離散数学

— 1. 集合と写像 —
— 1.1 集合 —

2007, 10, 3

栗原正純 kuri@ice.uec.ac.jp

定理 17.　任意の集合 $X,\ Y,\ Z$ に対し、以下の等式が成立する。

1. $X \cup Y = Y \cup X$,
   $X \cap Y = Y \cap X$. (交換律)
2. $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$,
   $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$. (結合律)
3. $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$,
   $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$. (分配律)
4. $X \cup X = X$,
   $X \cap X = X$. (ベキ等律)
5. $(X \cup Y) \cap X = X$,
   $(X \cap Y) \cup X = X$. (吸収律)

1. $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$ **(分配律)**

(証明) $A :=$ **左辺**, $B :=$ **右辺 とする.**

まず, $A \subseteq B$ **を示す:**

任意の $x \in A$ **に対し,** $x \in X \cup Y$ **かつ** $x \in Z$**.**

このとき, $x \in X$ **または** $x \in Y$ **である.**

そこで, i) $x \in X$ **かつ** $x \in Z$ **ならば** $x \in X \cap Z$ **より,** $x \in B$**.**

または, ii) $x \in Y$ **かつ** $x \in Z$ **ならば** $x \in Y \cap Z$ **より,** $x \in B$**.**

したがって, 常に $x \in B$**. ゆえに,** $A \subseteq B$**.**

次に, $A \supseteq B$ **を示す:**

任意の $x \in B$ **に対し,** $x \in X \cap Z$ **または** $x \in Y \cap Z$**.**

そこで, i) $x \in X \cap Z$ **ならば** $x \in X \cup Y$ **かつ** $x \in Z$ **より,** $x \in A$**.**

または, ii) $x \in Y \cap Z$ **ならば** $x \in X \cup Y$ **かつ** $x \in Z$ **より,** $x \in A$**.**

したがって, 常に $x \in A$ **が成り立つ. ゆえに,** $A \supseteq B$**.**

以上より, $A = B$ **が成り立つ.** ∎

2. $\underline{(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)}$ **(分配律)**

(証明) $A :=$ **左辺**, $B :=$ **右辺 とする.**

まず, $A \subseteq B$ **を示す:**

任意の $x \in A$ **に対し,** $x \in X \cap Y$ **または** $x \in Z$.

そこで, i) $x \in X \cap Y$ **ならば** $x \in X \cup Z$ **かつ** $x \in Y \cup Z$ **より,** $x \in B$.

または, ii) $x \in Z$ **ならば** $x \in X \cup Z$ **かつ** $x \in Y \cup Z$ **より,** $x \in B$.

したがって, 常に $x \in B$. **ゆえに,** $A \subseteq B$.

次に, $A \supseteq B$ **を示す:**

任意の $x \in B$ **に対し,** $x \in X \cup Z$ **かつ** $x \in Y \cup Z$.

そこで, i) $x \in Z$ **ならば, 明らかに** $x \in A$.

または, ii) $x \notin Z$ **ならば** $x \in X$ **かつ** $x \in Y$ **より,** $x \in X \cap Y$.

ゆえに, $x \in A$.

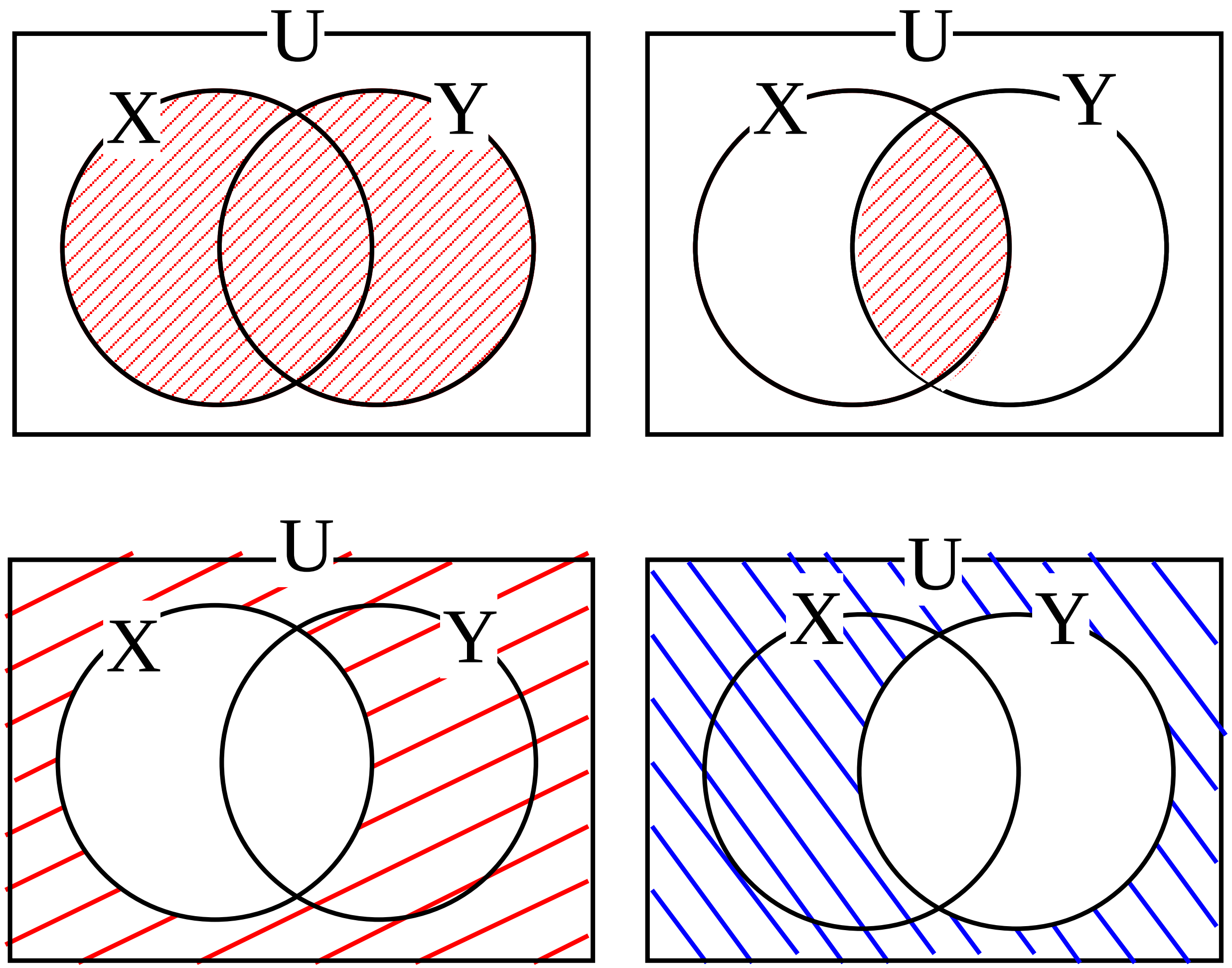
したがって, 常に $x \in A$. **ゆえに,** $A \supseteq B$.

以上より, $A = B$ **が成り立つ.** ∎

定理 18. **(ド・モルガンの法則)**
和集合, 共通集合, 補集合の間には, 以下のような関係がある.

1. $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$.

2. $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$.



2. $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$.

(証明)

$\subseteq$) 任意の $x \in (X \cap Y)^c$ に対し，$x \notin X \cap Y$ であるから，

$x \notin X$ または $x \notin Y$ である.

すなわち，$x \in X^c$ または $x \in Y^c$ であるから $x \in X^c \cup Y^c$.

ゆえに，$(X \cap Y)^c \subseteq X^c \cup Y^c$ が成り立つ.

$\supseteq$) 任意の $x \in X^c \cup Y^c$ に対し，$x \in X^c$ または $x \in Y^c$ である.

$x \in X^c$ ならば $x \notin X$ である．すなわち、$x \notin X \cap Y$.

同様に，$x \in Y^c$ ならば $x \notin Y$ である．すなわち、$x \notin X \cap Y$.

したがって，$x \in (X \cap Y)^c$.

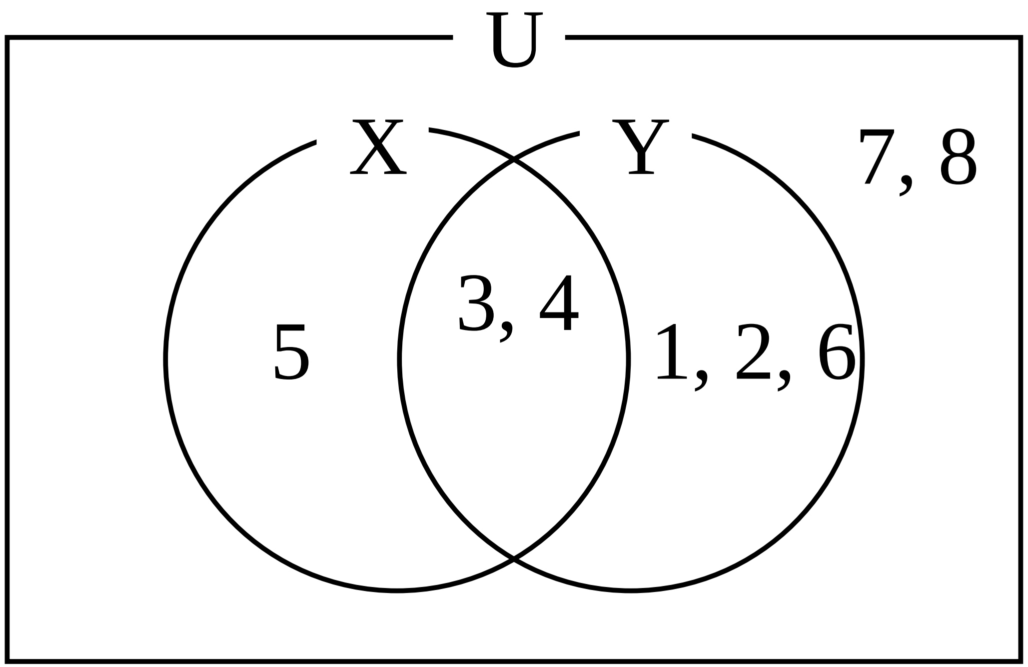
ゆえに，$(X \cap Y)^c \supseteq X^c \cup Y^c$ が成り立つ.

以上より、$(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$. ∎

例 19.　(ド・モルガンの法則)
全体集合を $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ **とする.**
そして, $X = \{3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 6\} \subseteq U$ **とする.**
このとき, $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $X \cap Y = \{3, 4\}$,
$X^c = \{1, 2, 6, 7, 8\}$, $Y^c = \{5, 7, 8\}$.
これより、

$$(X \cup Y)^c = \{7, 8\} = X^c \cap Y^c,$$

$$(X \cap Y)^c = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\} = X^c \cup Y^c.$$



例 20. **任意の集合 $X,\ Y,\ Z$ に対し、以下が成り立つことを示せ。**

1. $(X \cup Y) - Z = (X - Z) \cup (Y - Z)$
2. $(X - Y) - Z = X - (Y \cup Z)$
3. $X - (Y - Z) = (X - Y) \cup (Y \cap Z)$

1. $\underline{(X \cup Y) - Z = (X - Z) \cup (Y - Z)}$

(証明) $A :=$ **左辺，** $B :=$ **右辺 とする．差集合の定義より，**

$A = (X \cup Y) \cap Z^c$, $X - Z = X \cap Z^c$, $Y - Z = Y \cap Z^c$ **に注意する.**

$\subseteq$ **) 任意の** $x \in A$ **に対し，** $x \in X \cup Y$ **かつ** $x \in Z^c$**.**

$x \in X$ **または** $x \in Y$ **である.**

i) $x \in X$ **かつ** $x \in Z^c$ **ならば,** $x \in X \cap Z^c = X - Z$ **より,** $x \in B$**.**

ii) $x \in Y$ **かつ** $x \in Z^c$ **ならば,** $x \in Y \cap Z^c = Y - Z$ **より,** $x \in B$**.**

ゆえに，常に， $x \in B$ **であるから,** $A \subseteq B$**.**

$\supseteq$ **)** $A = (X \cup Y) \cap Z^c$ **であるから，**

任意の $x \in B$ **に対し，** $x \in X - Z$ **または** $x \in Y - Z$**.**

i) $x \in X - Z = X \cap Z^c$ **ならば,** $x \in X$ **かつ** $x \in Z^c$ **より，** $x \in A$**.**

ii) $x \in Y - Z = Y \cap Z^c$ **ならば,** $x \in Y$ **かつ** $x \in Z^c$ **より，** $x \in A$**.**

ゆえに，常に， $x \in A$ **であるから,** $A \supseteq B$**.**

以上より， $A = B$ **が成り立つ．** ∎

$(X \cup Y) - Z = (X - Z) \cup (Y - Z)$

(別証明)

$$\begin{aligned}(X \cup Y) - Z &= (X \cup Y) \cap Z^c && \textbf{(差集合の定義より)}\\ &= (X \cap Z^c) \cup (Y \cap Z^c) && \textbf{(分配律より)}\\ &= (X - Z) \cup (Y - Z) && \textbf{(差集合の定義より)}.\end{aligned}$$

2. $\underline{(X - Y) - Z = X - (Y \cup Z)}$

(証明)

$$\begin{aligned}
(X - Y) - Z &= (X \cap Y^c) \cap Z^c && \textbf{(差集合の定義より)} \\
&= X \cap (Y^c \cap Z^c) && \textbf{(結合律より)} \\
&= X \cap (Y \cup Z)^c && \textbf{(ド・モルガンの法則より)} \\
&= X - (Y \cup Z). && \textbf{(差集合の定義より)}
\end{aligned}$$

3. $\underline{X - (Y - Z) = (X - Y) \cup (Y \cap Z)}$

(証明)

$$\begin{aligned}
X - (Y - Z) &= X \cap (Y \cap Z^c)^c && \textbf{(差集合の定義より)} \\
&= X \cap (Y^c \cup Z) && \textbf{(ド・モルガンの法則より)} \\
&= (X \cap Y^c) \cup (X \cap Z) && \textbf{(分配律より)} \\
&= (X - Y) \cup (X \cap Z). && \textbf{(差集合の定義より)}
\end{aligned}$$

定義 21. 集合 $X_1, \ldots, X_n$ に対し、以下を定義する。

1. ($X_1, \ldots, X_n$ の**和集合**)

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i := \{x \mid \text{ある } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ に対し、} \; x \in X_i\}.$$

2. ($X_1, \ldots, X_n$ の**積集合**，**共通集合**)

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i := \{x \mid \text{すべての } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ に対し、} \; x \in X_i\}.$$

（例） $X_1 = \{1, 2\}$，$X_2 = \{2, 3\}$ とする。このとき，

$\bigcup_{i=1}^{2} X_i = \{1, 2, 3\}$，

$\bigcap_{i=1}^{2} X_i = \{2\}$.

定理 22. 任意の自然数 n と、任意の n 個の集合 $X_1, \ldots, X_n$ に対し，以下の等式が成り立つ。

1.
$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cup \cdots \cup X_n$$

2.
$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap \cdots \cap X_n$$

2. $\underline{\bigcap_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap \cdots \cap X_n}$

(証明)

集合の数 n に関する数学的帰納法で示す。

$n = 1$**のとき、**$X_1 = X_1$.

$n = k$**のとき、**$\cap_{i=1}^{k} X_i = X_1 \cap \cdots \cap X_k$ **が成り立つと仮定する。**

$n = k+1$**のとき、**$\cap_{i=1}^{k+1} X_i = X_1 \cap \cdots \cap X_{k+1}$**が成り立つことを示そう。**

そのために、まず、$\cap_{i=1}^{k+1} X_i = (\cap_{i=1}^{k} X_i) \cap X_{k+1}$**が成り立つことを示す。**

$\subseteq$) $x \in \cap_{i=1}^{k+1} X_i$ **とする。**

集合$\cap_{i=1}^{n} X_i$**の定義より、すべての**$i \in \{1, \ldots, k+1\}$**に対し、**$x \in X_i$.

したがって、$x \in \cap_{i=1}^{k} X_i$ **かつ** $x \in X_{k+1}$ **である。**

すなわち、$x \in \cap_{i=1}^{k} X_i \cap X_{k+1}$.

ゆえに、$\cap_{i=1}^{k+1} X_i \subseteq (\cap_{i=1}^{k} X_i) \cap X_{k+1}$.

$\supseteq$) $x \in (\cap_{i=1}^{k} X_i) \cap X_{k+1}$ とする。

$x \in \cap_{i=1}^{k} X_i$ より、すべての $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対し、$x \in X_i$ であり、さらに、 $x \in X_{k+1}$ が成り立つ。

したがって、すべての $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ に対し、$x \in X_i$ より、$x \in \cap_{i=1}^{k+1} X_i$ である。

ゆえに、$\cap_{i=1}^{k+1} X_i \supseteq (\cap_{i=1}^{k} X_i) \cap X_{k+1}$.

以上より、$\cap_{i=1}^{k+1} X_i = (\cap_{i=1}^{k} X_i) \cap X_{k+1}$ が成り立つ.

ゆえに、$n = k$ の仮定より,

$\cap_{i=1}^{k+1} X_i = (\cap_{i=1}^{k} X_i) \cap X_{k+1} = X_1 \cap \cdots \cap X_k \cap X_{k+1}$

が成り立つ。

以上のことから，数学的帰納法により，任意の自然数 n に対して

$\cap_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap \cdots \cap X_n$

は成り立つ．∎

定理 23. **(拡張されたド・モルガンの法則)**
任意の集合 $X_1, \ldots, X_n$ **に対し, 以下が成り立つ.**

1. $$\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} X_i^c.$$

2. $$\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} X_i^c.$$

定義 24. $\mathcal{S}$ を集合族(すなわち、集合を要素とする集合)とする。

1. (**和集合**)

$$\bigcup_{X \in \mathcal{S}} X := \{x \mid \text{ある } X \in \mathcal{S} \text{ に対し}, x \in X\}.$$

2. (**積集合**, **共通集合**)

$$\bigcap_{X \in \mathcal{S}} X := \{x \mid \text{すべての } X \in \mathcal{S} \text{ に対し}, x \in X\}.$$

(集合族 $\mathcal{S}$ の要素を集合 $X_1, \ldots, X_n$ とすれば $\mathcal{S} = \{X_1, \ldots, X_n\}$.)

この記法を用いると、前定理は以下のように記述できる.

定理 25. (拡張されたド・モルガンの法則)
任意の集合 $X_1, \ldots, X_n$ に対し, 以下が成り立つ.

1. $(\cup_{X \in \mathcal{S}} X)^c = \cap_{X \in \mathcal{S}} X^c$.
2. $(\cap_{X \in \mathcal{S}} X)^c = \cup_{X \in \mathcal{S}} X^c$.

定義 26. （ n 重対, **順序対** ）

“もの” $x_1, \ldots, x_n$ に対し、$(x_1, \ldots, x_n)$ を $x_1, \ldots, x_n$ の

n **重対 (じゅうつい)** という。

特に、(x_1, x_2) を x_1 と x_2 の **順序対** という。($(x_1, x_2) \neq (x_2, x_1)$)

定義 27. (直積)

$X_1, \ldots, X_n$ を集合とする。

$$X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}$$

を $X_1, \ldots, X_n$ の **直積**, または **直積集合** という。

$X_1 = \cdots = X_n = X$ のとき、$X^n := X_1 \times \cdots \times X_n$ と表す。

(注意) もし，$X_i = \phi$ ならば $X_1 \times \cdots \times X_n = \phi$.

なぜなら，どのような n 重対 $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ に対しても，$x_i \notin X_i = \phi$ であるから $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \notin X_1 \times \cdots \times X_i \times \cdots \times X_n$.

例 28. （直積集合）

1. $X = \{2,1\}$, $Y = \{3,2,4\}$ のとき、$X \times Y$ を外延的記法で表せ。

2. $\{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbf{N}^2, x^2 + y^2 \leq 8\}$ を外延的記法で表せ。

3. $\{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbf{N}^3, x + y + z = 4\}$ を外延的記法で表せ。

4. 任意の X, Y, Z に対し、以下が成り立つことを示せ。

$$(X \cap Z) \times Y = (X \times Y) \cap (Z \times Y).$$

5. X, Y, Z, W を集合とする。以下が成り立つことを証明せよ。

$$(X \cap Y) \times (Z \cap W) = (X \times Z) \cap (Y \times W)$$

1. $X = \{2, 1\}$, $Y = \{3, 2, 4\}$ **のとき、$X \times Y$ を外延的記法で表せ。**

(解答) $X \times Y = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$.

2. $\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{N}^2, x^2 + y^2 \leq 8\}$ **を外延的記法で表せ。**

(解答) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

3. $\{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbf{N}^3, x + y + z = 4\}$ **を外延的記法で表せ。**

(解答) $\{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$.

4. $(X \cap Z) \times Y = (X \times Y) \cap (Z \times Y)$

(解答)

$\subseteq$) 任意の$(a, b) \in (X \cap Z) \times Y$に対し，

$a \in X$ かつ $a \in Z$ かつ $b \in Y$ である．

したがって，$(a, b) \in X \times Y$ かつ $(a, b) \in Z \times Y$．

ゆえに，$(a, b) \in (X \times Y) \cap (Z \times Y)$．

$\supseteq$) 上記の逆を示せばよい．

任意の $(a, b) \in (X \times Y) \cap (Z \times Y)$ に対し，

$(a, b) \in X \times Y$ かつ $(a, b) \in Z \times Y$．

すなわち，$a \in X$ かつ $a \in Z$．さらに，$b \in Y$．

ゆえに，$(a, b) \in (X \cap Z) \times Y$．

以上より，左辺$=$右辺. ∎

5. $\underline{(X \cap Y) \times (Z \cap W) = (X \times Z) \cap (Y \times W)}$

(解答) $\subseteq$ **)** **任意の** $(a,b) \in (X \cap Y) \times (Z \cap W)$ **に対し，**

$a \in X \cap Y$ **かつ** $b \in Z \cap W$.

したがって，"$a \in X$ **かつ** $a \in Y$" **かつ** "$b \in Z$ **かつ** $b \in W$."

順序を換え，"$a \in X$ **かつ** $b \in Z$" **かつ** "$a \in Y$ **かつ** $b \in W$."

ゆえに，$(a,b) \in X \times Z$ **かつ** $(a,b) \in Y \times W$ **より，**

$(a,b) \in (X \times Z) \cap (Y \times W)$.

$\supseteq$ **)** **上記の逆を示せばよい．任意の** $(a,b) \in (X \times Z) \cap (Y \times W)$ **に対し，**

$(a,b) \in X \times Z$ **かつ** $(a,b) \in Y \times W$.

すなわち，"$a \in X$ **かつ** $b \in Z$" **かつ** "$a \in Y$ **かつ** $b \in W$."

順序を換え，"$a \in X$ **かつ** $a \in Y$" **かつ** "$b \in Z$ **かつ** $b \in W$."

ゆえに，$a \in X \cap Y$ **かつ** $b \in Z \cap W$ **より，**

$(a,b) \in (X \cap Y) \times (Z \cap W)$.

以上より，左辺$=$**右辺.** ∎

(例)

X, Y, Z, W を集合とする。
以下の等式が正しければ証明し、そうでなければ反例を挙げよ。

1. $(X \cup Y) \times (Z \cup W) = (X \times Z) \cup (Y \times W)$
2. $(X - Y) \times (Z - W) = (X \times Z) - (Y \times W)$
3. $(X \ominus Y) \times (Z \ominus W) = (X \times Z) \ominus (Y \times W)$
4. $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$
5. $(X - Y) \times Z = (X \times Z) - (Y \times Z)$
6. $(X \ominus Y) \times Z = (X \times Z) \ominus (Y \times Z)$

定義 29. **(べき集合)**

X を集合とする。

X の部分集合の全体からなる集合を X の<u>ベキ集合</u>とよび、2^X と表す:

$2^X := \{Y \mid Y \subseteq X\}$.

注意

ベキ集合 2^X は、X 自身と 空集合 ϕ を要素として含む。

冪集合, 巾集合, power set

例 30. **(べき集合)**

1. $X = \{a\}$ とするとき、2^X を外延的記法で表せ。
2. $X = \{a, b\}$ とするとき、2^X を外延的記法で表せ。
3. $X = \{a, b, c\}$ とするとき、2^X を外延的記法で表せ。
4. $X = \{\phi, \{a\}\}$ とするとき、2^X を外延的記法で表せ。
5. $\{a\} \neq \{\{a\}\}$ であることに注意する。
6. $2^{\{\phi\}}$ を外延的記法で表せ。
   (ヒント: $X = \{a\}$ の a を ϕ に置き換えて考える。)
7. $2^{2^{\{\phi\}}}$ を外延的記法で表せ。
8. $X = \{a, b\}$ とするとき、$2^X \times X$ を外延的記法で表せ.

1. $\underline{X = \{a\}}$

(解答) $2^X = \{\phi, X\}$.

2. $\underline{X = \{a, b\}}$

(解答) $2^X = \{\phi, \{a\}, \{b\}, X\}$.

3. $\underline{X = \{a, b, c\}}$

(解答) $2^X = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, X\}$.

4. $\underline{X = \{\phi, \{a\}\}}$

（解答） $2^X = \{\phi, \{\phi\}, \{\{a\}\}, X\}$.

6. $\underline{2^{\{\phi\}}}$

（解答） $2^{\{\phi\}} = \{\phi, \{\phi\}\}$.

7. $\underline{2^{2^{\{\phi\}}}}$

（解答） $2^{2^{\{\phi\}}} = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$.

8. $X = \{a, b\}$ **とするとき、$2^X \times X$ を外延的記法で表せ.**

(解答) $2^X = \{\phi, \{a\}, \{b\}, X\}$ **より,**

$$\begin{aligned} 2^X \times X = \{&(\phi, a), (\{a\}, a), (\{b\}, a), (X, a), \\ &(\phi, b), (\{a\}, b), (\{b\}, b), (X, b)\}. \end{aligned}$$

定義 31. (有限集合, 無限集合)
有限個の要素からなる集合を<u>有限集合</u>という。それ以外の集合を<u>無限集合</u>という。有限集合 X の要素数を $|X|$ と表す。

(注意)

1. 空集合 ϕ は有限集合であり、$|\phi| = 0$ である。
2. 有限集合 X, Y に対し、$X \cap Y = \phi$ ならば $|X \cup Y| = |X| + |Y|$ が成り立つ。
3. 一般に、有限集合 $X_1, \ldots, X_n$ に対し、$X_i \cap X_j = \phi \ (i \neq j)$ ならば、$|X_1 \cup \cdots \cup X_n| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$ が成り立つ。
4. 上記のことから、有限集合の要素数を数え上げる1つの方法として、それを互いに共通部分をもたない、いくつかの部分集合に分割し、それぞれの要素数を数えて足し合わせればよい。

定理 32. (**包除原理**)

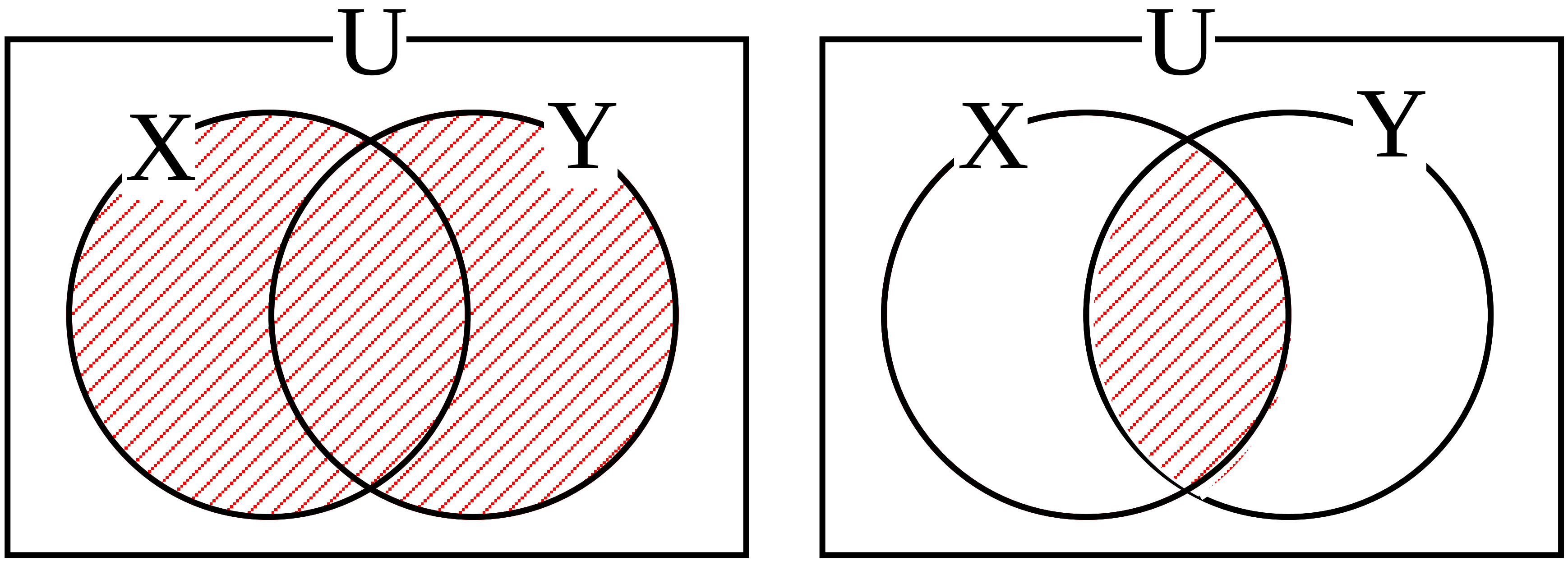
有限集合 X, Y **に対し、以下の等式が成り立つ。**

1. $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$. (**包除原理**)

   (Principle of inclusion and exclusion)

2. $|X \times Y| = |X| \times |Y|$.

3. $|2^X| = 2^{|X|}$.



1. $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ (**包除原理**)

(**証明**) **互いに共通部分をもたないような部分集合で、集合** X, $X \cup Y$ **を次のように表す。**

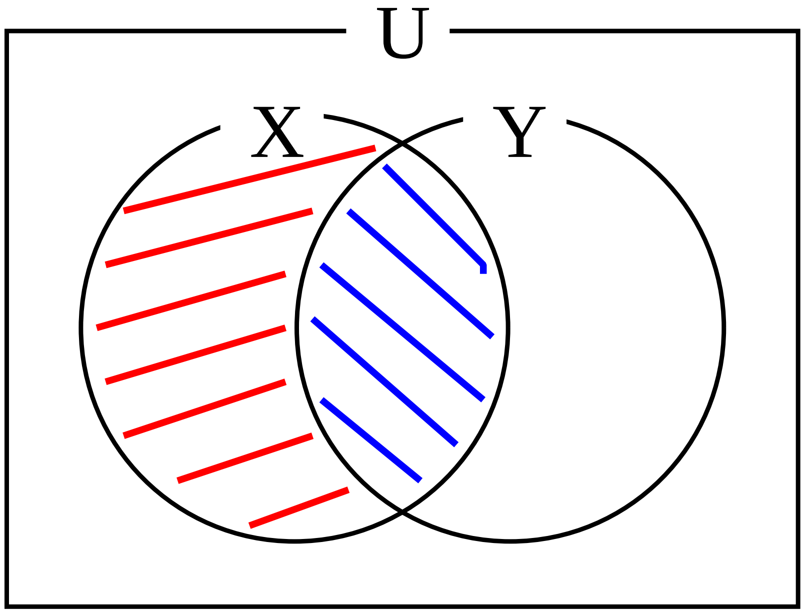
$$X = (X - Y) \cup (X \cap Y), \quad X \cup Y = (X - Y) \cup Y.$$

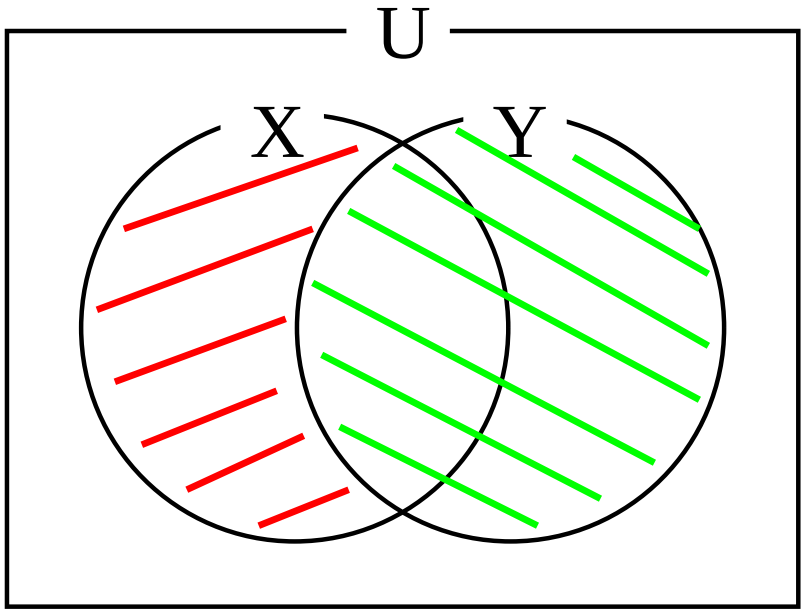
それぞれより、

$$|X| = |X - Y| + |X \cap Y|, \quad |X \cup Y| = |X - Y| + |Y|.$$

これらより、 $|X - Y|$ **の項を消すと、**

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|. \quad \blacksquare$$





2. $|X \times Y| = |X| \times |Y|$

(証明) $X \times Y$ **の要素は、要素** $x \in X$ **と** $y \in Y$ **の順序対** (x, y) **である。**

x **と** y **がとりうる値の個数はそれぞれ** $|X|$ **と** $|Y|$ **である。**

したがって、それらから得られる順序対の全体の個数は $|X| \times |Y|$ **となる。**

ゆえに， $|X \times Y| = |X| \times |Y|$. ∎

3. $|2^X| = 2^{|X|}$

(証明) (考え方)

$X = \{x_1, \ x_2, \ x_3\}$, $|X| = 3$ について考える.

$\{x_1, \ x_2, \ x_3\}$ (b_1, b_2, b_3)	X の部分集合
$(0,0,0)$	$\{ \ \} = \phi$
$(1,0,0)$	$\{x_1\}$
$(0,1,0)$	$\{x_2\}$
$(0,0,1)$	$\{x_3\}$
$(1,1,0)$	$\{x_1, x_2\}$
$(1,0,1)$	$\{x_1, x_3\}$
$(0,1,1)$	$\{x_2, x_3\}$
$(1,1,1)$	$\{x_1, x_2, x_3\}$

$\Rightarrow \quad 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 2^{|X|}$

$\begin{cases} b_i = 1 & \text{ならば要素 } x_i \text{ を部分集合に含める} \\ b_i = 0 & \text{ならば要素 } x_i \text{ を部分集合に含めない} \end{cases}$

(証明) 仮定より、X は有限集合であるから、

$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $|X| = n$ としても、一般性は失われない。

X の部分集合を決める方法として、以下のことを考える。

0 と 1 からなる集合を $B = \{0, 1\}$ とし、その n 重の直積集合を B^n とする。

B^n の要素は、$(b_1, \ldots, b_n)$ という n 重対となる。

そこで、$(b_1, \ldots, b_n)$ を用いて、次のように X の部分集合を定める。

b_i の値が、$\begin{cases} b_i = 1 \text{ ならば要素 } x_i \text{ を部分集合に含める} \\ b_i = 0 \text{ ならば要素 } x_i \text{ を部分集合に含めない} \end{cases}$

この方法により、B^n の要素から過不足なく、X のすべての部分集合を定めることができる。

B^n の要素数は 2^n 個であるから、すべての部分集合の個数も 2^n 個である。

ゆえに、$|2^X| = 2^n = 2^{|X|}$. ∎

(別解) $|2^X| = 2^{|X|}$

n 個の中から k を選び出す組合せの数は $\binom{n}{k} = {}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ である。

したがって、X の部分集合で要素数が k であるものは $\binom{n}{k}$ 個である。

これより、X の部分集合の総数 $|2^X|$ は $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ となる。

すなわち，$|2^X| = 2^n = 2^{|X|}$.

ここで、2項定理 $(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m}$ に

$x = y = 1$ を代入すると、$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n$ が得られる。∎

2項定理 $(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m}$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^3 &= \binom{3}{0} \cdot x^3 + \binom{3}{1} \cdot x^2 y + \binom{3}{2} \cdot x^1 y^2 + \binom{3}{3} \cdot y^3 \\
&= 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 y + 3 \cdot x^1 y^2 + 1 \cdot y^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2^3 = (1+1)^3 &= \binom{3}{0} \cdot 1 + \binom{3}{1} \cdot 1 + \binom{3}{2} \cdot 1 + \binom{3}{3} \cdot 1 \\
&= 1+3+3+1 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

例 33. n個の中からkを選び出す組合せの数 $\binom{n}{k}$ が $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ と表されることは、良く知られている。その式には、割算が含まれていることが分かる。では、その式の値が常に整数になるのは、なぜだろうか。この問題を解くヒントとなる事柄を以下に記載する．

1. 「$k,\ 0 \le k \le n,$ に対し、$\binom{n}{k}$ は整数になる」ことを示せ。
   上記を命題$P(n)$として、nに関する数学的帰納法で証明する方法が考えられる。

2. n個の中からk個を選んで得られる順列の総数は
   $$_nP_k = n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

3. n個の中からk個を選んで得られる組合せの総数は
   $$\binom{n}{k} = {}_nC_k = \frac{_nP_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

4. 「連続する k 個の自然数の積は $k!$ で割り切れる」ことを示せ。
   kに関する数学的帰納法で証明する方法が考えられる。

5. 式 $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ において、その分子 $n!$ は連続する n 個の自然数の積である。それは、連続する $(n-k)$ 個と k 個の自然数の積に分解できる。したがって、上記のことが正しければ、$\frac{n!}{(n-k)!k!}$ の値は、常に整数となることが分かる。

例 34. (包除原理)
有限集合 X, Y, Z を有限集合 U の部分集合とするとき，以下が成り立つことを示せ。

1. $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$
2. $$\begin{aligned} |X \cap Y| &= |U| - |X^c| - |Y^c| + |X^c \cap Y^c| \\ &= |X| + |Y| + |X^c \cap Y^c| - |U| \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} |X \cap Y \cap Z| = |U| - |X^c| - |Y^c| - |Z^c| \\ + |X^c \cap Y^c| + |X^c \cap Z^c| + |Y^c \cap Z^c| - |X^c \cap Y^c \cap Z^c| \end{aligned}$$
4. $|X^c \cap Y^c \cap Z| = |Z| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$
5. 1 から 250 までの自然数の中で、2 でも 7 でも割り切れず、かつ 5 で割り切れるものは、いくつあるか。(包除原理を用いて考えよ。)

1. $\underline{|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z|}$

$\underline{-|X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|}$

(解答)

$$
\begin{aligned}
|(X \cup Y) \cup Z| &= |(X \cup Y)| + |Z| - |(X \cup Y) \cap Z| \\
&= |X| + |Y| - |X \cap Y| + |Z| - |(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)| \\
&= |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| \\
&\quad -|X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.
\end{aligned}
$$

ここで、 $(X \cap Z) \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap (Z \cap Z) = X \cap Y \cap Z$ **より,**

$$
\begin{aligned}
|(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)| &= |X \cap Z| + |Y \cap Z| - |(X \cap Z) \cap (Y \cap Z)| \\
&= |X \cap Z| + |Y \cap Z| - |X \cap Y \cap Z|
\end{aligned}
$$

となることを最後の等式に用いた．∎

References

[1] 尾関和彦, (情報技術者のための)離散系数学入門, 共立出版, 2004.

[2] 尾関和彦, 太田和夫, 國廣昇, “離散数学第一” 及び “離散数学第一演習問題集” 電気通信大学情報通信工学科講義資料, 2004.

[3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 2003.

[4] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 2003.

[5] S. Lipschutz 著, 成嶋弘監訳, 離散数学 (コンピュータサイエンスの基礎数学), オーム社, 2004(H16).

[6] 小倉久和, 情報の基礎離散数学 (– 演習を中心とした –), 近代科学社, 2006.

[7] 町田元, 横森貴, 計算機数学, 森北出版, 1990.