離散数学

— 1. 集合と写像 —
— 1.2 写像 —

2007.10.10

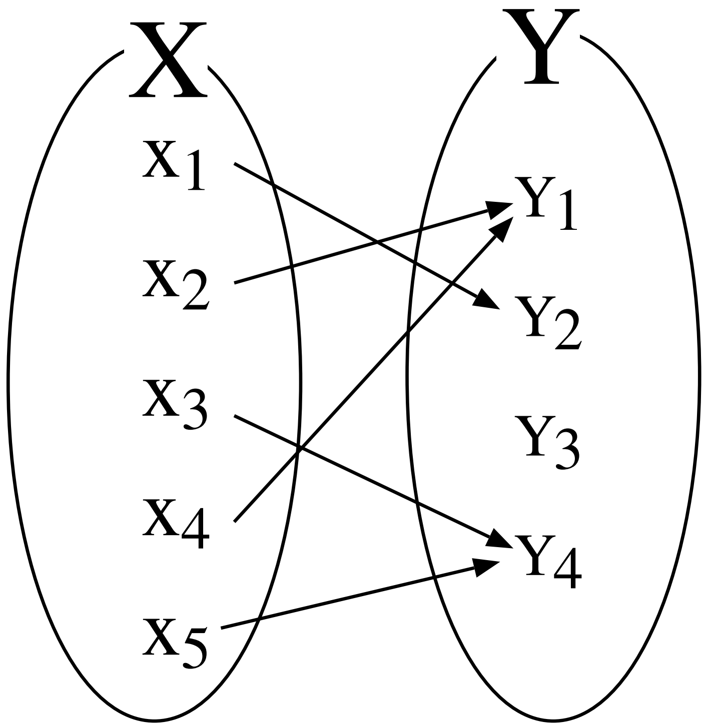
栗原正純 kuri@ice.uec.ac.jp

写象

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

$f : X \longrightarrow Y$,

$f(x_1) = y_2$, $f(x_2) = f(x_4) = y_1$, $f(x_3) = f(x_5) = y_4$



$f : X \longrightarrow Y$

1.2 写像

定義 35. （写象） X, Y を空でない集合とする。

1. X の各要素に対し、Y の要素が一つずつ対応するとき、この対応を写像という。

2. 写像を f とするとき、
“ $f : X \longrightarrow Y$ ” または “ $X \xrightarrow{f} Y$ ” と表し，X から Y への写像という.
X を f の始集合(あるいは定義域), Y を 終集合(あるいは値域)という.

3. f によって $x \in X$ に対応する Y の要素を $f(x)$ と表し，x における f の値という。このとき、
“ $f : x \longmapsto f(x)$ ” と表す。

（注意） X のどの要素 x に対しても、その値 $f(x)$ が必ず，しかし，ただ 1 つ定義されている.

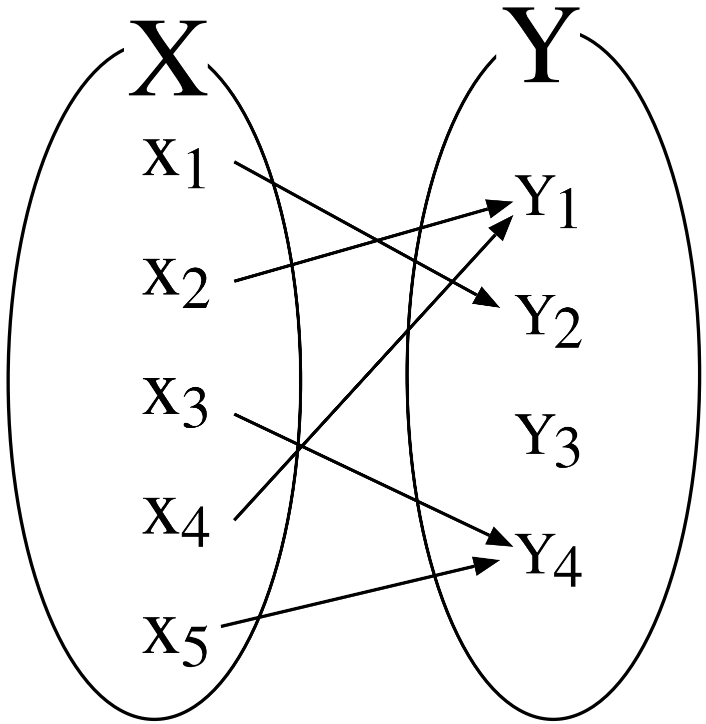
例 36. （写象）

次の図は、$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ に対し，

$$f : X \longrightarrow Y, \quad f : x \longmapsto f(x)\ ,$$

$$f(x_1) = y_2,\ f(x_2) = f(x_4) = y_1,\ f(x_3) = f(x_5) = y_4$$

という写像を表す。



$$f : X \longrightarrow Y$$

定義 37. X, Y を空でない集合とし，
写像 f と g を共に $f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Y$ とする。

1. 写像 f と g が<u>等しい</u>とは,
   「 任意の $x \in X$ に対し, $f(x) = g(x)$」
   が成り立つこと。f と g が<u>等しい</u>ことを $f = g$ と表す。
2. 写像 f が<u>定値写像</u>であるとは、
   「任意の $x, y \in X$ に対し, $f(x) = f(y)$」
   が成り立つこと。
3. 写像 f が<u>恒等写像</u>であるとは、
   「任意の $x \in X$ に対し, $f(x) = x$」
   が成り立つことをいう。

4. 写像 f が 単射, あるいは 1対1写像 であるとは、

「 任意の$x, y \in X$に対し, もし $x \neq y$ ならば $f(x) \neq f(y)$ 」

が成り立つこと。

(あるいは, その対偶となる, 「 $f(x) = f(y)$ ならば $x = y$ 」が成り立つこと)

