

離散数学

— 1. 集合と写像 —

— 1.1 集合 —

1.1 集合

定義 1. (集合)

1. 次のような性質をもつ, “もの” の集まりを 集合 という.
 - i. あるものが集合に属するか, どうか, 明確に判断できる.
 - ii. 集合に属する 2 つのものが, 同一であるかどうか判断できる.
2. 集合を構成するものを, その集合の 要素 (あるいは 元 (げん)) という.
3. もの x が, 集合 X の 要素である ことを, x は X に 属する といい,
 $x \in X$ または $X \ni x$ と表す.
(x は X に 含まれる, または, X は x を 含む)
 $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_n \in X$ を $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ と略記する.

4. もの x が, 集合 X の 要素でない ことを, $x \notin X$ または $X \not\ni x$ と表し,
 x は X に 属さない という.

(x は X に 含まれない, または, X は x を 含まない)

5. 集合を要素とする集合を 集合族 という.

定義 2. (集合の記法)

1. 要素 $x_1, x_2, \dots, x_n$ からなる集合を $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ と表す. (外延的記法)
2. $P(x)$ を x に関する条件とする.
 $P(x)$ を満たす x を要素とし、かつ、そのような x だけを要素とする集合を $\{x \mid P(x)\}$ と表す. (内延的記法)
3. 複数の条件 $P_1(x), \dots, P_n(x)$ があるとき、 $P_1(x), \dots, P_n(x)$ をすべて満たす x を要素とし、かつ、そのような x だけを要素とする集合を $\{x \mid P_1(x), \dots, P_n(x)\}$ と表す。
4. X を集合とするとき、 $\{x \mid x \in X, P(x)\}$ を $\{x \mid P(x)\}$ と略記する。

注意 3. (集合の記法)

1. 中カッコ “ $\{$ ”, “ $\}$ ” を用いる。要素を コンマ “ $,$ ” で区切る。
2. $\{x \mid P(x)\}$ の中の x は、カッコ “ $\{$ ” と “ $\}$ ” の中だけで通用する変数。したがって、 $\{x \mid P(x)\} = \{y \mid P(y)\} = \{z \mid P(z)\}$ 。

定義 4. (空集合)

要素をもたない集合を空(くう)集合とよび、記号 ϕ (ファイ) で表す。

注意 5. (空集合)

1. 空集合 ϕ と集合 $\{\phi\}$ は異なる.
2. ϕ は要素をもたない集合 (0 個の要素をもつ集合).
3. $\{\phi\}$ は ϕ という要素をもつ集合 (1 個の要素をもつ集合).
4. 空集合を外延的記法で表せば、 $\{ \}$ と書くことができるが、通常は用いない。
5. しかし、集合 $\{\phi\}$ を外延的記法で表せば、 $\{ \{ \} \}$ と書ける。

例 6. (集合の例)

1. 自然数全体の集まり: $\{1, 2, 3, \dots\}$.

2. 10 より小さい素数全体の集まり: $\{2, 3, 5, 7\}$.

(1 より大きい整数 x が 1 と 自分自身の x 以外に, 正の約数をもたないとき, x を素数という.)

3. 十分大きい自然数全体の集まり. これは集合ではない。

集合の定義で示した, 条件 i . (集合に属するかどうか明確に判断できる) を満たさない.

4. 次の集合は空集合である: $\{x \mid x \in \mathbf{Z}, 2x + 1 = 0\}$.

条件式 $2x + 1 = 0$ を満たす整数は存在しないから.

ここで, 記号 $\mathbf{Z}$ は, 整数全体からなる集合を表す.

条件 $P(x)$ を “ $2x + 1 = 0$ ” とすれば, $\{x \mid x \in \mathbf{Z}, P(x)\}$ と書ける.

これより, $\{x \mid x \in \mathbf{Z}, P(x)\} = \{y \mid y \in \mathbf{Z}, P(y)\}$ も理解できる.

定義 7. (部分集合)

X, Y を集合とする。

X の要素がすべて Y の要素であるとき, X は Y の 部分集合 であるといい, $X \subseteq Y$ または $Y \supseteq X$ と表す.

X が Y の部分集合であり, かつ, X でない Y の要素が存在するとき, X は Y の 真部分集合 であるといい, $X \subset Y$ または $Y \supset X$ と表す.

別の言い方をすると、

$X \subseteq Y$ かつ $X \neq Y$ ならば X は Y の真部分集合である.

(例)

集合 X, Y を $X = \{1, 2\}, Y = \{1, 2, 3\}$ とすると,

$X \subseteq Y$ であり, さらに, $X \subset Y$ となる.

