは、“かつ”，“または”，“ならば”などの自然言語で表される 論理 を，記号 を用いて 形式化 したものの。
2. 命題とは，“真(しん)”か“偽(ぎ)”かが明確に定まっている 陳述 のこと。
ここで，真とは，“正しい”こと，偽とは，“正しくない”こと
3. 陳述とは，これはこうである というような “主張” である。
4. 命題が 真 であるとき，それが 成り立つ，あるいは，成立する ともいう。

例 1. 次の陳述は 命題か, 命題でないか.

1. $1 + 2 = 5$. (偽であるから, 命題である)

2. 三角形の内角の和は 180 度である. (真であるから, 命題である)

3. 各桁の数字の和が 3 で割り切れる数は,
 3 で割り切れる. (真であるから, 命題である)

4. 犬と猿は仲がよくない. (真偽が明確でないから, 命題ではない)

5. 風が吹けば桶屋が儲かる. (真偽が明確でないから, 命題ではない)

定義 2. (論理記号)

1. p, q を命題
2. 真 (*True*) を T , 偽 (*False*) を F で表す
3. T, F を 真理値 という
4. 命題結合記号とよばれる 論理記号 $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow, \neg$ による真理値を次の 真理値表 によって定義する.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p$
T	T	T	T	T	T	T	F
T	F	T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	F	F	T	T	T	T

1. $p \vee q$: p と q の 論理和 という。
“ p または q ” という意味を表す。

2. $p \wedge q$: p と q の 論理積 という。
“ p かつ q ” という意味を表す。

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p$
T	T	T	T	T	T	T	F
T	F	T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	F	F	T	T	T	T

3. $p \Rightarrow q$: “ p は q を 含意 (がんい) する ” という.

“ p ならば q ” という意味を表す.

注 1) $(p \Rightarrow q) = F$ となるのは, $(p = T) \wedge (q = F)$ のときのみ.

注 2) $p = F$ ならば常に $(p \Rightarrow q) = T$ となる.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p$
T	T	T	T	T	T	T	F
T	F	T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	F	F	T	T	T	T

注 3) $p \Leftarrow q$ は, $p \Rightarrow q$ とは異なることに注意する.

4. “ $(p \Rightarrow q) = T$ ” のとき, “ p は q の 十分条件 である” といい, “ q は p の 必要条件 である” という.
5. “ $p \Leftrightarrow q$ ” は “ $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Leftarrow q)$ ” と論理的に等しい.
6. “ $p \Leftrightarrow q$ ” が真のとき, すなわち, “ $(p \Leftrightarrow q) = T$ ” のとき, p と q は互いに他の 必要十分条件 であるという. また, p と q は 同値 であるという.
7. i) p と q が 同値 であることと,
 ii) p と q の 真理値が一致する ことは同じこと.
 したがって, “ $p \Leftrightarrow q$ ” を “ $p = q$ ” と書く.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p$
T	T	T	T	T	T	T	F
T	F	T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	F	F	T	T	T	T

8. $\neg p$: p の否定という.

p	$\neg p$
T	F
F	T

複合命題

1. 複合命題とは、基本命題を論理記号で結合することにより構成される命題である。
 - i. 基本命題 : p, q
 - ii. 複合命題 : $p \vee q, p \wedge q, p \Rightarrow q$
2. 何と何が結合されるかを明示するために、カッコ “ (“, “) “ を用いる。
3. ただし、否定 $\neg$ は最も結合が強いとし、カッコを省略することがある。
 - i. p, q を基本命題とする。
 - ii. 複合命題 $\neg p \vee q$ は $\neg(p \vee q)$ ではなく、 $(\neg p) \vee q$ である。

定理 3. 任意の命題 p に対し、以下の等式が成り立つ。

1. $p \vee T = T, p \wedge T = p.$

2. $p \vee F = p, p \wedge F = F.$

3. $p \vee \neg p = T, p \wedge \neg p = F.$

4. $\neg(\neg p) = p.$

(等式を証明するための方針)

i. “ $p = q$ ” であるとは、 p と q が 同値 であること。

ii. p と q は 同値 であるということは、“ $(p \Rightarrow q) = T \wedge (p \Leftarrow q) = T$ ”
すなわち、“ $(p \Leftrightarrow q) = T$ ”

iii. p と q が 同値 であることは、 p と q の 真理値が一致する ことと同じ。

真理値が一致するを示そう。

1. $p \vee T = T, p \wedge T = p.$

2. $p \vee F = p, p \wedge F = F.$

3. $p \vee \neg p = T, p \wedge \neg p = F.$

4. $\neg(\neg p) = p.$

1.

p	T	$p \vee T$	$p \wedge T$
T	T	T	T
F	T	T	F

2.

p	F	$p \vee F$	$p \wedge F$
T	F	T	F
F	F	F	F

3.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

4.