5. 写像 f が 全射, あるいは X から Y の上への写像であるとは、

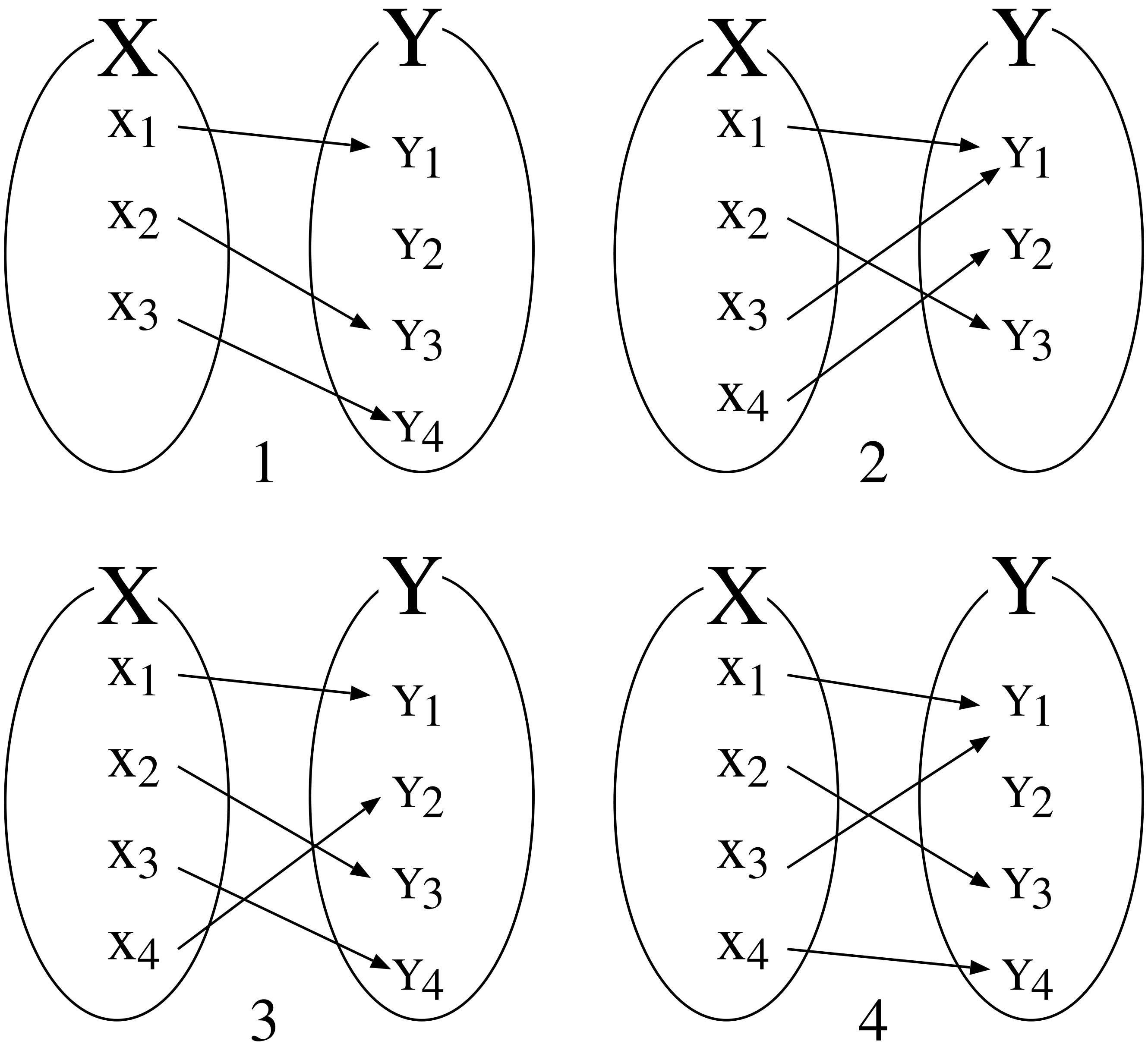
「 任意の $y \in Y$ に対し, $f(x) = y$ となるような $x \in X$ が存在する」

こと。

6. 全射 かつ 単射 である写像を 全単射 という。

特に，集合 X からそれ自身への全単射を X 上の 置換 ともいう。

例 38. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ の例を示す。単射であるか？ 全射であるか？



1. 単射 (全射ではない), *2.* 全射 (単射ではない), *3.* 全単射, *4.* 全射でも単射でもない.