定義 8. (特別な集合の記号)

1. 自然数の全体からなる集合 $\{1, 2, \dots\}$ を $\mathbf{N}$ と表す.
(*Natural numbers*)
2. 整数の全体からなる集合: $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ を $\mathbf{Z}$ と表す.
(*Integers, Zahlen (Zahl (数, number) の複数形)*)
3. 有理数の全体からなる集合 $\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0 \right\}$ を $\mathbf{Q}$ と表す.
(*Rational numbers, Quotient(商)*)
4. 実数の全体からなる集合を $\mathbf{R}$ と表す.
(*Real numbers*)
5. 複素数の全体からなる集合を $\mathbf{C}$ と表す.
(*Complex numbers*)
6. このとき、 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ が成り立つ.

定義 9. ($X = Y$)

X, Y を集合とする.

$X \subseteq Y$ かつ $X \supseteq Y$ のとき, X と Y は等しいといい, $X = Y$ と表す.

定義 10. ($X \subseteq Y$ の証明)

集合 X, Y に対し、 $X \subseteq Y$ を証明する基本的な方法は、

「すべての $x \in X$ に対し、 $x \in Y$ である」

ことを示せばよい。

ここで、「任意の $x \in X$ に対し、 $x \in Y$ である」も同じ意味。

($X = Y$ の証明) $X = Y$ を証明するには、 $X = Y$ の定義より、

「 $X \subseteq Y$ かつ $X \supseteq Y$ 」を示せばよい。

例 11. 次のことを証明せよ。

1. 任意の集合 X に対し, $X \subseteq X$.

2. 任意の集合 X に対し, $\phi \subseteq X$.

3. $\{x \mid x \in \mathbf{N}, 3 \leq x^2 \leq 17\} = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 2 \leq x \leq 4\}$.

4. $\{2, 3, 1\} \subset \{4, 3, 6, 1, 5, 2\}$.

5. $\{1, 2, 1, 3, 4, 2\} = \{1, 2, 3, 4, 4, 3\}$.

1. 任意の集合 X に対し、 $X \subseteq X$.

(証明) (「任意の $x \in X$ に対し、 $x \in X$ 」を示せばよい.)

任意の $x \in X$ に対し、 $x \in X$ であることは、明らか。

ゆえに、 $X \subseteq X$ が成り立つ。 ■

2. 任意の集合 X に対し、 $\phi \subseteq X$.

(証明) (「任意の $x \in \phi$ に対し、 $x \in X$ 」を示せばよい.)

「 $x \in \phi$ ならば $x \in X$ 」の対偶「 $x \notin X$ ならば $x \notin \phi$ 」が正しいことを示す。

ϕ は、要素をもたない集合であるから、常に、 $x \notin \phi$ が成り立つ。

したがって、対偶は常に正しい。ゆえに、 $\phi \subseteq X$ が成り立つ。 ■

(命題「 P ならば Q 」に対し、その主張 P, Q の否定を $\neg P, \neg Q$ と表すと、命題の対偶は「 $\neg Q$ ならば $\neg P$ 」となる。)

3. $\{x|x \in \mathbb{N}, 3 \leq x^2 \leq 17\} = \{x|x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 4\}.$

(証明) (左辺 $\subseteq$ 右辺 かつ 左辺 $\supseteq$ 右辺 を示せばよい.)

まず, $1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 25$ より, 左辺 $= \{2, 3, 4\}$.
一方, 右辺 $= \{2, 3, 4\}$.

したがって, 任意の左辺の要素は, 右辺に属する. ゆえに, 左辺 $\subseteq$ 右辺.
逆も, 同様に成り立つから, 左辺 $\supseteq$ 右辺. ゆえに, 左辺 $=$ 右辺. ■

4. $\{2, 3, 1\} \subset \{4, 3, 6, 1, 5, 2\}.$

(証明) (左辺 $\subseteq$ 右辺 かつ 左辺 $\neq$ 右辺 を示せばよい.)

任意の左辺の要素は, 右辺に属するから, 左辺 $\subseteq$ 右辺.
一方, 右辺の要素 4 は左辺に属さないから, 左辺 $\neq$ 右辺.
ゆえに, 左辺 $\subset$ 右辺. ■

5. $\{1, 2, 1, 3, 4, 2\} = \{1, 2, 3, 4, 4, 3\}$.

(証明)

(左辺 $\subseteq$ 右辺 かつ 左辺 $\supseteq$ 右辺 を示せばよい.

