離散数学

— 1. 集合と写像 —
— 1.1 集合 —

2007.10.10

栗原正純 kuri@ice.uec.ac.jp

例 34.　(包除原理)

有限集合 X, Y, Z を有限集合 U の部分集合とするとき，以下が成り立つことを示せ。

1. $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$

2. $$\begin{aligned} |X \cap Y| &= |U| - |X^c| - |Y^c| + |X^c \cap Y^c| \\ &= |X| + |Y| + |X^c \cap Y^c| - |U| \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} |X \cap Y \cap Z| = |U| - |X^c| - |Y^c| - |Z^c| \\ + |X^c \cap Y^c| + |X^c \cap Z^c| + |Y^c \cap Z^c| - |X^c \cap Y^c \cap Z^c| \end{aligned}$$

4. $|X^c \cap Y^c \cap Z| = |Z| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$

5. **1 から 250 までの自然数の中で、2 でも 7 でも割り切れず、かつ 5 で割り切れるものは、いくつあるか。(包除原理を用いて考えよ。)**

1. $\underline{|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z|}$

$\underline{-|X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|}$

(解答)

$$\begin{aligned} |(X \cup Y) \cup Z| &= |(X \cup Y)| + |Z| - |(X \cup Y) \cap Z| \\ &= |X| + |Y| - |X \cap Y| + |Z| - |(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)| \\ &= |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| \\ &\quad -|X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|. \end{aligned}$$

ここで、$(X \cap Z) \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap (Z \cap Z) = X \cap Y \cap Z$ **より,**

$$\begin{aligned} |(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)| &= |X \cap Z| + |Y \cap Z| - |(X \cap Z) \cap (Y \cap Z)| \\ &= |X \cap Z| + |Y \cap Z| - |X \cap Y \cap Z| \end{aligned}$$

となることを最後の等式に用いた． ∎

2. $|X \cap Y| = |U| - |X^c| - |Y^c| + |X^c \cap Y^c| = |X| + |Y| + |X^c \cap Y^c| - |U|$

(解答) 補集合の定義とド・モルガンの法則より,

$$U = (X \cup Y) \cup (X \cup Y)^c = (X \cup Y) \cup (X^c \cap Y^c)$$

$$U = X \cup X^c,\ U = Y \cup Y^c.$$

これらより、

$$|U| = |X \cup Y| + |X^c \cap Y^c| = |X| + |Y| - |X \cap Y| + |X^c \cap Y^c|.$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} |X \cap Y| &= |X| + |Y| + |X^c \cap Y^c| - |U| \\ &= |U| - |X^c| - |Y^c| + |X^c \cap Y^c|. \end{aligned}$$

ここで, $|U| = |X| + |X^c|$, $|U| = |Y| + |Y^c|$ **より,**

$|X| + |Y| = 2|U| - |X^c| - |Y^c|$ **となることを用いた.** ∎

3. $\underline{|X\cap Y\cap Z| = |U| - |X^c| - |Y^c| - |Z^c|}$

$$\underline{+|X^c\cap Y^c| + |X^c\cap Z^c| + |Y^c\cap Z^c| - |X^c\cap Y^c\cap Z^c|}$$