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
T	F	T
F	T	F

定理 4. 任意の命題 p, q, r に対し, 以下のことが成り立つ.

1. $p \vee q = q \vee p,$

$p \wedge q = q \wedge p.$ (交換律)

2. $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r),$

$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r).$ (結合律)

3. $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r),$

$(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r).$ (分配律)

4. $p \vee p = p,$

$p \wedge p = p.$ (ベキ等律)

5. $(p \vee q) \wedge p = p,$

$(p \wedge q) \vee p = p.$ (吸収律)

(等式 “=” (同値であること) を証明するための方針)

- i. 右辺と左辺の真理値が一致することを示せばよい。(真理値表の作成)
- ii. “(左辺 $\Rightarrow$ 右辺) = T かつ (左辺 $\Leftarrow$ 右辺) = T ” を示せばよい。

このとき、(左辺 $\Rightarrow$ 右辺) = T を示すには、

「 “左辺 = T のとき、右辺 = T となる ” 」ことを示せば十分であることに注意する。

言い替えると、「 “左辺 = T のとき、右辺 = F とならない ” 」ことを示す。

なぜなら、含意 $\Rightarrow$ の定義より、

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$$(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \quad (\text{分配律})$$

(証明) 真理値表で示す。

p	q	r	$p \vee q$	左辺	$p \wedge r$	$q \wedge r$	右辺
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

上記真理値表より、左辺と右辺の真理値は一致する。

ゆえに、左辺 = 右辺 が成り立つ。 ■

$$\underline{(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \text{ (分配律)}}$$

(別証明) “(左辺 $\Rightarrow$ 右辺) = T かつ (左辺 $\Leftarrow$ 右辺) = T ” を示す。

i. $\Rightarrow$) $((p \vee q) \wedge r) = T$ であるとする。

すると, $(p \vee q) = T$ かつ $r = T$ である。

すなわち, $p = T$ または $q = T$ であり, かつ $r = T$ である。

したがって, 1) $p = T$ かつ $r = T$ ならば $(p \wedge r) = T$. または,

2) $q = T$ かつ $r = T$ ならば $(q \wedge r) = T$.

ゆえに, $((p \wedge r) \vee (q \wedge r)) = T$. (左辺 $\Rightarrow$ 右辺) = T が言えた。

ii. $\Leftarrow$) 次に, $((p \wedge r) \vee (q \wedge r)) = T$ であるとする。

すると, $(p \wedge r) = T$ または $(q \wedge r) = T$ である。

これより, “ $p = T$ かつ $r = T$ ” または “ $q = T$ かつ $r = T$ ”.

すなわち, $p = T$ または $q = T$ であり, かつ $r = T$ である。

ゆえに, $((p \vee q) \wedge r) = T$. (左辺 $\Leftarrow$ 右辺) = T が言えた。

以上の i, ii より, 左辺 = 右辺 が成り立つことが言えた。■

定理 5. (ド・モルガンの法則)

任意の命題 p, q に対し, 以下のことが成り立つ.

1. $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q.$

2. $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q.$

$$1. \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q.$$

$$2. \neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q.$$

(証明) 以下の真理値表にて示す.

p	q	$p \vee q$	1.左辺 $\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	1.右辺 $\neg p \wedge \neg q$	$p \wedge q$	2.左辺 $\neg(p \wedge q)$	2.右辺 $\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	F	F	F	T	F	F
T	F	T	F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	F	T	T

上記の真理値表より, 1, 2 のいずれの式も, その左辺と右辺の真理値は一致する. ゆえに, 等号が成り立つ.

$$\underline{1. \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q}$$

(別証明) $\Rightarrow$ かつ $\Leftarrow$ を示す。

(例えば $\Rightarrow$ を示すには, 「 $\neg(p \vee q) = T$ とき $\neg p \wedge \neg q = T$ 」を示せばよい)

i. $\Rightarrow$) $\neg(p \vee q) = T$ ならば $p \vee q = F$.

$p \vee q = F$ ならば $p = F$ かつ $q = F$. すなわち,

$\neg p = T$ かつ $\neg q = T$ であり, $\neg p \wedge \neg q = T$.

ゆえに, $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$ が成り立つ. $(\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q) = T$

ii. $\Leftarrow$) $\neg p \wedge \neg q = T$ ならば $\neg p = T$ かつ $\neg q = T$ であり,
 $p = F$ かつ $q = F$.

したがって, $p \vee q = F$ より, $\neg(p \vee q) = T$ となる.

ゆえに, $\neg(p \vee q) \Leftarrow \neg p \wedge \neg q$ が成り立つ. $(\neg(p \vee q) \Leftarrow \neg p \wedge \neg q) = T$

以上 1, 2 より, $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ は成り立つ. ■ (プリント訂正: $\Rightarrow$ を $= \wedge$)

例 6. (論理記号の変換)

1. $p \vee q$ を $p, q, \neg, \wedge$ のみで表せ.
2. $p \vee q$ を $p, q, \neg, \Rightarrow$ のみで表せ.
3. $p \wedge q$ を $p, q, \neg, \vee$ のみで表せ.
4. $p \wedge q$ を $p, q, \neg, \Rightarrow$ のみで表せ.
5. $p \Rightarrow q$ を $p, q, \neg, \vee$ のみで表せ.
6. $p \Rightarrow q$ を $p, q, \neg, \wedge$ のみで表せ.

(解答)

1. $p \vee q$ を $p, q, \neg, \wedge$

ド・モルガンの法則より, $p \vee q = \neg(\neg p \wedge \neg q)$.

2. $p \vee q$ を $p, q, \neg, \Rightarrow$

$(p \Rightarrow q) = (\neg p \vee q)$ より, $p \vee q = \neg(\neg p) \vee q = (\neg p \Rightarrow q)$

3. $p \wedge q$ を $p, q, \neg, \vee$

ド・モルガンの法則より, $p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$.

4. $p \wedge q$ を $p, q, \neg, \Rightarrow$

ド・モルガンの法則と上記 2 に結果より, $(p \Rightarrow q) = (\neg p \vee q)$ より,
 $p \wedge q = \neg(\neg p \vee (\neg q)) = \neg(p \Rightarrow (\neg q))$.

5. $p \Rightarrow q$ を $p, q, \neg, \vee$

$(p \Rightarrow q) = (\neg p \vee q)$ より, そのもの.

6. $p \Rightarrow q$ を $p, q, \neg, \wedge$

ド・モルガンの法則と $(p \Rightarrow q) = (\neg p \vee q)$ より,

$$(p \Rightarrow q) = (\neg p \vee q) = \neg(\neg(\neg p) \wedge (\neg q)) = \neg(p \wedge (\neg q)).$$

集合と論理での記号の対応

集合	論理
$\cup$ (和集合)	$\vee$ (論理和)
$\cap$ (積集合)	$\wedge$ (論理積)
c (補集合)	$\neg$ (否定)
U (全体集合)	T (真)
ϕ (空集合)	F (偽)

例 7. 命題 $p \Rightarrow q$ が T であっても、その逆の命題 $q \Rightarrow p$ は必ずしも T でないことを、真理値表を用いて確かめよ。

例 8. 各命題の真理値表を示せ。

1. $p \Rightarrow p$

2. $(p \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg p)$

3. $(p \vee \neg q) \vee \neg p$

4. $p \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

5. $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

例 9. 各命題の真理値表を示せ.

1. $(p \Leftrightarrow \neg p) \Rightarrow (\neg p \wedge q)$

2. $(p \vee \neg q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \neg p)$

3. $[p \wedge (\neg q \Rightarrow p)] \wedge \neg[(p \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow (q \vee \neg p)]$

4. $[q \Leftrightarrow (r \Rightarrow \neg p)] \vee [(\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow r]$

例 10. 各命題を以下のように定義する.

そのとき, 次の命題を日本語に翻訳せよ.

$p =$ “ 氷あずきを食べる ” ,

$q =$ “ すいかを食べる ” ,

$r =$ “ 腹痛を起こす ” .

1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$

2. $r \Rightarrow (p \vee q)$

3. $p \wedge q \wedge \neg r$

4. $r \Rightarrow (p \wedge \neg q)$

(プリント訂正 $\vee$ を $\wedge$ $\wedge$ を $\vee$)

$p =$ “ 氷あずきを食べる ” ,

$q =$ “ すいかを食べる ” ,

$r =$ “ 腹痛を起こす ” .

1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$

氷あずきとすいかの両方を食べると, 腹痛を起こす.

2. $r \Rightarrow (p \vee q)$

腹痛を起したならば, 氷あずき または すいか を食べた.

3. $p \wedge q \wedge \neg r$

氷あずきとすいかの両方食べても腹痛を起さない.

4. $r \Rightarrow (p \wedge \neg q)$

腹痛を起したならば, 氷あずきを食べたが, すいかは食べていない.

例 11.

1. 命題 $p \Rightarrow q$ が F であるとき, $(\neg p \vee \neg q) \Rightarrow q$ の値は定まるか.
定まる場合, その値は何か.
2. 命題 $p \Rightarrow q$ が T であるとき, $\neg p \vee (p \Leftrightarrow q)$ の値は定まるか.
定まる場合, その値は何か.

1. 命題 $p \Rightarrow q$ が F であるとき, $(\neg p \vee \neg q) \Rightarrow q$ の値は定まるか.
定まる場合, その値は何か.

(解答)

$(p \Rightarrow q) = F$ であることより, $p = T$ かつ $q = F$. これより,

$$(\neg p \vee \neg q) = (F \vee T) = T.$$

したがって, 「 $(\neg p \vee \neg q) \Rightarrow q$ 」は「 $T \Rightarrow F$ 」と定まる.

ゆえに, 「 $(\neg p \vee \neg q) \Rightarrow q$ 」の値は定まり, その値は F となる. ■

2. 命題 $p \Rightarrow q$ が T であるとき, $\neg p \vee (p \Leftrightarrow q)$ の値は定まるか.

(解答) $(p \Rightarrow q) = T$ であることより, p と q の組合せは以下の1の通り:

1.

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

2.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

i) $p = T$ かつ $q = T$ のとき, 「 $\neg p \vee (p \Leftrightarrow q)$ 」は「 $F \vee (T \Leftrightarrow T)$ 」.

$(T \Leftrightarrow T) = T$ より, $(F \vee (T \Leftrightarrow T)) = T$.

ii) $p = F$ かつ $q = T$ のとき, 「 $\neg p \vee (p \Leftrightarrow q)$ 」は「 $T \vee (F \Leftrightarrow T)$ 」.

$(F \Leftrightarrow T) = F$ より, $(T \vee (F \Leftrightarrow T)) = T$.

iii) $p = F$ かつ $q = F$ のとき, 「 $\neg p \vee (p \Leftrightarrow q)$ 」は「 $T \vee (F \Leftrightarrow F)$ 」.

$(F \Leftrightarrow F) = T$ より, $(T \vee (F \Leftrightarrow F)) = T$.

以上の i, ii, iii より, 「 $\neg p \vee (p \Leftrightarrow q)$ 」は定まり, その値は T となる. ■

p_1, p_2, p_3 を命題とするとき,

$$(p_1 \vee p_2) \vee p_3, \quad p_1 \vee (p_2 \vee p_3), \quad p_2 \vee (p_1 \vee p_3)$$

などの真理値はすべて等しい。これらを

$$p_1 \vee p_2 \vee p_3$$

と表しても混乱は生じない。これも和集合の場合と同じである。

一般に, $p_1, \dots, p_n$ を命題とするとき,

$$p_1 \vee \dots \vee p_n, \quad p_1 \wedge \dots \wedge p_n$$

などの場合も同様である。

命題 $p_1, \dots, p_n$ に対し, 以下の $\bigvee_{i=1}^n p_i, \bigwedge_{i=1}^n p_i$ を定義する.

$$\bigvee_{i=1}^n p_i := \begin{cases} T, & \text{ある } i \in \{1, \dots, n\} \text{ に対し, } p_i = T \text{ のとき;} \\ F, & \text{すべての } i \in \{1, \dots, n\} \text{ に対し, } p_i = F \text{ のとき.} \end{cases}$$

$$\bigwedge_{i=1}^n p_i := \begin{cases} T, & \text{すべての } i \in \{1, \dots, n\} \text{ に対し, } p_i = T \text{ のとき;} \\ F, & \text{ある } i \in \{1, \dots, n\} \text{ に対し, } p_i = F \text{ のとき.} \end{cases}$$

このとき, 次の定理が成り立つことも和集合の場合と同様である.

定理 12. 任意の自然数 n と, n 個の任意の命題 $p_1, \dots, p_n$ に対し, 以下が成り立つ.

1. $\bigvee_{i=1}^n p_i = p_1 \vee \dots \vee p_n$.
2. $\bigwedge_{i=1}^n p_i := p_1 \wedge \dots \wedge p_n$.

論理関数 :

基本命題 $p_1, \dots, p_n$ から構成される複合命題 $P(p_1, \dots, p_n)$ は,
 $\{T, F\}$ に値を取る n 個の変数をもち, $\{T, F\}$ に値を取る写像

$$P: \{T, F\}^n \longrightarrow \{T, F\}$$

と考えられる.

この写像 P を n 変数 論理関数 とよび, $p_1, \dots, p_n$ を 論理変数 という.

たとえば, p, q, r を基本命題とする.

$$\text{論理関数 } P(p, q, r) = p \wedge q \vee \neg r$$

$$\text{写像 } P: \{T, F\}^3 \longrightarrow \{T, F\}$$

$$P: (p, q, r) \longmapsto v(= P(p, q, r) = p \wedge q \vee \neg r)$$

p を論理変数, t を $\{T, F\}$ の要素とするとき,

$$p^t := \begin{cases} p, & t = T \text{ のとき;} \\ \neg p, & t = F \text{ のとき} \end{cases}$$

具体的には,

t	p	p^t
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$p_1, \dots, p_n$ を n 個の論理変数とする。

n 重対の要素 $(t_1, \dots, t_n)$ を直積集合 $\{T, F\}^n$ の要素とするとき、

$$p_1^{t_1} \wedge \dots \wedge p_n^{t_n}$$

を $(t_1, \dots, t_n)$ に対する $p_1, \dots, p_n$ の 基本論理積 という。

補題 13.

$$p_1^{t_1} \wedge \dots \wedge p_n^{t_n} = T \quad \Leftrightarrow \quad (p_1 = t_1) \wedge \dots \wedge (p_n = t_n)$$

(証明) 具体的に、「 $p^t = T \Leftrightarrow (p = t)$ 」であることを確認する:

t	p	p^t
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

論理関数 $P(p_1, \dots, p_n)$ の 真理集合 $\tilde{P}$ を

$$\tilde{P} := \{(s_1, \dots, s_n) \mid (s_1, \dots, s_n) \in \{T, F\}^n, P(s_1, \dots, s_n) = T\}$$

と定義する。

($P(p_1, \dots, p_n) = T$ となる論理変数の組 $(s_1, \dots, s_n)$ の全体からなる集合)

定理 14. 任意の論理関数 $P(p_1, \dots, p_n)$ は次のように表される。ただし、 P の真理集合 $\tilde{P}$ が $\tilde{P} = \phi$ のときは、右辺の論理和は F と約束する。

$$P(p_1, \dots, p_n) = \bigvee_{(t_1, \dots, t_n) \in \tilde{P}} p_1^{t_1} \wedge \dots \wedge p_n^{t_n}.$$

右辺を論理関数 $P(p_1, \dots, p_n)$ の 主論理和標準形 という。■

定理は任意の論理関数は複合命題として表すことができることを主張している。

(例 16) 次の論理関数 $P(p, q, r)$ の 主論理和標準形 を示せ.

p	q	r	$P(p, q, r)$
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	T

$$P(p_1, \dots, p_n) = \bigvee_{(t_1, \dots, t_n) \in \tilde{P}} p_1^{t_1} \wedge \dots \wedge p_n^{t_n}$$

p	q	r	$P(p, q, r)$	
T	T	T	F	$(t_1, t_2, t_3) = (T, T, F)$
				$\Rightarrow p^{t_1} \wedge q^{t_2} \wedge r^{t_3} = p \wedge q \wedge \neg r$
T	T	F	T	
T	F	T	F	$(t_1, t_2, t_3) = (T, F, F)$
				$\Rightarrow p^{t_1} \wedge q^{t_2} \wedge r^{t_3} = p \wedge \neg q \wedge \neg r$
T	F	F	T	
F	T	T	F	$(t_1, t_2, t_3) = (F, F, T)$
				$\Rightarrow p^{t_1} \wedge q^{t_2} \wedge r^{t_3} = \neg p \wedge \neg q \wedge r$
F	T	F	F	
F	F	T	T	$(t_1, t_2, t_3) = (F, F, F)$
				$\Rightarrow p^{t_1} \wedge q^{t_2} \wedge r^{t_3} = \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$
F	F	F	T	

主論理和標準形：真理集合は

$$\tilde{P} = \{(T, T, F), (T, F, F), (F, F, T), (F, F, F)\}$$

となる。これより、主論理和標準形 は以下のようになる：

$$P(p, q, r) = (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

実際に，真理値表を書いて確認する：

$$P(p, q, r) = (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

P	p	q	r	$p \wedge q \wedge \neg r$	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	右辺
F	T	T	T	F	F	F	F	F
T	T	T	F	T	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	F	F	F
T	T	F	F	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F	F
T	F	F	T	F	F	T	F	T
T	F	F	F	F	F	F	T	T

主論理和標準形 に対し、これと 双対 な形の標準形として 主論理積標準形 が存在する。

$(t_1, \dots, t_n)$ に対する $p_1, \dots, p_n$ の 基本論理積 として、

$$p_1^{t_1} \wedge \dots \wedge p_n^{t_n}$$

を定義した。

それに対し、 $(t_1, \dots, t_n)$ に対する $p_1, \dots, p_n$ の 基本論理和 として、

$$p_1^{t_1} \vee \dots \vee p_n^{t_n}$$

を定義する。

このとき、前記の **補題 13** :

$$p_1^{t_1} \wedge \cdots \wedge p_n^{t_n} = T \quad \Leftrightarrow \quad (p_1 = t_1) \wedge \cdots \wedge (p_n = t_n)$$

に対し、以下の補題が成り立つ。

補題 15.

$$p_1^{\neg t_1} \vee \cdots \vee p_n^{\neg t_n} = F \quad \Leftrightarrow \quad (p_1 = t_1) \wedge \cdots \wedge (p_n = t_n)$$

(証明) 具体的に、「 $p^{\neg t} = F \Leftrightarrow (p = t)$ 」であることを確認する:

t	p	$p^{\neg t}$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

前記にて, 論理関数 $P(p_1, \dots, p_n)$ の 真理集合 $\tilde{P}$ を

$$\tilde{P} := \{(s_1, \dots, s_n) \mid (s_1, \dots, s_n) \in \{T, F\}^n, P(s_1, \dots, s_n) = T\}$$

と定義した.

それに対し, 論理関数 $P(p_1, \dots, p_n)$ の 真理集合 $\tilde{P}$ の 補集合 を $\bar{P}$ と表す:

$$\bar{P} := \{(s_1, \dots, s_n) \mid (s_1, \dots, s_n) \in \{T, F\}^n, P(s_1, \dots, s_n) = F\}$$

($P(p_1, \dots, p_n) = F$ となる論理変数の組 $(s_1, \dots, s_n)$ の全体からなる集合)

このとき、前記の **定理 14 (主論理和標準形)** :

$$P(p_1, \dots, p_n) = \bigvee_{(t_1, \dots, t_n) \in \tilde{P}} p_1^{t_1} \wedge \dots \wedge p_n^{t_n}$$

に対し、以下の定理が成り立つ。

定理 16. 任意の論理関数 $P(p_1, \dots, p_n)$ は次のように表される。ただし、 $\bar{P} = \phi$ のときは、右辺の論理積は T と約束する。

$$P(p_1, \dots, p_n) = \bigwedge_{(t_1, \dots, t_n) \in \bar{P}} p_1^{\neg t_1} \vee \dots \vee p_n^{\neg t_n}$$

右辺を論理関数 $P(p_1, \dots, p_n)$ の 主論理積標準形 という。

例 17. 次の論理関数 $P(p, q, r)$ の 主論理積標準形 を示せ.

p	q	r	$P(p, q, r)$
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	T

$$P(p_1, \dots, p_n) = \bigwedge_{(t_1, \dots, t_n) \in \bar{P}} p_1^{\neg t_1} \vee \dots \vee p_n^{\neg t_n}$$

p	q	r	$P(p, q, r)$	
T	T	T	F	$(t_1, t_2, t_3) = (T, T, T)$
T	T	F	T	$\Rightarrow p^{\neg t_1} \vee q^{\neg t_2} \vee r^{\neg t_3} = \neg p \vee \neg q \vee \neg r$
T	F	T	F	$(t_1, t_2, t_3) = (T, F, T)$
T	F	F	T	$\Rightarrow p^{\neg t_1} \vee q^{\neg t_2} \vee r^{\neg t_3} = \neg p \vee q \vee \neg r$
F	T	T	F	$(t_1, t_2, t_3) = (F, T, T)$
F	T	F	F	$\Rightarrow p^{\neg t_1} \vee q^{\neg t_2} \vee r^{\neg t_3} = p \vee \neg q \vee \neg r$
F	F	T	T	$(t_1, t_2, t_3) = (F, T, F)$
F	F	F	T	$\Rightarrow p^{\neg t_1} \vee q^{\neg t_2} \vee r^{\neg t_3} = p \vee \neg q \vee r$

主論理積標準形：真理集合 P の補集合は

$$\bar{P} = \{(T, T, T), (T, F, T), (F, T, T), (F, T, F)\}$$

となる。これより、主論理積標準形 は以下のようなになる：

$$P(p, q, r) = (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r).$$

例 18. (双対性)

ド・モルガンの法則により, 主論理和標準形 と 主論理積標準形 の 双対関係 が言える.

i) 主論理和標準形の構成法を用いて主論理積標準形を作ることができる.

逆に,

ii) 主論理積標準形の構成法を用いて主論理和標準形を作ることができる.

たとえば, i) 主論理和標準形の構成法を用いて主論理積標準形を得る手続きは以下の通り:

1. $P(p, q, r)$ の真理値を反転した $\neg P(p, q, r)$ を作る.
2. $\neg P(p, q, r)$ の 主論理和標準形 を構成する.
3. $\neg(\neg P(p, q, r))$ をド・モルガンの法則 を利用し, 整理し, 主論理積標準形 を得る.

1. $P(p, q, r)$ の真理値を反転した $\neg P(p, q, r)$ を作る:

p	q	r	$P(p, q, r)$	$\neg P(p, q, r)$
T	T	T	F	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	F
F	F	F	T	F

2. $\neg P(p, q, r)$ の 主論理和標準形 を構成法する :

$$\bar{P} = \{(T, T, T), (T, F, T), (F, T, T), (F, T, F)\} \quad (\neg P(p, q, r) \text{ の真理集合})$$

$$\neg P(p, q, r) = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

3. ド・モルガンの法則 を利用し, 整理し, 主論理積標準形 を得る:

$$P(p, q, r) = \neg(\neg P(p, q, r)) \text{ より,}$$

$$\neg(\neg P(p, q, r)) = (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$$

これは, 前記の例で得た解と一致する . ■

例 19.

1. 3つの命題 p, q, r のうちの 2 つが T であるとき、かつ、そのときに限り T であるような複合命題を構成せよ.
2. 3つの命題 p, q, r のうち、どれもが T でないか、どれか 1 つが T であるとき、かつ、そのときに限り T であるような複合命題を構成せよ.

1. 3つの命題 p, q, r のうちの 2 つが T であるとき, かつ, そのときに限り T であるような複合命題を構成せよ.

2. 3つの命題 p, q, r のうち, どれもが T でないか, どれか 1 つが T であるとき, かつ, そのときに限り T であるような複合命題を構成せよ.

1.

p	q	r	$P(p, q, r)$
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

2.

p	q	r	$P(p, q, r)$
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

References

- [1] 尾関和彦, (情報技術者のための)離散系数学入門, 共立出版, 2004.
- [2] 尾関和彦, 太田和夫, 國廣昇, “離散数学第一”及び“離散数学第一演習問題集” 電気通信大学情報通信工学科講義資料, 2004.
- [3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 2003.
- [4] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 2003.
- [5] *S. Lipschutz* 著, 成嶋弘監訳, 離散数学 (コンピュータサイエンスの基礎数学), オーム社, 2004(H16).
- [6] 小倉久和, 情報の基礎離散数学 (— 演習を中心とした —), 近代科学社, 2006.
- [7] 町田元, 横森貴, 計算機数学, 森北出版, 1990.