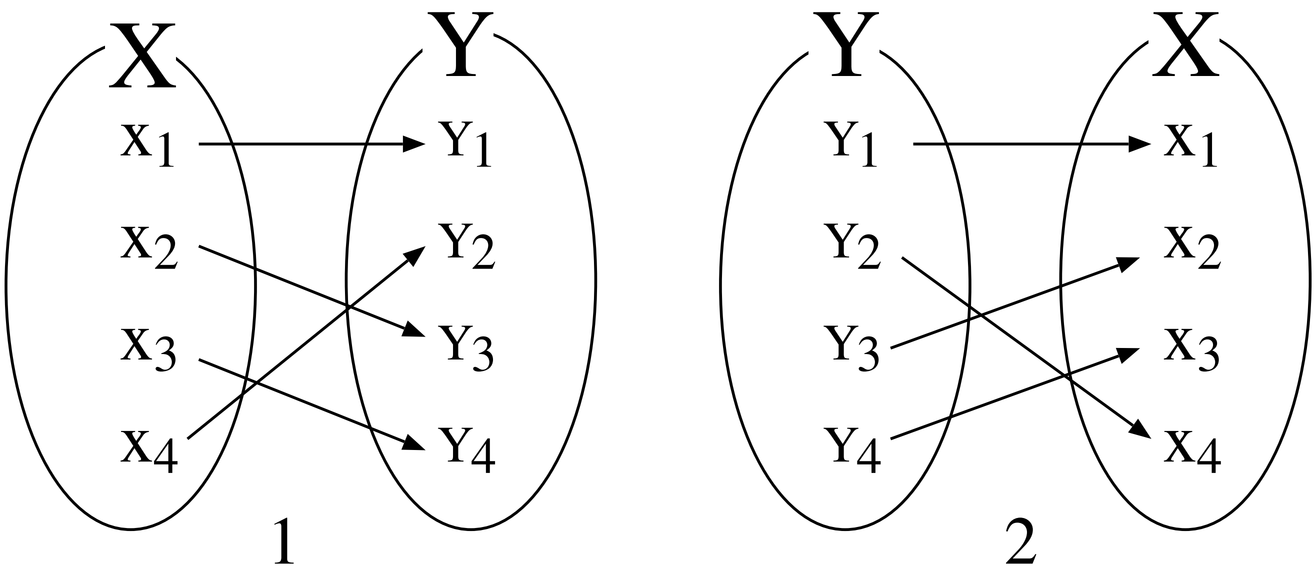
定義 39. （**逆写象**）

写像 $f : X \longrightarrow Y$ が **全単射である** とき, 任意の $y \in Y$ に対し, $f(x) = y$ となる $x \in X$ が **ただ 1 つ定まる**.

$y \in Y$ に, このような $x \in X$ を対応させる Y から X への写像を f の **逆写像** とよび, f^{-1} と表す。

すなわち、$f(x) = y$ のとき, かつ そのときに限り, $f^{-1}(y) = x$ である.

例 40. 全単射である写像 $f : X \longrightarrow Y$ とその**逆写像** $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ の例.



1. $f : X \longrightarrow Y$, *2.* $f^{-1} : Y \longrightarrow X$.

例 41. <u>全単射 f の逆写像 f^{-1} は全単射であることを示せ。</u>

(証明) (逆写像 f^{-1} が $i)$ 写像であり，かつ $ii)$ 単射 かつ $iii)$ 全射 であることを示せばよい)

写像 f を $f : X \longrightarrow Y$ とすると、$f^{-1} : Y \longrightarrow X$.

$i)$ 写像であること) $f^{-1} : Y \longrightarrow X$

(任意の $y \in Y$ に対し，$f^{-1}(y) = x$ となる $x \in X$ が 1 つしかもただ 1 つ定まることを示せばよい)

f は全射であるから任意の $y \in Y$ に対し，$f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する．さらに，f は単射であるから $f(x) = y$ となる $x \in X$ はただ 1 つである．

$ii)$ 全射$)$ $f^{-1}: Y \longrightarrow X$

(任意の $x \in X$ に対し, $x = f^{-1}(y)$ となる $y \in Y$ が存在することを示せばよい)

f は全単射より，任意の $x \in X$ に対し, $f(x) = y$ となる $y \in Y$ が一意に定まる．したがって，逆写像の定義より, $x = f^{-1}(y)$ である．

ゆえに、任意の $x \in X$ に対し、$f^{-1}(y) = x$ となる $y \in Y$ が存在する。

iii)* 単射*) $f^{-1} : Y \longrightarrow X$

(任意の $y_1, y_2 \in Y$ **に対し、**$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ **ならば** $y_1 = y_2$ **となることを示せばよい)**

逆写像の定義より，任意の $y_1, y_2 \in Y$ **に対し，**$f(x_1) = y_1$**，**$f(x_2) = y_2$ **となる** $x_1, x_2 \in X$ **がただ *1* つ定まる。すなわち，**$f^{-1}(y_1) = x_1$**，** $f^{-1}(y_2) = x_2$ **である．そこで，**

$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ **ならば** $x_1 = f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x_2$ **より** $x_1 = x_2$**.**

したがって、$x = x_1 = x_2$ **とすれば，**

$y_1 = f(x_1) = f(x) = f(x_2) = y_2$ **より** $y_1 = y_2$**.**

ゆえに、任意の $y_1, y_2 \in Y$ **に対し，**$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ **ならば** $y_1 = y_2$**.**

以上の *i, ii, iii)* より，f^{-1} **は全単射である。∎**

定義 42. （象 と 原象 (逆象)）

X, Y を空でない集合とし, f を写像 $f : X \longrightarrow Y$ とする。

1. X の部分集合 $A (\subseteq X)$ に対し、

$$
\begin{aligned}
F(A) &:= \{f(x) \in Y \mid x \in A\} \\
&= \{y \mid y \in Y,\ y = f(x) \text{ を満たす } x \in A \text{ が存在する}\}
\end{aligned}
$$

を A の f による<u>像</u>という。

特に、$F(X)$ を f の<u>値域像</u>という。

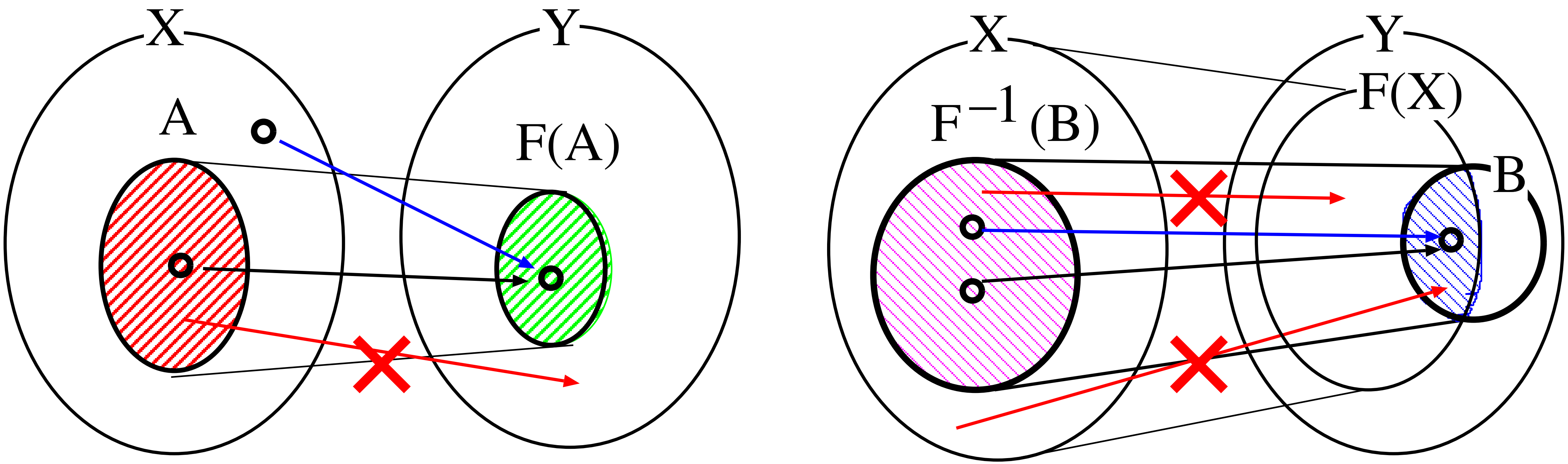
2. Y の部分集合 $B (\subseteq Y)$ に対し、

$$
F^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}
$$

を B の f による<u>原像</u>、あるいは<u>逆像</u>という。

(例) $f : X \longrightarrow Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$

$F(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$ $F^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$



$$f : X \longrightarrow Y$$

（注意）

1. F と F^{-1} は, f と f^{-1} とは異なる。

2. F は, $\underline{X \text{ のベキ集合 } 2^X}$ から $\underline{Y \text{ のベキ集合 } 2^Y}$ への対応.

   $$F : 2^X \longrightarrow 2^Y$$

3. F^{-1} は, $\underline{Y \text{ のベキ集合 } 2^Y}$ から $\underline{X \text{ のベキ集合 } 2^X}$ への対応.

   $$F^{-1} : 2^Y \longrightarrow 2^X$$

4. $f : X \longrightarrow Y$ に対し, $F : 2^X \longrightarrow 2^Y$

   $f : x \longmapsto f(x) = y$ に対し, $F : \{x\} \longrightarrow F(\{x\}) = \{f(x)\} = \{y\}$

5. しかし、同じ記号で表す習慣がある:

   $F, \ F^{-1}$ に対し、それぞれ $f, \ f^{-1}$ を用いる。すなわち,

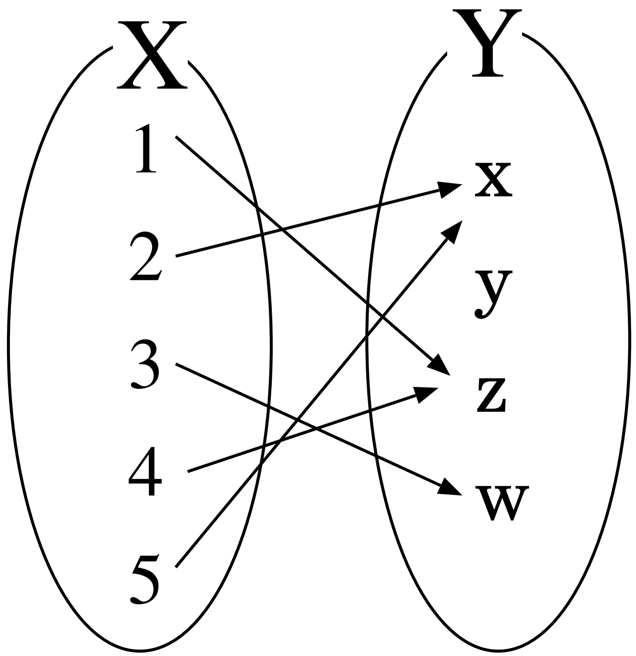
   $$f(A) = F(A)$$

   $$f^{-1}(B) = F^{-1}(B)$$

例 43. **(象 と 原象 (逆象))** $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{x, y, z, w\}$ **とする。**

写像 $f : X \longrightarrow Y$ **を図のように定義する。このとき、**

$f(\{1, 2, 4\})$, $f(\{1, 3, 5\})$, $f^{-1}(\{x, y, w\})$, $f^{-1}(\{y, z\})$
をそれぞれ外延的記法で表せ。



(解) $f(\{1, 2, 4\}) = \{x, z\}$, $f(\{1, 3, 5\}) = \{x, z, w\}$,

$f^{-1}(\{x, y, w\}) = \{2, 5, 3\}$, $f^{-1}(\{y, z\}) = \{1, 4\}$.

定理 44. X, Y を集合とし、$f : X \longrightarrow Y$ とする。

X の任意の部分集合 A, B に対し、以下のことを示せ。

1. $A \subseteq B$ ならば $f(A) \subseteq f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
4. $f(X - A) \supseteq f(X) - f(A)(= f(X) \cap (f(A))^c)$.
5. $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$.

1. $A \subseteq B$ **ならば** $f(A) \subseteq f(B)$

(証明) **(任意の** $y \in f(A)$ **に対し,** $y \in f(B)$ **を示せばよい)**

任意の $y \in f(A)$ **に対し,** $f(A)$ **の定義より,**

$f(x) = y$ **となる** $x \in A$ **が存在する。**

仮定 $A \subseteq B$ **より,** $x \in A \subseteq B$ **であるから,** $x \in B$**.**

ゆえに, $f(B)$ **の定義より、** $y = f(x) \in f(B)$**.** ∎

2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(証明) $\subseteq$) **任意の**$y \in f(A \cup B)$ **に対し,** $f(A \cup B)$ **の定義より,**

$f(x) = y$ **となる** $x \in A \cup B$ **が存在する.**

「$x \in A$ **ならば** $y = f(x) \in f(A)$**」または**

「$x \in B$ **ならば** $y = f(x) \in f(B)$**」**

ゆえに、$y \in f(A) \cup f(B)$.

$\supseteq$) **任意の** $y \in f(A) \cup f(B)$ **に対し、**

「$y \in f(A)$ **ならば** $f(x) = y$ **となる** $x \in A$ **が存在する」または**

「$y \in f(B)$ **ならば** $f(x) = y$**となる** $x \in B$ **が存在する」**

したがって、$x \in A \cup B$ **であり、**$y = f(x) \in f(A \cup B)$.

以上より, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ **は成り立つ.** ∎

3. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

(証明)

任意の $y \in f(A \cap B)$ **に対し,** $f(x) = y$ **となる** $x \in A \cap B$ **が存在する。**

$x \in A$ **かつ** $x \in B$ **より、** $y = f(x) \in f(A)$ **かつ** $y = f(x) \in f(B)$**.**

ゆえに, $y \in f(A) \cap f(B)$ **より,** $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ **が成り立つ.**

∎

左辺$\supseteq$右辺 が成り立たない例 (反例):

$X = \{1, 2\}, Y = \{y\}$ **とし，** X **から** Y **への写像** f **を** $f(1) = f(2) = y$ **とする．そして，** $A = \{1\},\ B = \{2\} \subseteq X$ **とする．このとき，**

左辺: $A \cap B = \phi$ **より，** $f(A \cap B) = \phi$

右辺: $f(A) \cap f(B) = \{y\}$

ゆえに， $y \in f(A) \cap f(B)$ **に対し，** $y \notin \phi = f(A \cap B)$**.** ∎

4. $f(X-A) \supseteq f(X)-f(A)(=f(X)\cap(f(A))^c)$

(証明) **任意の** $y \in (f(X)-f(A))$ **に対し、** $y \in f(X)$ **かつ** $y \notin f(A)$.

そこで， x **を** $f(x)=y$ **とすると、** $x \in X$ **かつ** $x \notin A$.

$x \notin A$ **より、** $x \in A^c$.

したがって、 $x \in X \cap A^c = X - A$. **ゆえに、** $y = f(x) \in f(X-A)$. ∎

左辺 $\subseteq$ **右辺 が成り立たない例** **:**

$X=\{1,2\}, Y=\{y\}$ **とし，** X **から** Y **への写像** f **を** $f(1)=f(2)=y$ **とする．そして，** $A=\{1\}\subseteq X$ **とする．このとき，**

左辺: $X-A=X\cap A^c=\{2\}$ **より，** $f(X-A)=\{y\}$

右辺: $f(X)-f(A)=f(X)\cap(f(A))^c=\{y\}\cap\{y\}^c=\{y\}\cap\phi=\phi$

ゆえに， $y \in f(X-A)$ **に対し，** $y \notin \phi = f(X)-f(A)$. ∎

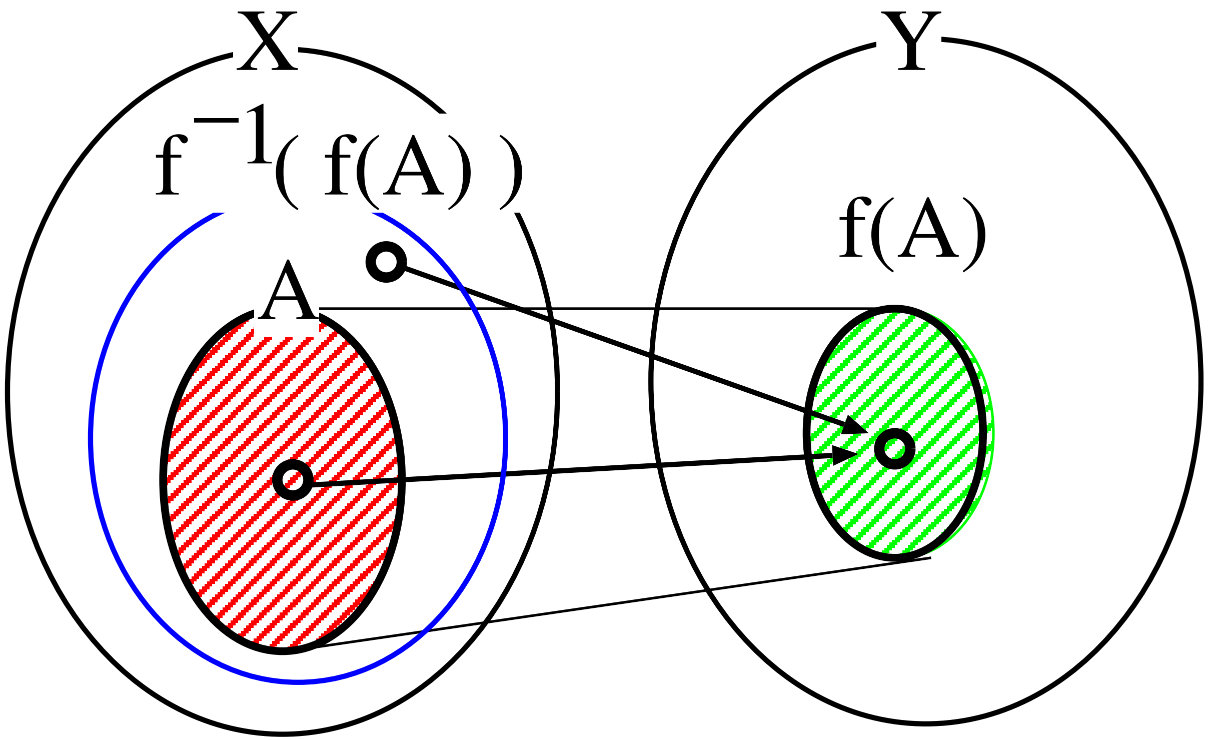
5. $\underline{f^{-1}(f(A)) \supseteq A}$

(証明) $\supseteq$) を示す。任意の $x \in A$ に対し、$y = f(x) \in Y$ とすると、

$f(A)$ **の定義より、** $y \in f(A)$.

次に、 $f^{-1}(f(A))$ **の定義より、**

$x \in \{x \mid f(x) = y \in f(A)\} = f^{-1}(f(A))$. ∎



$f : X \longrightarrow Y$

(f が単射である場合は、$f^{-1}(f(A)) = A$ が成り立つ):

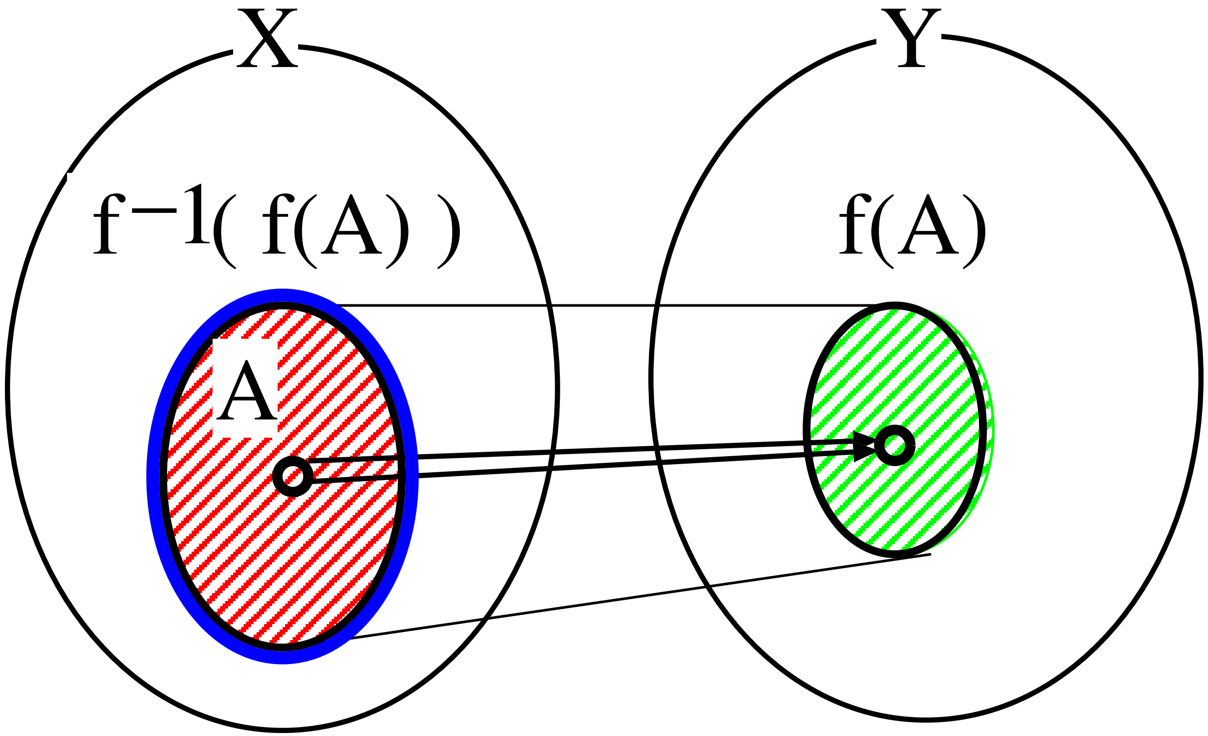
$\subseteq$) を示す。任意の $x \in f^{-1}(f(A))$ に対し、$y = f(x) \in Y$ とする。

$f^{-1}(f(A))$ の定義より、$y = f(x) \in f(A)$.

次に、$f(A)$ の定義より、$f(a) = y = f(x)$ となる $a \in A$ が存在する。

f は単射であるから、$f(a) = f(x)$ ならば $x = a$.

ゆえに、$x = a \in A$. ∎



定理 45. X, Y を集合とし、$f : X \longrightarrow Y$ とする。

Y の任意の部分集合 A, B に対し、以下のことを示せ。

1. $A \subseteq B$ ならば $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.
2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
4. $f^{-1}(Y - B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B)(= f^{-1}(Y) \cap (f^{-1}(B))^c)$.
5. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

1. <u>$A \subseteq B$ ならば $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$</u>

(証明)

任意の $x \in f^{-1}(A)$ に対し、$f^{-1}(A)$ の定義より、$f(x) \in A$.

仮定 $A \subseteq B$ より、$f(x) \in A \subseteq B$ であるから、$f(x) \in B$.

ゆえに、$f^{-1}(B)$ の定義より、$x \in f^{-1}(B)$. ∎

2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

(証明)

$\subseteq$) **任意の** $x \in f^{-1}(A \cup B)$ **に対し、** $f^{-1}(A \cup B)$ **の定義より、** $f(x) \in A \cup B$.

「$f(x) \in A$ **ならば** $x \in f^{-1}(A)$**」または**

「$f(x) \in B$ **ならば** $x \in f^{-1}(B)$**」**

以上より、 $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

$\supseteq$) **任意の** $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ **に対し,**

「$f^{-1}(A)$ **の定義より、** $x \in f^{-1}(A)$ **ならば** $f(x) \in A$**」または**

「$f^{-1}(B)$**の定義より,** $x \in f^{-1}(B)$ **ならば** $f(x) \in B$**」**

したがって、 $f(x) \in A \cup B$.

ゆえに、 $f^{-1}(A \cup B)$**の定義より、** $x \in f^{-1}(A \cup B)$. ∎

3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

(証明)

$\subseteq$) **任意の** $x \in f^{-1}(A \cap B)$ **に対し、**$f^{-1}(A \cap B)$ **の定義より、** $f(x) \in A \cap B$.

したがって、$f(x) \in A \cap B$ **ならば** $x \in f^{-1}(A)$ **かつ** $x \in f^{-1}(B)$.

ゆえに、$x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

$\supseteq$) **任意の** $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ **に対し、** $f^{-1}(A)$ **と** $f^{-1}(B)$ **の定義より、**$f(x) \in A$ **かつ** $f(x) \in B$.

したがって、$f(x) \in A \cap B$.

ゆえに、$f^{-1}(A \cap B)$**の定義より、**$x \in f^{-1}(A \cap B)$.

4. $f^{-1}(Y-B)=f^{-1}(Y)-f^{-1}(B)(=f^{-1}(Y)\cap(f^{-1}(B))^c)$

(証明)

$\subseteq$) **任意の** $x\in f^{-1}(Y-B)$ **に対し、**

$f^{-1}(Y-B)$ **の定義と差集合の定義より、** $f(x)\in Y-B=Y\cap B^c$.

すなわち、 $f(x)\in Y$ **かつ** $f(x)\in B^c$.

i) $f^{-1}(Y)$ **の定義より、** $x\in f^{-1}(Y)$.

ii) $f(x)\in B^c$ **ならば** $f(x)\notin B$.

さらに、 $f^{-1}(B)$ **の定義より、** $f(x)\notin B$ **ならば** $x\notin f^{-1}(B)$.

したがって、 $x\in(f^{-1}(B))^c$.

ゆえに、 $x\in f^{-1}(Y)$ **かつ** $x\in(f^{-1}(B))^c$.

以上より、 $x\in f^{-1}(Y)\cap(f^{-1}(B))^c=f^{-1}(Y)-f^{-1}(B)$.

$$f^{-1}(Y-B)=f^{-1}(Y)-f^{-1}(B)(=f^{-1}(Y)\cap(f^{-1}(B))^c)$$

$\supseteq$) **任意の** $x\in f^{-1}(Y)-f^{-1}(B)=f^{-1}(Y)\cap(f^{-1}(B))^c$ **に対し、**

i) $f^{-1}(Y)$ **の定義より、**$f(x)\in Y$**.**

ii) $x\in(f^{-1}(B))^c$ **より、**$x\notin f^{-1}(B)$**であり、**

$f^{-1}(B)$ **の定義より、**$f(x)\notin B$**. すなわち、**$f(x)\in B^c$**.**

したがって、$f(x)\in Y$ **かつ** $f(x)\in B^c$**.**

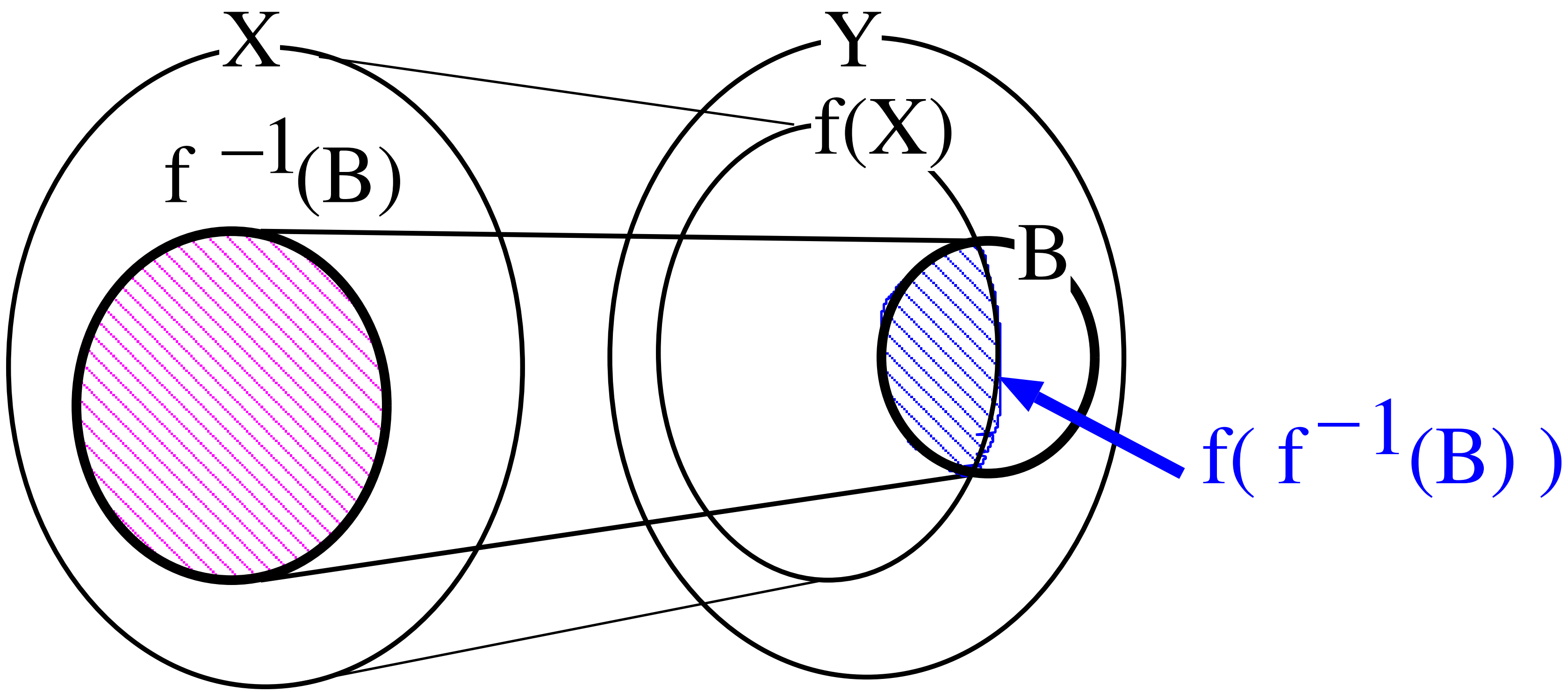
ゆえに、 $f(x)\in Y\cap B^c=Y-B$**.**

最後に、$f^{-1}(Y-B)$ **の定義より、**$x\in f^{-1}(Y-B)$**.** ∎

5. $\underline{f(f^{-1}(B)) \subseteq B}$

(証明) $\subseteq$) を示す。

任意の $y \in f(f^{-1}(B))$ **に対し、**$f(f^{-1}(B))$ **の定義より、**
$f(x) = y$ **となる** $x \in f^{-1}(B)$ **が存在する。**
$f^{-1}(B)$ **の定義より、**$x \in f^{-1}(B)$ **ならば** $y = f(x) \in B$. ∎



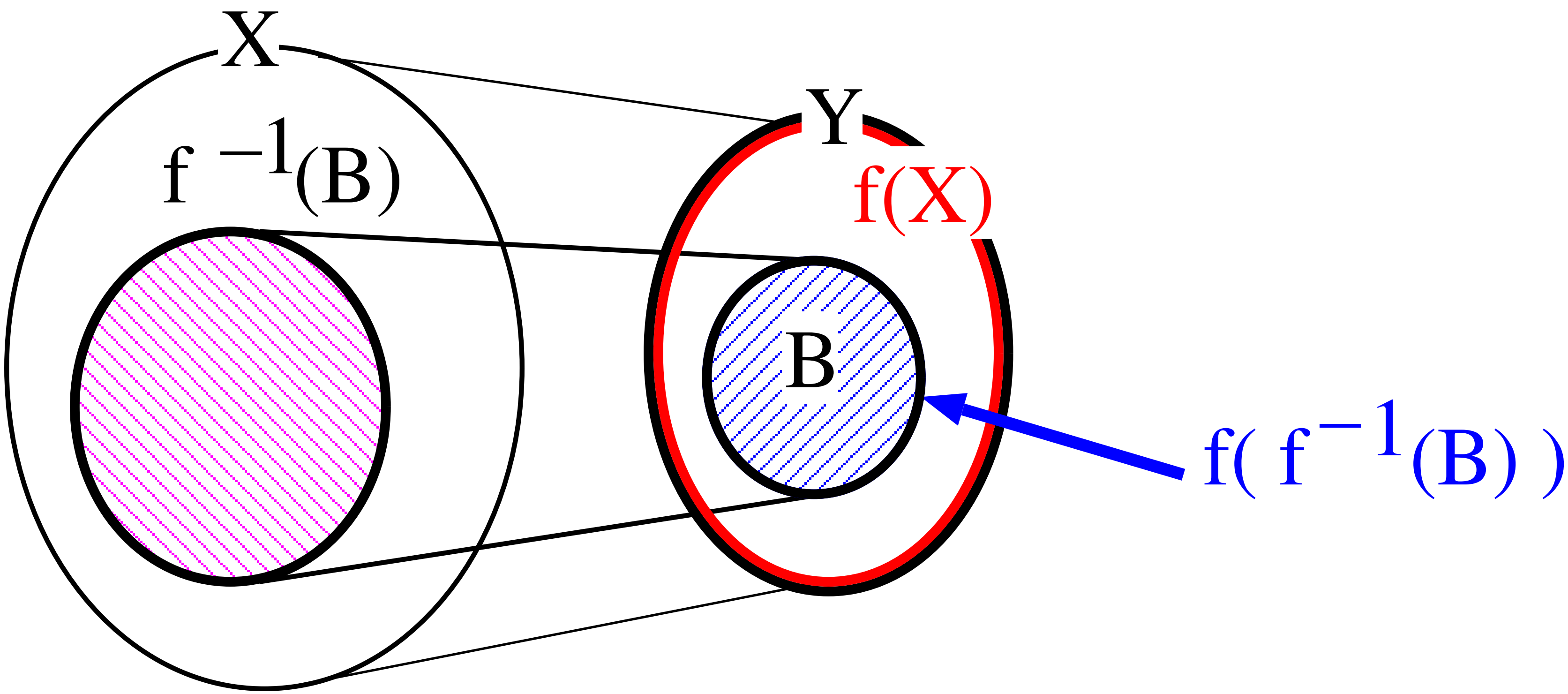
$f : X \longrightarrow Y$

(f が全射である場合は、$f(f^{-1}(B)) = B$ が成り立つ) :

$\supseteq$) を示す。任意の $y \in B \subseteq Y$ に対し、f は全射であるから、
$f(x) = y \in B$ となる $x \in X$ が存在する。

$f^{-1}(B)$ の定義より、$f(x) \in B$ ならば $x \in f^{-1}(B)$.

さらに、$f(f^{-1}(B))$ の定義より、$x \in f^{-1}(B)$ ならば $f(x) \in f(f^{-1}(B))$
である。ゆえに、$y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. ∎



References

[1] 尾関和彦, (情報技術者のための)離散系数学入門, 共立出版, 2004.

[2] 尾関和彦, 太田和夫, 國廣昇, “離散数学第一” 及び “離散数学第一演習問題集” 電気通信大学情報通信工学科講義資料, 2004.

[3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 2003.

[4] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 2003.

[5] S. Lipschutz著, 成嶋弘監訳, 離散数学(コンピュータサイエンスの基礎数学), オーム社, 2004(H16).

[6] 小倉久和, 情報の基礎離散数学(– 演習を中心とした –), 近代科学社, 2006.

[7] 町田元, 横森貴, 計算機数学, 森北出版, 1990.