(解答) **前記の結果** $|X\cap Y| = |U| - |X^c| - |Y^c| + |X^c\cap Y^c|$ **より，**

$$|(X\cap Y)\cap Z| = |U| - |(X\cap Y)^c| - |Z^c| + |(X\cap Y)^c\cap Z^c|.$$

そこで、

$$|(X\cap Y)^c| = |X^c\cup Y^c| = |X^c| + |Y^c| - |X^c\cap Y^c|$$

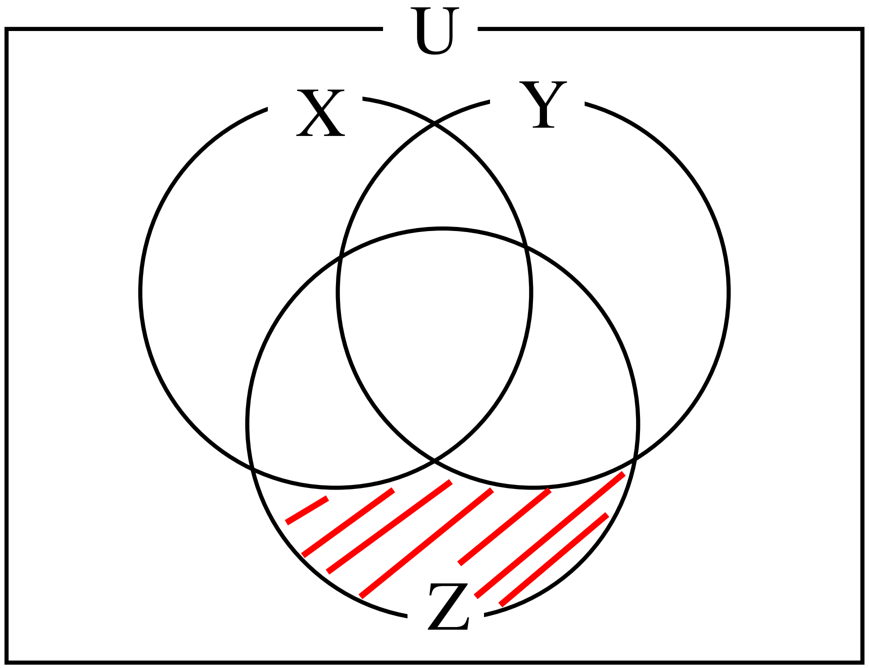
と

$$\begin{aligned}|(X\cap Y)^c\cap Z^c| &= |(X^c\cup Y^c)\cap Z^c| = |(X^c\cap Z^c)\cup(Y^c\cap Z^c)|\\ &= |X^c\cap Z^c| + |Y^c\cap Z^c| - |(X^c\cap Z^c)\cap(Y^c\cap Z^c)|\\ &= |X^c\cap Z^c| + |Y^c\cap Z^c| - |X^c\cap Y^c\cap Z^c|\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}|(X\cap Y)\cap Z| &= |U| - |X^c| - |Y^c| - |Z^c|\\ &\quad +|X^c\cap Y^c| + |X^c\cap Z^c| + |Y^c\cap Z^c| - |X^c\cap Y^c\cap Z^c|. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

4. $|X^c \cap Y^c \cap Z| = |Z| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$



5. $|X^c \cap Y^c \cap Z| = |Z| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$

(解答) **集合** $X \cup Y \cup Z$ **は共通部分もたない部分集合の和集合**

$$(X \cup Y) \cup Z = ((X^c \cap Y^c) \cap Z) \cup (X \cup Y)$$

と書ける。これより、

$$|X \cup Y \cup Z| = |X^c \cap Y^c \cap Z| + |X \cup Y| = |X^c \cap Y^c \cap Z| + |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

そして、 $|X \cup Y \cup Z|$ **の公式を用いて、**

$$|X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$
$$= |X^c \cap Y^c \cap Z| + |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

となる。これを整理すると、

$$|X^c \cap Y^c \cap Z| = |Z| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$

となる。 ∎

6. **1から250までの自然数の中で、2 でも 7 でも割り切れず、かつ 5 で割り切れるものは、いくつあるか。**

(解答)

$U = \{1, \ldots, 250\}$,

$X = \{x \mid x \in U, x$ **は2で割り切れる**$\}$,

$Y = \{y \mid y \in U, y$ **は7で割り切れる**$\}$,

$Z = \{z \mid z \in U, z$ **は5で割り切れる**$\}$.

このとき，求める集合は $X^c \cap Y^c \cap Z$ **と表すことができる．**

$|Z| = 50$, $|X \cap Z| = 25$, $|Y \cap Z| = 7$, $|X \cap Y \cap Z| = 3$.

ゆえに， $|X^c \cap Y^c \cap Z| = |Z| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$ **より，**

$|X^c \cap Y^c \cap Z| = 50 - 25 - 7 + 3 = 21$ **となる。** ∎

包除原理 $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ に関し，

一般に、集合 $X_1, \ldots, X_n$ に対し、以下が成り立つ。

訂正

$$|X_1 \cup \cdots \cup X_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |\underbrace{X_{i_1} \cancel{\cup} \cdots \cancel{\cup} X_{i_k}}_{X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_k}}|.$$

また、直積集合の $|X \times Y| = |X| \times |Y|$ に関しても、一般に、

$$|X_1 \times \cdots \times X_n| = |X_1| \times \cdots \times |X_n|$$

が成り立つ。

References

[1] 尾関和彦, (情報技術者のための) 離散系数学入門, 共立出版, 2004.

[2] 尾関和彦, 太田和夫, 國廣昇, "離散数学第一" 及び "離散数学第一演習問題集" 電気通信大学情報通信工学科講義資料, 2004.

[3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 2003.

[4] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 2003.

[5] S. Lipschutz著, 成嶋弘監訳, 離散数学 (コンピュータサイエンスの基礎数学), オーム社, 2004(H16).

[6] 小倉久和, 情報の基礎離散数学 (– 演習を中心とした –), 近代科学社, 2006.

[7] 町田元, 横森貴, 計算機数学, 森北出版, 1990.