さらに, 左辺 $\subseteq$ 右辺 を示すには,

「任意の左辺の要素は, 右辺に属する」を示せばよい.) ■

(注意)

1. 外延的記法で表すとき, 要素の順序を入れ換えても, 集合は変化しない.
2. 同じ要素を重複して列挙しても, その表す集合は, 重複がない場合と同じ.
(集合の条件 ii.(集合に属する2つの要素が同一かどうか判断できる)により, 重複した場合は同一とみなす)
3. すなわち, $\{1, 2, 1, 3, 4, 2\} = \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 4, 3\}$.

例 12. 次のことが正しいかどうかを判定せよ。

1. $\phi \subseteq \phi$

2. $\phi \in \phi$

3. $\phi \subseteq \{\phi\}$

4. $\phi \in \{\phi\}$

5. $\{\phi\} \subseteq \{\phi\}$

6. $\{\phi\} \in \{\phi\}$

1. $\phi \subseteq \phi$

(解答) 任意の集合 X に対し、 $\phi \subseteq X$ である.

そこで、 $X = \phi$ とすると $\phi \subseteq \phi$. ゆえに、正しい。

2. $\phi \in \phi$

(解答) 空集合 ϕ の要素数は0 より、要素 ϕ を持つことができない. ゆえに、正しくない。

3. $\phi \subseteq \{\phi\}$

(解答) 任意の集合 X に対し、 $\phi \subseteq X$ である.

そこで、 $X = \{\phi\}$ とすると $\phi \subseteq \{\phi\}$. ゆえに、正しい。

4. $\phi \in \{\phi\}$

(解答) 集合 X を $X = \{x\}$ とすれば、 $x \in X$ である.

$x = \phi$ とすれば、 $\phi \in X = \{\phi\}$. ゆえに、正しい。

5. $\{\phi\} \subseteq \{\phi\}$

(解答) 任意の集合 X に対し, $X \subseteq X$. $X = \{\phi\}$ とすれば $\{\phi\} \subseteq \{\phi\}$.
ゆえに, 正しい.

6. $\{\phi\} \in \{\phi\}$

(解答) $\{\phi\}$ の要素は ϕ だけであり, $\{\phi\}$ を要素としてもたない.
ゆえに, 正しくない.

(定義の記号)

記号 “ $:=$ ” を “ **定義する** ” という意味で用いる。(コロン イコール)

$A := B$ とは、既知の B によって A を新しく定義することを意味する。

すなわち、 B によって A を定義する。

$B =: A$ と記述しても、 $A := B$ と同じ意味である。

定義 13. 集合の間に、次のような演算 “ $\cup, \cap, +, c, -, \ominus$ ” を考える。
 U を集合とし、 $X \subseteq U, Y \subseteq U$ とする。

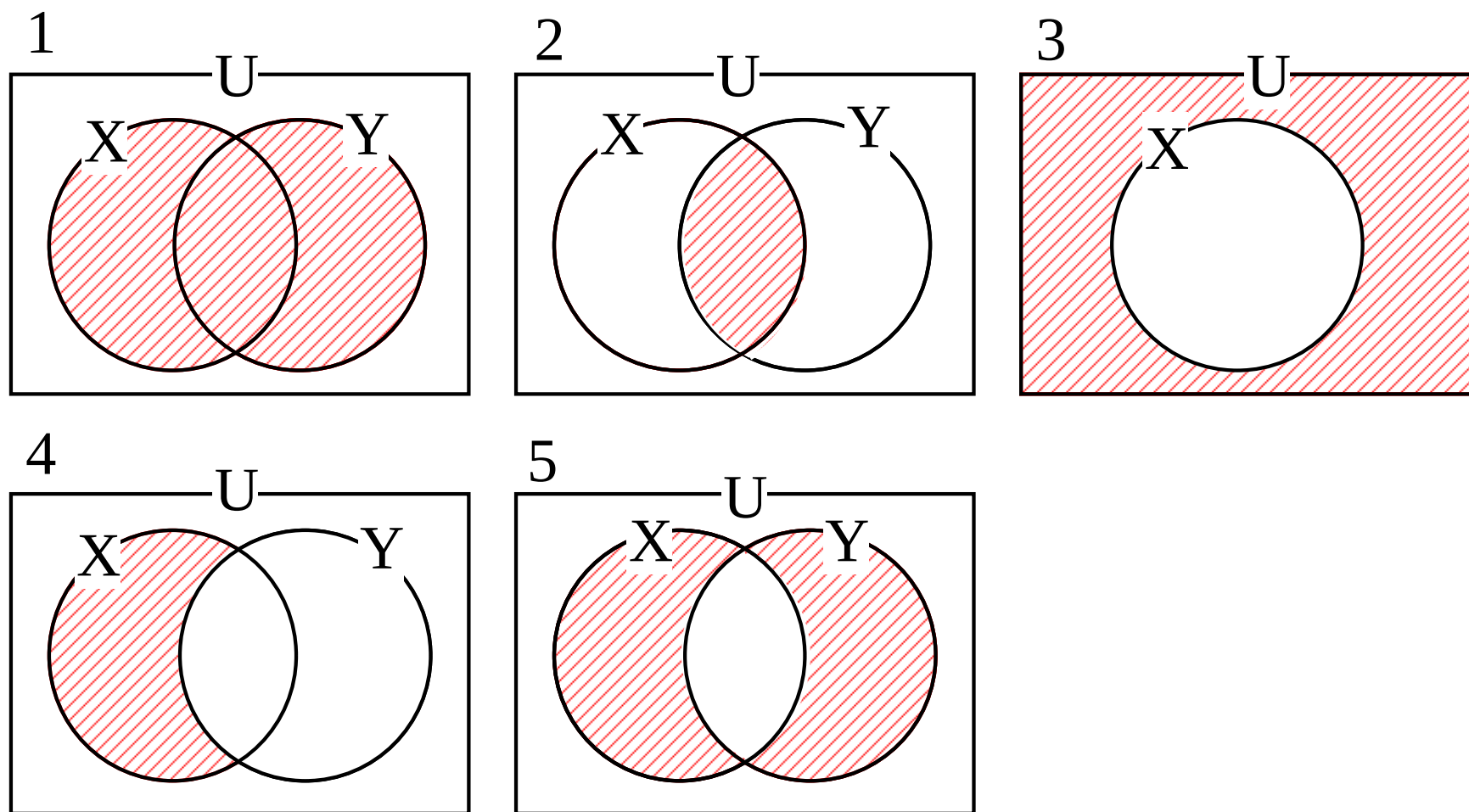
1. $X \cup Y := \{x \mid x \in X \text{ または } x \in Y\}$. (X と Y の 和集合)
2. $X \cap Y := \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \in Y\}$. (X と Y の 積集合, 共通集合)
3. $X \cap Y = \phi$ のとき、 $X \cup Y$ を X と Y の 直和 といい、
 $X + Y$ と表すことがある。
4. $X^c := \{x \mid x \in U, x \notin X\}$. (U に関する X の 補集合, *complement*)
5. $X - Y := X \cap Y^c$. (X と Y の 差集合) (資料要訂正 p.3, 定義 1.13 の 6 「象 $\rightarrow$ 称」)
6. $X \ominus Y := (X - Y) \cup (Y - X)$. (X と Y の 対称差)

(注意)

1. 上記定義における集合 U を 全体集合 という。
2. “ $x \in X$ または $x \in Y$ ” は, “ $x \in X$ かつ $x \in Y$ ” となる場合を含む。

$$X \cap Y \subseteq X \cup Y$$

ベン図 (Venn diagram)



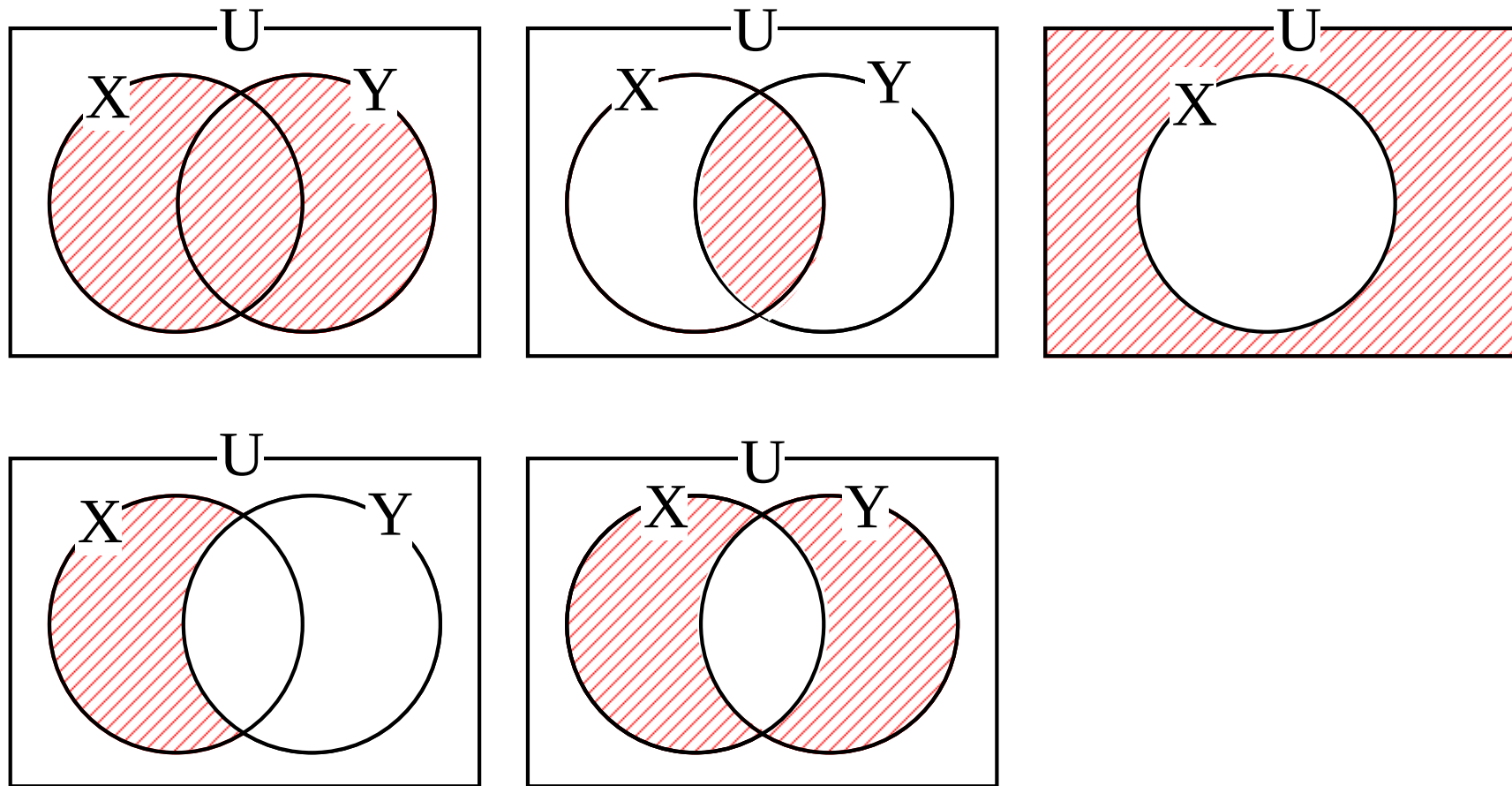
1. $X \cup Y$, 2. $X \cap Y$, 3. X^c , 4. $X - Y = X \cap Y^c$,

5. $X \ominus Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.

(注意: 直観的に理解する場合, ベン図は便利ではあるが, 証明するときの本質には用いない)

例 14. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $X = \{3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ とするとき、 $X \cup Y$, $X \cap Y$, X^c , $X - Y$, $X \ominus Y$ をそれぞれ外延的記法で表せ。

(解答) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $X \cap Y = \{3, 4\}$, $X^c = \{1, 2, 6, 7, 8\}$,
 $X - Y = \{5\}$, $X \ominus Y = \{1, 2, 5, 6\}$.



定理 15. U を全体集合とする。

U の任意の部分集合 X に対し、以下が成立する。

1. $X \cup U = U, X \cap U = X.$

2. $X \cup \phi = X, X \cap \phi = \phi.$

3. $X \cup X^c = U, X \cap X^c = \phi.$

4. $(X^c)^c = X.$

1. $X \cup U = U$

(証明) ($X \cup U \subseteq U$ かつ $X \cup U \supseteq U$ を示せばよい)

仮定より、 $X \subseteq U$ である.

まず、 $\subseteq$ を示す:

任意の $x \in X \cup U$ に対し、 $X \subseteq U$ より、 $x \in U$. ゆえに、 $X \cup U \subseteq U$.

次に、 $\supseteq$ を示す:

任意の $x \in U$ に対し、 $x \in X \cup U$ より、 $X \cup U \supseteq U$.

以上より、 $X \cup U = U$. ■

2. $X \cap U = X$

(証明) $\subseteq$) 任意の $x \in X \cap U$ に対し、 $X \subseteq U$ より、 $x \in X$ は明らか.

ゆえに、 $X \cap U \subseteq X$.

$\supseteq$) 任意の $x \in X$ に対し、 $x \in X \subseteq U$ より、 $x \in X$ かつ $x \in U$.

すなわち、 $x \in X \cap U$. ