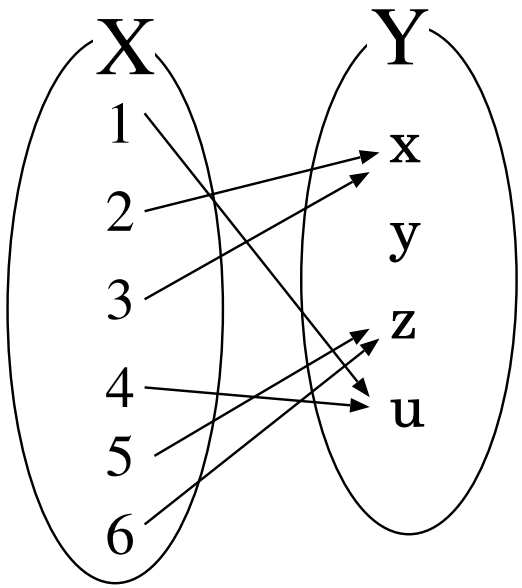
# 離散数学

## — 1. 集合と写像 —
## — 1.2 写像 —

2007 10 17

**栗原正純** kuri@ice.uec.ac.jp

**例 46.** $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{x, y, z, u\}$ **とする。**
**写像** $f : X \longrightarrow Y$ **を図のように定義する。**

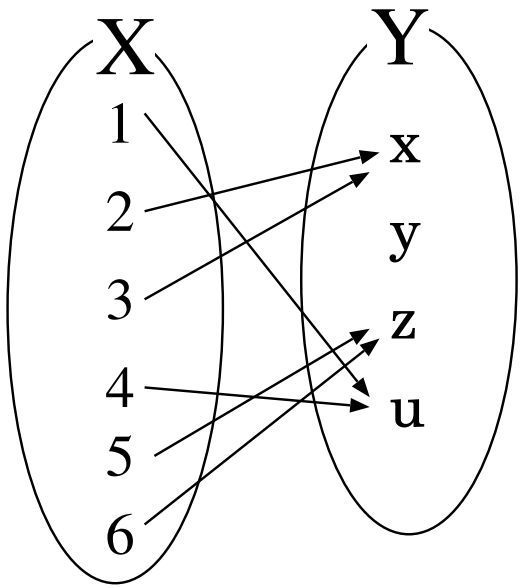



1. $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 6\} \subseteq X$ **とするとき、以下を確かめよ。**
   ***i)*** $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, ***ii)*** $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$,
   ***iii)*** $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$.

2. $A = \{x, y\}$, $B = \{y, u\} \subseteq Y$ **とするとき、以下を確かめよ。**
   ***i)*** $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, ***ii)*** $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
   ***iii)*** $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

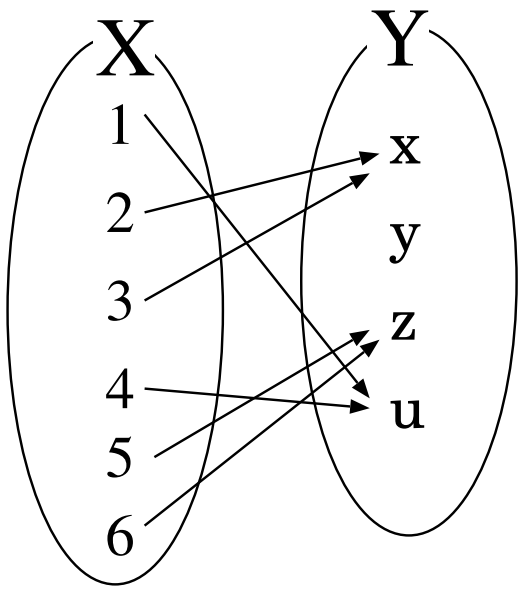
***i)*** $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ***ii)*** $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

$A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 6\} \subseteq X$



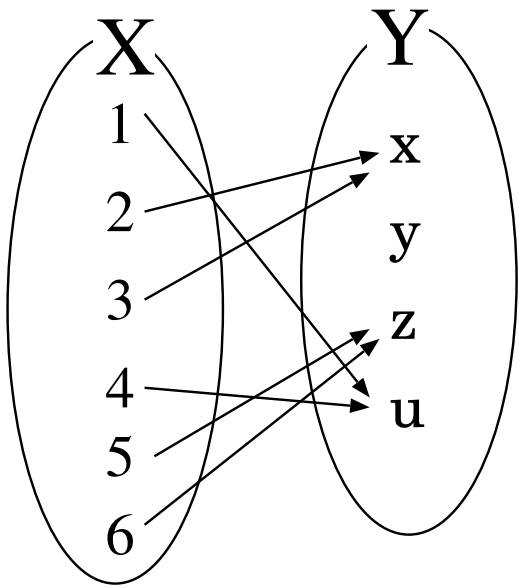
***ii)*** $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

$A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 6\} \subseteq X$



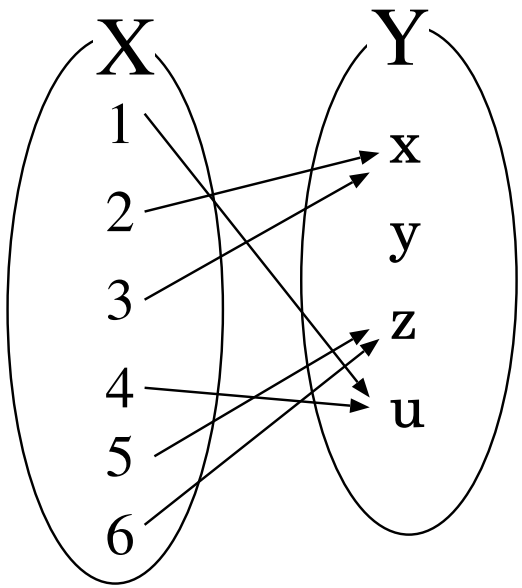
## ***iii)*** $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$

$A = \{2, 4, 5\} \subseteq X$



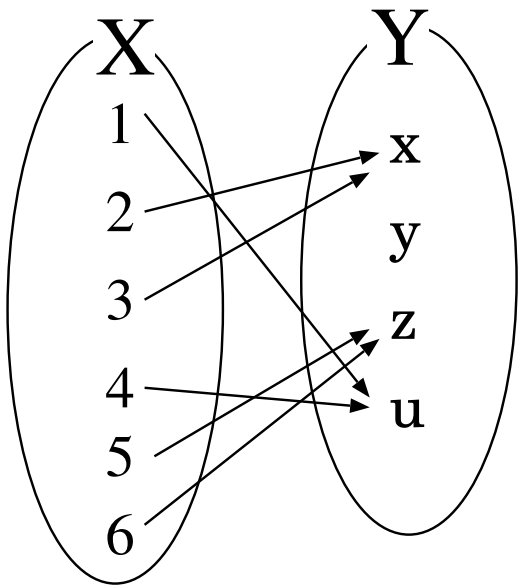
***i)*** $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ ***ii)*** $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

$A = \{x, y\}$, $B = \{y, u\} \subseteq Y$



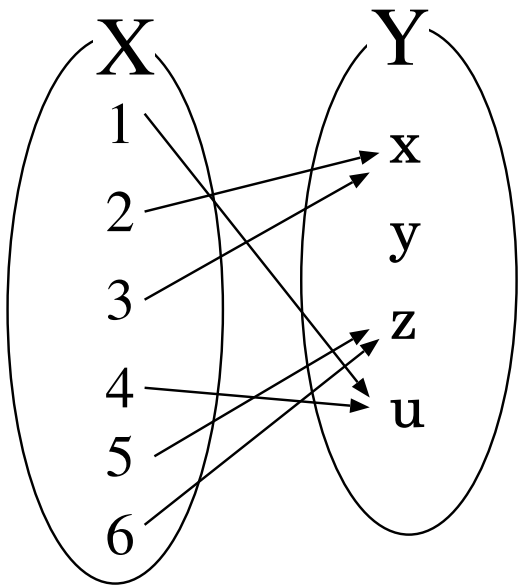
## ***ii)*** $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

$A = \{x, y\}$, $B = \{y, u\} \subseteq Y$



## *iii)* $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

$B = \{y, u\} \subseteq Y$



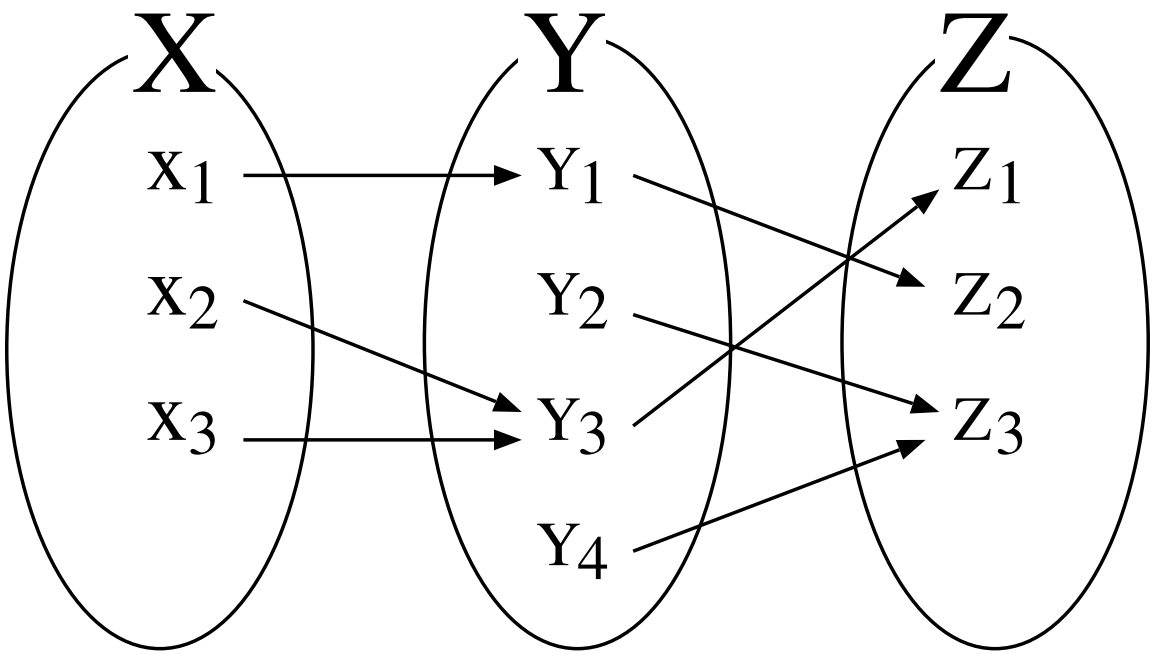
**定義 47.** (**合成写像**)　$X, Y, Z$ を空でない集合とする。

写像 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ に対し、それらの **合成写像** $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ を、

$x \in X$ に対し、$(g \circ f)(x) := g(\ f(x)\ )$ と定義する。

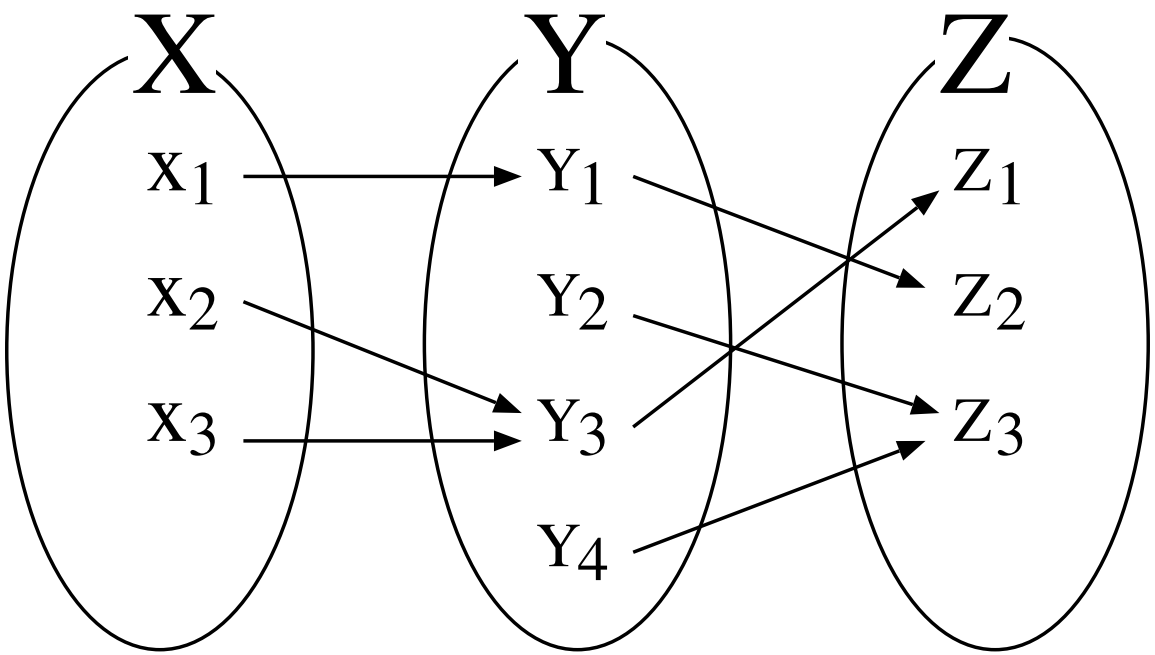
**( 例 )**

写像 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ より，合成写像 $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ が得られる．




$f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow Z$

**例 48.** $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ **とする。**
**写像** $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ **を図のように定義する。**




$$(g \circ f)(x_1) = g(\ f(x_1)\ ) = g(\ y_1\ ) = z_2.$$

$$(g \circ f)(x_2) = g(\ f(x_2)\ ) = g(\ y_3\ ) = z_1.$$

$$(g \circ f)(x_3) = g(\ f(x_3)\ ) = g(\ y_3\ ) = z_1.$$

**定理 49.** *(合成写像の結合律)* $X, Y, Z, W$ **を空でない集合とする。**
**写像** $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ **に対し、**

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

**が成り立つ.**

*(証明)*
**(任意の**$x \in X$ **に対し、**$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$ **が成り立つことを示せばよい)**

$$\begin{aligned}((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(\ f(x)\ ) \\ &= h(\ g(\ f(x)\ )\ ) \\ &= h(\ (g \circ f)(x)\ ) \\ &= (h \circ (g \circ f))(x).\end{aligned}$$

**例 50.　写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ がそれぞれ全単射ならば、次のことが成り立つことを示せ。**

1. **合成写像 $g \circ f$ は全単射**
2. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

**(証明)**

*1.* **合成写像** $g \circ f$ **は全単射** ( $g \circ f$ **が 全射 かつ 単射 であることを示せばよい)**

**単射)**

**任意の** $x_1, x_2 \in X$ **に対し,** $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ **とする。**

$g(\ f(x_1)\ ) = (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) = g(\ f(x_2)\ )$ **と書ける.**

$g$ **は単射より,** $g(\ f(x_1)\ ) = g(\ f(x_1)\ )$ **ならば** $f(x_1) = f(x_2)$ **. さらに,**

$f$ **も単射より,** $f(x_1) = f(x_1)$ **ならば** $x_1 = x_2$ **.**

**ゆえに, 任意の** $x_1, x_2 \in X$ **に対し,**

$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ **ならば** $x_1 = x_2$ **が言えた.**

## 全射)

**(任意の $z \in Z$ に対し, $(g \circ f)(x) = z$ となる $x \in X$ が存在することを示せばよい.)**

**任意の $z \in Z$ に対し, $g$ は全射より, $g(y) = z$ となる $y \in Y$ が存在する.**

**さらに, $f$ も全射より, $y \in Y$ に対し, $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する.**

**したがって, それらを整理すると,**

$$z = g(\ y\ ) = g(\ f(x)\ ) = (g \circ f)(x)$$

**と書ける。これより, 任意の $z \in Z$ に対し, $(g \circ f)(x) = z$ となる $x \in X$ が存在するが言えた.**

**以上より, $g \circ f$ は単射かつ全射であるから, $g \circ f$ は全単射である. ∎**

## 2. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

前記 $1$ の結果より，$g \circ f$ は全単射であるから逆写像 $(g \circ f)^{-1}$ が存在する．

そこで，任意の $z \in Z$ を取り出し，その $z$ に対し，$(g \circ f)^{-1}(z) = x \in X$ とする．

すなわち，$z = (g \circ f)(x) = g(\ f(x)\ )$．

そして，$g$ は全単射であるから，$g^{-1}(z) = f(x) \in Y$．

さらに，$f$ も全単射であることより，$f^{-1}(\ g^{-1}(z)\ ) = x \in X$．

したがって，$x = f^{-1}(\ g^{-1}(z)\ ) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$．

ゆえに，$(g \circ f)^{-1}(z) = x = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$ が成り立つ．∎

**例 51.** $X, Y, Z$ を空でない集合とし、$f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ とする。このとき、次のことが成り立つことを示せ。

1. 合成写像 $g \circ f$ が単射 ならば $f$ は単射である。
2. 合成写像 $g \circ f$ が全射 ならば $g$ は全射である。
3. 合成写像 $g \circ f$ が単射 かつ $f$ が全射 ならば $g$ は単射である。
4. 合成写像 $g \circ f$ が全射 かつ $g$ は単射 ならば $f$ は全射である。

**単射, 全射 を証明する基本** (定義の条件を満たすことを示せばよい)

( $f$ は単射 ) 「任意の $a, b \in X$ に対し, $f(a) = f(b)$ ならば $a = b$」 を示せばよい. または, その対偶を示せばよい.

( $f$ は全射 ) 「任意の $y \in Y$ に対し, $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在すること」を示せばよい.

1. $g \circ f$ **が単射ならば** $f$ **は単射である。(** $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$**)**

**(証明) (任意の** $a, b \in X$ **に対し，**$f(a) = f(b)$ **ならば** $a = b$ **を示せばよい．)**

**任意の** $a, b \in X$ **に対し，**$f(a) = f(b)$ **ならば，**$g(f(a)) = g(f(b))$**.**

**これより,** $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(b)) = (g \circ f)(b)$**.**

**仮定より** $g \circ f$ **は単射であるから,** $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$ **ならば** $a = b$**.**

**ゆえに，**$f(a) = f(b)$ **ならば** $a = b$ **が言えるので，**$f$ **は単射である．**∎

**2.** $g \circ f$ **が全射ならば** $g$ **は全射である。(** $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$**)**

**(証明) (任意の** $z \in Z$ **に対し，**$g(y) = z$ **となる** $y \in Y$ **が存在することを示せばよい．)**

$g \circ f$ **が全射であることより，**

**任意の** $z \in Z$ **に対し，**$(g \circ f)(x) = z$ **となる** $x \in X$ **が存在する．**

**すると，**$z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ **となる** $y = f(x) \in Y$ **が存在する．**

**ゆえに,** $z \in Z$ **に対し,** $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$ **となる** $y \in Y$ **が存在するので,** $g$ **は全射である。∎**

**3.** $g \circ f$ **が単射 かつ** $f$ **が全射ならば** $g$ **は単射である。**$(\ X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z)$

**(証明)** **(任意の**$y_1, y_2 \in Y$**に対し，**$g(y_1) = g(y_2)$**ならば**$y_1 = y_2$**を示せばよい．)**

$f$ **は全射であるから，任意の** $y_1, y_2 \in Y$ **に対し，**

$f(x_1) = y_1$**,** $f(x_2) = y_2$ **となる** $x_1, x_2 \in X$ **が存在する．**

**一方，**$g(y_1) = g(y_2)$ **ならば**

$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) = g(y_2) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$ **より，**

$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$**.**

$g \circ f$ **は単射であるから，**$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ **ならば** $x_1 = x_2$**.**

**したがって，**$x = x_1 = x_2$ **とすれば**$y_1 = f(x_1) = f(x) = f(x_2) = y_2$**となる．**

**ゆえに，**$g(y_1) = g(y_2)$ **ならば** $y_1 = y_2$ **より，**$g$ **は単射である．** ∎

4. $g \circ f$ が全射 かつ $g$ は単射ならば $f$ は全射である。( $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ )

(証明) (任意の $y \in Y$ に対し，$f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在することを示せばよい．)

任意の $y \in Y$ に対し，$g(y) = z \in Z$ とする．

$g \circ f$ は全射であるから $z \in Z$ に対し，$(g \circ f)(x) = z$ となる $x \in X$ が存在する．

このとき，$g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z = g(y)$ である．

$g$ は単射であることより，$g(f(x)) = g(y)$ ならば $f(x) = y$.

ゆえに，任意の $y \in Y$ に対し，$f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在することより，$f$ は全射である。∎

**定義 52.** $X$ を空でない集合とする。

このとき、直積 $X \times X$ から $X$ への写像を $X$ 上の **2項演算** という。

実数の加法 “$+$” や乗法 “$\times$” は、2つの実数に対して1つの実数を対応させる写像である。

したがって、これらは $\mathbf{R}$ 上の2項演算である。

たとえば, $\mathbf{R}$ 上の加法における 2項演算 は以下の通り.

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$f : (a, b) \longmapsto f(a, b) = a + b$$

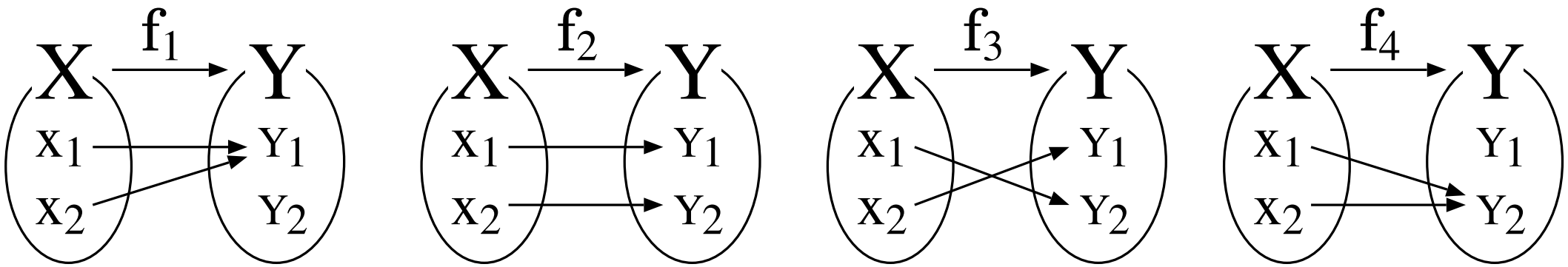
**定義 53.** 集合$X$から集合$Y$への写像の全体からなる集合を

$$Y^X := \{f \mid f : X \longrightarrow Y\}$$

と表す。

**例 54.** $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ に対し、集合$Y^X$を外延的記法で表せ。

*(解答)* $Y^X = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. ただし、$f_1, f_2, f_3, f_4$ は図のような写像である。




写像 $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$.

**定理 55.** $X, Y$ を空でない有限集合とし、$|X| = m, |Y| = n$ とする。
$X$ から $Y$ への写像の数に関し、以下のことが成り立つ。

1. **写像の総数：** $|\{f \mid f : X \longrightarrow Y\}| = |Y^X| = n^m = |Y|^{|X|}$
2. **単射の総数：** $|\{f \mid f : X \longrightarrow Y,\ f$ **は単射**$\}|$

$$= \begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1)) = \dfrac{n!}{(n-m)!}, & (m \leq n) \\ 0, & (m > n) \end{cases}$$

3. **全射の総数：** $|\{f \mid f : X \longrightarrow Y,\ f$ **は全射**$\}|$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m, & (m \geq n) \\ 0, & (m < n) \end{cases}$$

**証明するに当たり，$X, Y$ は有限集合であるから、**

$X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ **としても一般性は失われない。**

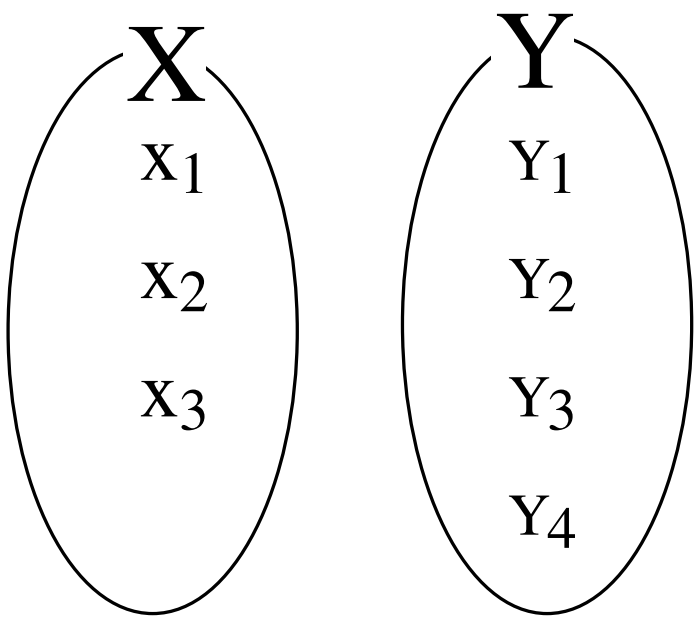
1. **写像の総数：** $|Y|^{|X|} = n^m$ $(X = \{x_1, \ldots, x_m\},\ Y = \{y_1, \ldots, y_n\})$

**(証明)** 各 $x_i \in X$ に対し、$f(x_i) = y_j$ となる対応を指定することで写像は定まる。

$x_i$ に対し、そのような対応を指定する仕方は $n$ 通り。

したがって、$m$ 個の $x_1, x_1, \ldots, x_m$ に対し、$f(x_i) = y_j$ の値を定める組合せは $n^m$ 通りある。

ゆえに、$|Y^X| = n^m = |Y|^{|X|}$. ∎



## 2. 単射の総数：$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1))$, ($m \leq n$ のとき)

$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$.

(証明)

単射であるから、

任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し、$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$.

したがって、これを満たすには、$m \leq n$ でなければならない。

したがって、*i)* $m > n$ のときには *0* 個となる。

*ii)* $m \leq n$ の場合について考える。求める個数は、$x_1$ から $x_m$ に対し、順に $f(x_1), \ldots, f(x_m)$ の値を $y_1, \ldots, y_n$ の中から定める数である。

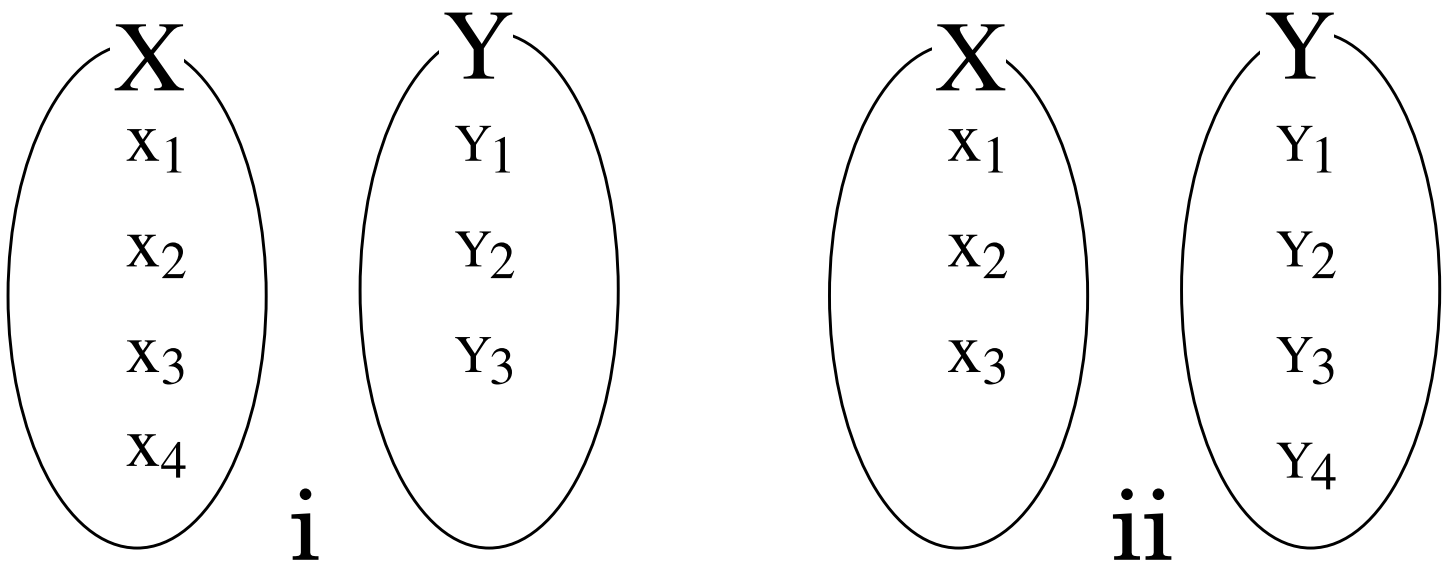
ただし、単射であるから $x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ を満たす必要がある。

すなわち、$n$ 個の中から $m$ 個を順に取り出す順列の数である。

ゆえに、求める個数は、$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$ となる。∎

***i)*** $m > n$ **のとき，*0* 個.**

***ii)*** $m \leq n$ **のとき，** $n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$



**3. 全射の総数：$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m$, $(m \geq n)$のとき)**

**(証明)**

全射であるから、

任意の $y \in Y$ に対し、$f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する。

*i)* $m < n$ であるとすると, $y_1 \neq y_2$ である $y_1, y_2 \in Y$ に対し, $y_1 = f(x) = y_2$ となる $x \in X$ が少なくとも *1* つは存在することになる。

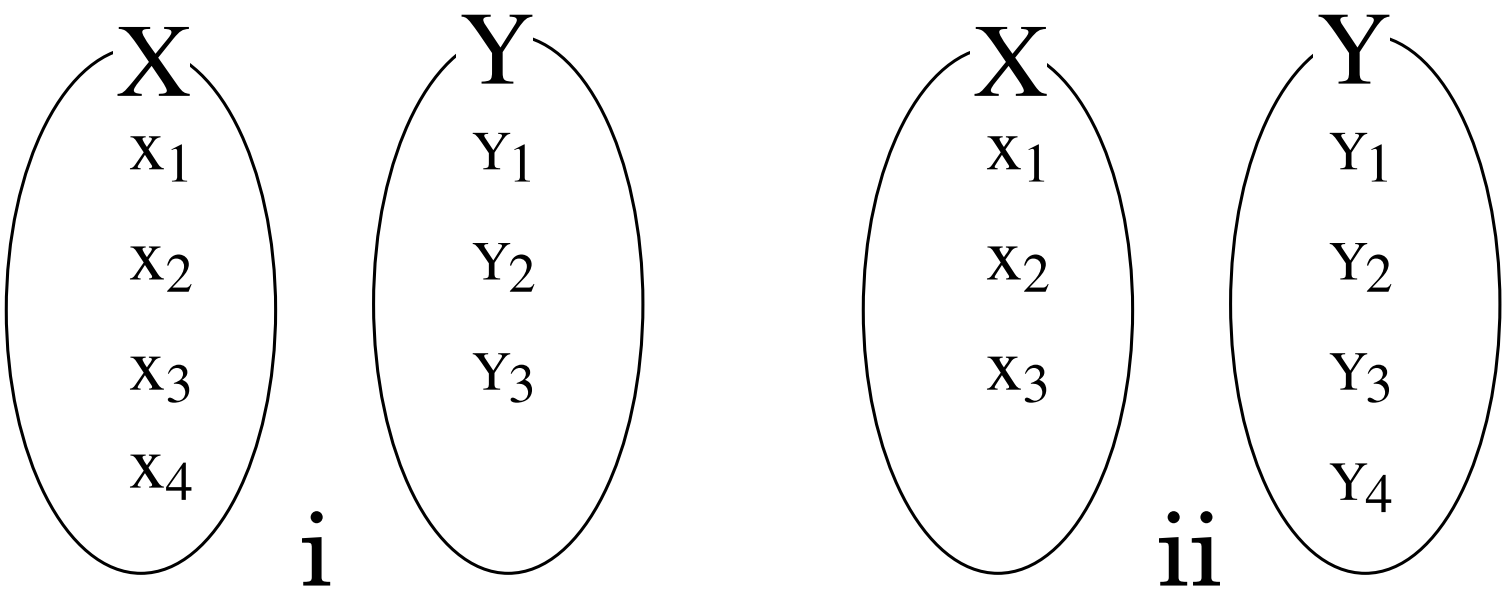
しかし、これは、写像の定義である、$f(x)$ の値が唯 *1* つ定まるということに矛盾する。

ゆえに、$m < n$ のときは、*0* 個である。

*ii)* $m \geq n$ の場合については、ここでの証明は省略する。*(*例 *1.60* を参照*)* ∎

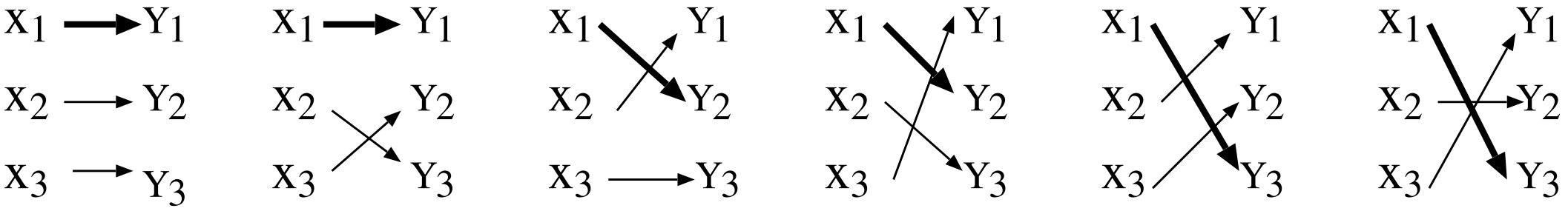
***i)*** $m \geq n$ **のとき,** $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m$**.**

***ii)*** $m < n$ **のとき,** ***0*** **個.**



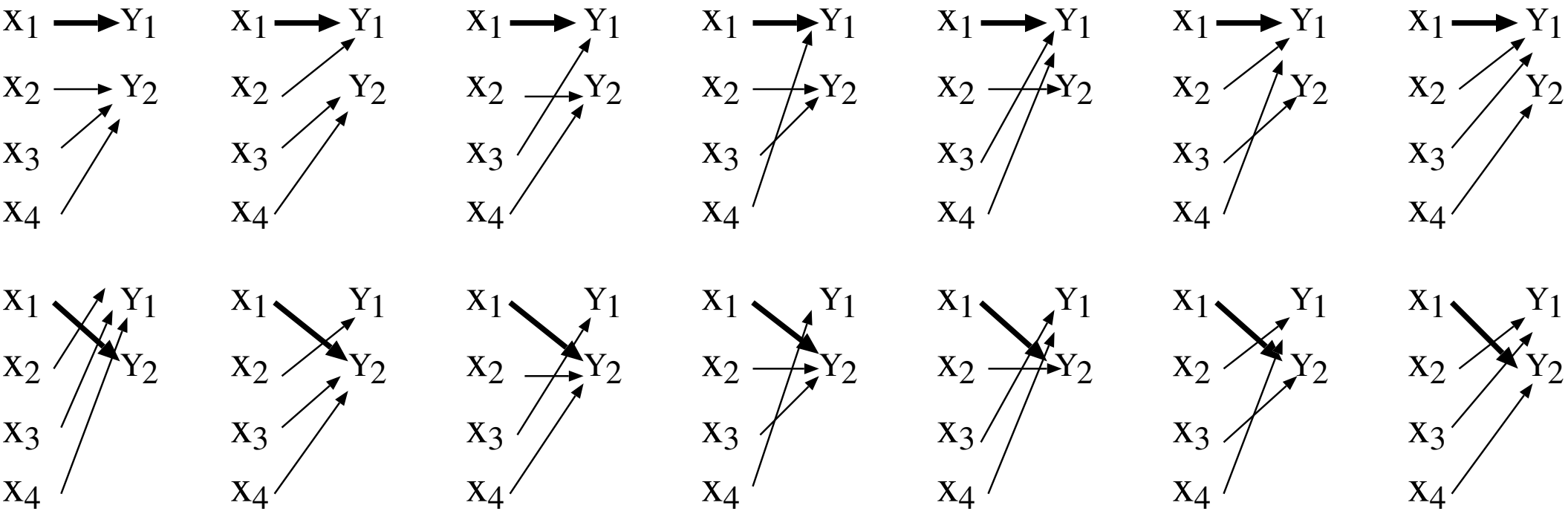
## $(m,n)=(3,2)$ の場合，$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m=6$.

$$\sum_{k=0}^{2}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^3=0-2\cdot 1^3+1\cdot 2^3=0-2+8=6$$



## $(m,n)=(4,2)$ の場合，$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m=14$.

$$\sum_{k=0}^{2}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^4=0-2\cdot 1^4+1\cdot 2^4=0-2+16=14$$



**系 56.** $X, Y$ **を空でない有限集合とする。**

1. **“**$X$ **から**$Y$ **への単射が存在する”ことと、“**$|X| \leq |Y|$**”は同値である。**
2. **“**$X$ **から**$Y$ **への全射が存在する”ことと、“**$|X| \geq |Y|$**”は同値である。**
3. **“**$X$ **から**$Y$ **への全単射が存在する”ことと、“**$|X| = |Y|$**”は同値である。**

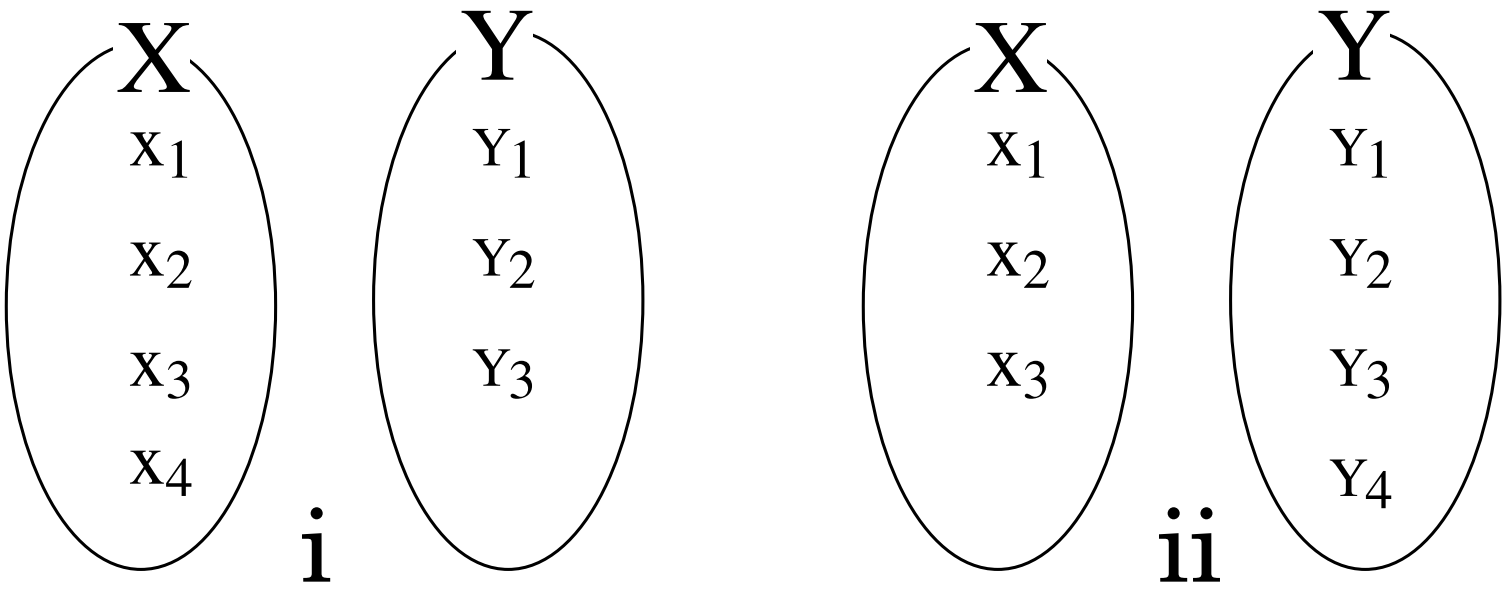
## 1. “$X$ から $Y$ への単射が存在する” $\Leftrightarrow$ “$|X| \leq |Y|$”

**(証明)**

単射が存在するならば、その個数は1以上であるから、

$|X| > |Y|$ ではない。すなわち、$|X| \leq |Y|$ である。

逆に、$|X| \leq |Y|$ ならば、$|Y|!/(|Y| - |X|)!(> 0)$ 個の単射を定義できるので、単射が存在する。■



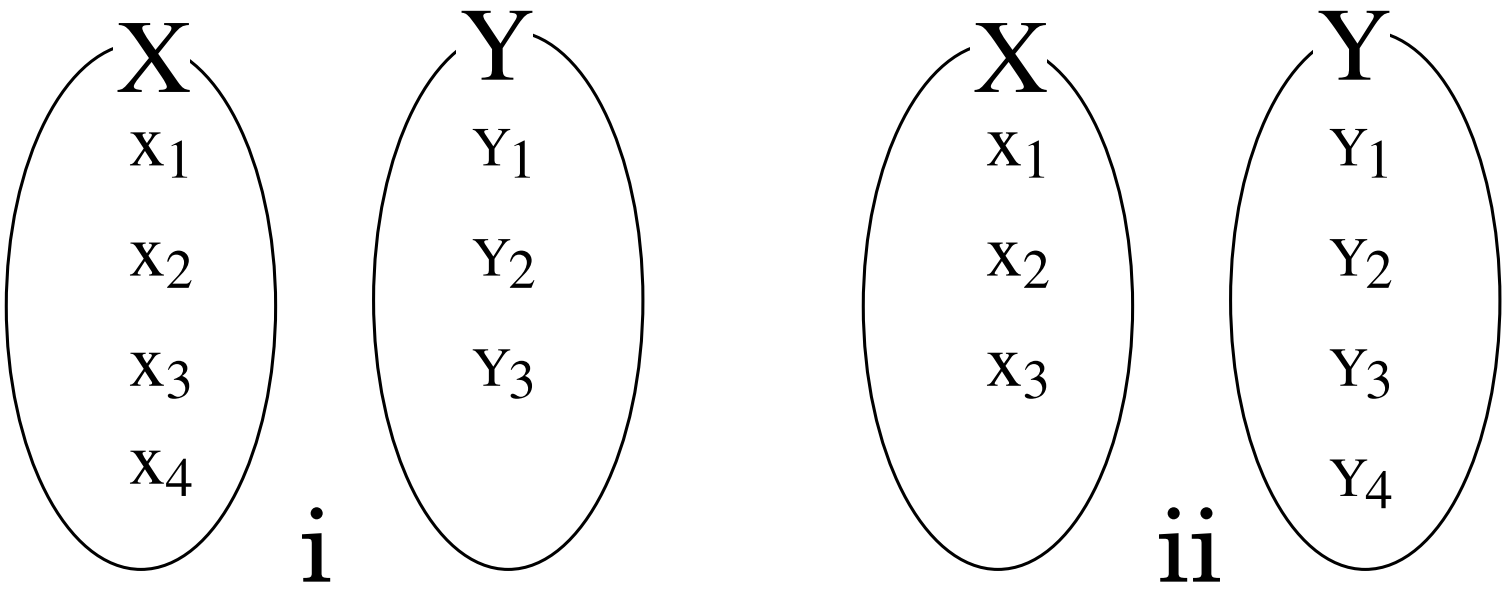
## 2. “$X$ から $Y$ への全射が存在する” $\Leftrightarrow$ “$|X| \geq |Y|$”

**(証明)**

全射が存在するならば、その個数は1以上であるから、

$|X| < |Y|$ ではない。すなわち、$|X| \geq |Y|$ である。

逆に、$|X| \geq |Y|$ ならば、$\sum_{k=0}^{|Y|}(-1)^{|Y|-k}\binom{|Y|}{k}k^{|X|}(>0)$ 個の全射を定義できるので、全射が存在する。∎

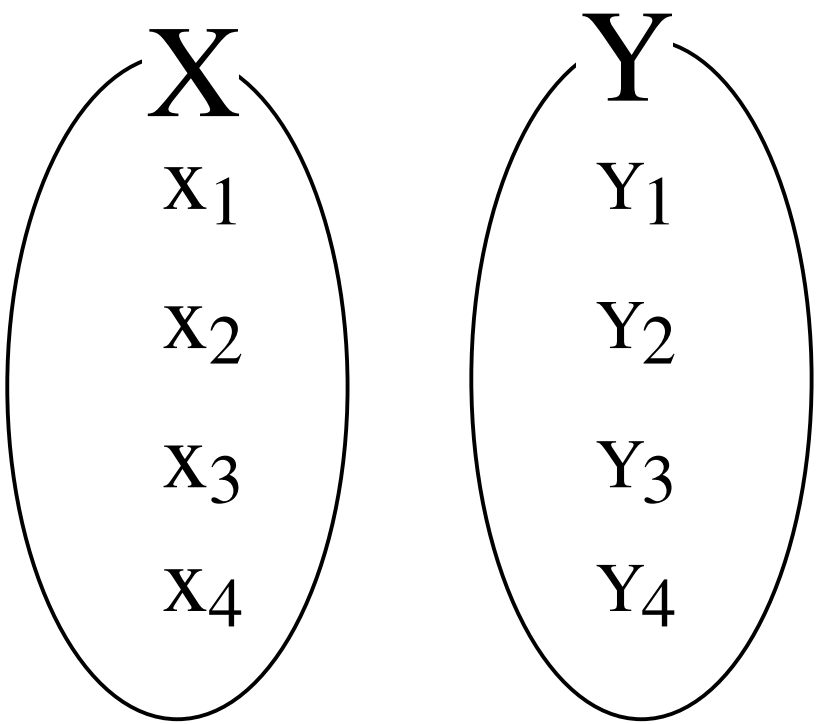


**3.** “$X$ から $Y$ への全単射が存在する” $\Leftrightarrow$ “$|X| = |Y|$”

**(証明)**

全単射が存在するならば、上記1,2より、$|X| = |Y|$ である。

逆に、$|X| = |Y|$ ならば、$X = \{x_1, \ldots, x_{|X|}\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_{|X|}\}$ に対し、$f(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, |X|$ とすることで、$f$ は全単射となる。ゆえに、全単射が存在する。∎



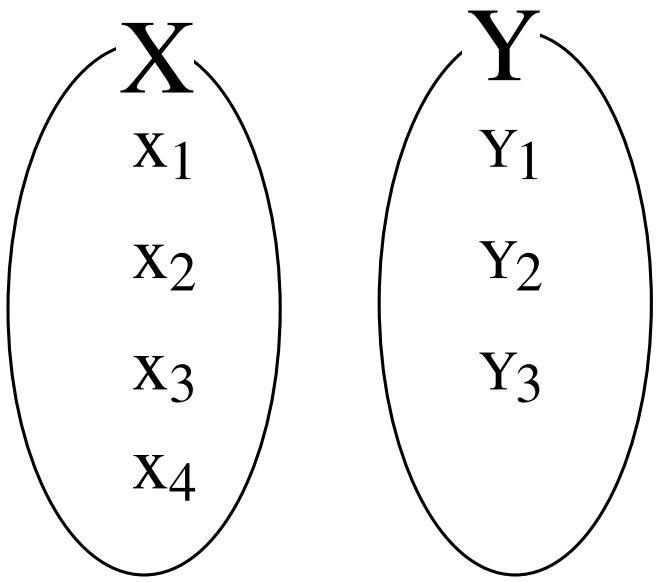
## 鳩の巣原理:

$X, Y$ を有限集合とする。

$|X| > |Y|$ ならば $X$ から $Y$ への単射は存在しない。

したがって、$f(x_1) = f(x_2)$ となる、異なる $x_1, x_2 \in X$ が存在する。

これを、一般に、**鳩の巣原理** という。




$$f : X \to Y$$

**定理 57.** *(鳩の巣原理)* $X, Y$ を空でない有限集合とする。

$k = \lceil \frac{|X|}{|Y|} \rceil$ とするとき、$X$ から $Y$ への任意の写像 $f$ に対し、
$f(x_1) = \cdots = f(x_k)$ を満たす $k$ 個の異なる $x_1, \ldots, x_k$ が存在する。∎

*(Ceiling記号 と Floor記号)* $x$ を実数とする。

1. $\lceil x \rceil$ とは、「$x$ 以上の最小の整数」を表す。*($x$ の天井 (ceiling))*
   $x = 2.3$ ならば、$\lceil 2.3 \rceil = 3$
2. $\lfloor x \rfloor$ とは、「$x$ 以下の最大の整数」を表す。*($x$ の床 (floor))*
   $x = 2.3$ ならば、$\lfloor 2.3 \rfloor = 2$
3. $\lceil x \rceil - x < 1$ が成り立つ.
4. $x - \lfloor x \rfloor < 1$ が成り立つ.

**定理**　$X, Y$ を空でない有限集合とする。

$k = \lceil \frac{|X|}{|Y|} \rceil$ とするとき、$X$ から $Y$ への任意の写像 $f$ に対し、

$f(x_1) = \cdots = f(x_k)$ を満たす $k$ 個の異なる $x_1, \ldots, x_k$ が存在する。

**(証明)** 背理法を用いて証明する。

$|X| > |Y|$ とする。このとき、$k > 0$ である。

$X$ から $Y$ への任意の写像 $f$ に対し、$f(x_1) = \cdots = f(x_k)$ を満たす $k$ 個の異なる $x_1, \ldots, x_k$ が存在しないと仮定する。

すなわち、すべて $k$ 個より少ないとする。すると、

$$|X| \leq (k-1)|Y| = (\lceil \frac{|X|}{|Y|} \rceil - 1)|Y| < \frac{|X|}{|Y|}|Y| = |X|$$

より、$|X| < |X|$ となり、矛盾。

ゆえに, $f(x_1) = \cdots = f(x_k)$ を満たす $k$ 個の異なる $x_1, \ldots, x_k$ が存在する. ∎

**例 58.** $13$ 人以上の人がいれば、必ず同じ生まれ月の人がいることを示せ。

*(解答)*

$13$ 人以上の人の集合を $X$, 月の集合を $Y = \{1, \ldots, 12\}$ とする。

そして、$X$ に属する人に、その生まれ月を対応させる写像を考える。

$|X| \geq 13 > 12 = |Y|$ であるから、鳩の巣原理の定理より、

少なくとも $\lceil \frac{13}{12} \rceil = 2$ 人の人が同じ生まれ月になる。∎

**定理 59.** **$X, Y$ を空でない有限集合とし、$|X| = |Y|$ とする。このとき、**

**$X$ から $Y$ への写像が全射であることと、単射であることは同値である。**

**(証明)** 写像を $f$ とする。

**(全射 $\rightarrow$ 単射)** 全射より、任意の $y \in Y$ に対し、
$f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する。

そこで、$f(x_1) = f(x_2)$ かつ $x_1 \neq x_2$ となる $x_1, x_2 \in X$ が存在すると仮定すると、$|X| > |Y|$ となる。

これは、$|X| = |Y|$ に矛盾。

ゆえに、$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ である。すなわち、$f$ は単射である。

**全射←単射)** 単射より、$x_1 \neq x_2$ となる任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し、$f(x_1) \neq f(x_2)$ である。

$|X|$ 個の $f(x) \in Y$ はすべて異なり $|X|$ 個ある。

$|X| = |Y|$ であるから

$Y = \{f(x_i) \mid i = 1, \ldots, |X|,$ もし $i \neq j$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)\}$
と定めることができる。

ゆえに、任意の $y \in Y$ に対し、$f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する。すなわち、$f$ は全射である。∎

## 濃度 (のうど)

1. 集合 $X$ から集合 $Y$ への全単射が存在するとき、
   $X$ と $Y$ は 対等 であるという。
2. 対等な集合は等しい 濃度 *(Cardinality (Cardinal number))* をもつという。
3. 集合 $X$ の濃度を $|X|$ と表す。
4. 有限集合の場合、$|X|$ はその要素数を表す。
5. 有限集合 $X, Y$ に対し、
   $X$ と $Y$ が等しい濃度をもつことと、$|X| = |Y|$ は同値である。
6. 集合 $X$ から集合 $Y$ への全射が存在するとき、
   $|X|$ は $|Y|$ 以上であるといい、$|X| \geq |Y|$ と表す。
7. $|X| \geq |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$ のとき、
   $|X|$ は $|Y|$ より大きいといい、$|X| > |Y|$ と表す。

**例 60.** 空でない有限集合 $X, Y$ に対し，$|X| = m, |Y| = n$ とする。
このとき，$X$ から $Y$ への全射の総数は $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m$ と書けることを，以下に厳密な証明ではないが，スケッチする．

1. まず，$X$ から $Y$ への写像の総数は $n^m$ である．
2. 要素数 $m$ の集合 $X$ から要素数 $k$ の部分集合 $B(\subseteq\ Y)$ への全射の総数を $F(m,k)$ と表す．
3. このとき，$n^m$ 個の写像の中で値域 (終集合) が要素数 $k$ 個の部分集合 $B \subseteq Y$ になるような写像の総数は $\binom{n}{k}F(m,k)$ である．
4. したがって，写像の総数は $n^m = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}F(m,k)$ と書ける．

(続く)

**5. すると，$F(m,n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m$ を $n$ に関する数学的帰納法で証明できる．**

**$n=1$のとき，正しいことを示し，$n-1$まで，正しいと仮定する．**

**すると，$n$ のときでも，次式の最後の等号が成り立つことを示すことができる．*(*文献*[3]*の第*1*章末の問題*19(p.41)*の解答を参照．*)***

$$
\begin{aligned}
F(m,n) &= n^m-\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}F(m,j)\\
&= n^m-\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}\left(\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}k^m\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

**例 61.**

**有限集合 $X$ の分割とは $X$ の部分集合を要素とする集合 $\{A_1, \ldots, A_n\}$ で、次の条件を満たすもののことである。**

***1.*** $A_i \neq \phi \ (i = 1, \ldots, n)$**,**

***2.*** $\cup_{i=1}^{n} A_i = X$**,**

***3.*** $i \neq j \rightarrow A_i \cap A_i = \phi$**.**

**各 $A_i$ を 分割ブロック という。**

**$X$ から集合 $\{1, \ldots, n\}$ への全射の総数を与える公式を用いて、$X$ を $n$ 個のブロックに分ける分割の総数を示せ。**

***(解答)***

$$\frac{1}{n!} F(|X|, n). \ \blacksquare$$

# References


[1] 尾関和彦, (情報技術者のための) 離散系数学入門, 共立出版, 2004.

[2] 尾関和彦, 太田和夫, 國廣昇, “離散数学第一” 及び “離散数学第一演習問題集” 電気通信大学情報通信工学科講義資料, 2004.

[3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 2003.

[4] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 2003.

[5] S. Lipschutz著, 成嶋弘監訳, 離散数学 (コンピュータサイエンスの基礎数学), オーム社, 2004(H16).

[6] 小倉久和, 情報の基礎離散数学 (– 演習を中心とした –), 近代科学社, 2006.

[7] 町田元, 横森貴, 計算機数学, 森北出版, 1990.

## 濃度について

1. **有限の濃度**: $0$ または 自然数で表される濃度, 有限集合の濃度のこと
2. **無限の濃度**: 無限集合の濃度のこと
3. 自然数全体の集合 $\mathrm{N}$ の濃度は, 無限の濃度.
   **可算の濃度**といい, $\aleph_0$ (アレフ ゼロ) と書く. すなわち, $|\mathrm{N}| = \aleph_0$.
4. 偶数全体の集合を $P$ とすれば, $\mathrm{N}$ と $P$ は対等である.
   なぜなら, $f(n) = 2n$ とすれば, $f$ は $\mathrm{N}$ から $P$ への全単射な写像となる.
5. 有理数全体の集合 $\mathrm{Q}$ の濃度は, $\aleph_0$ である.
   なぜなら, $f(a, b) = a/b$ とすれば, $f$ は $\mathrm{Z} \times \mathrm{N}$ から $\mathrm{Q}$ への全射な写像となる. したがって, $|\mathrm{Q}| \leq |\mathrm{N}| = \aleph_0$. 一方, $|\mathrm{Q}| \geq |\mathrm{N}| = \aleph_0$ であるから, $|\mathrm{Q}| = \aleph_0$.

6. 実数全体の集合 $\mathrm{R}$ の濃度も，無限の濃度.

   **連続の濃度**といい，$\aleph$ (アレフ) と書く．すなわち，$|\mathrm{R}| = \aleph$.

7. $\aleph_0 < \aleph$ (Cantorの対角線論法)

8. $\aleph_0$ 以下の濃度をもつ集合を**可算集合**という.

   $\mathrm{N}$, $\mathrm{Q}$ は可算集合.

9. $\aleph_0$ より大きい濃度をもつ集合を**非可算集合**という.

   $\mathrm{R}$ は非可算集合.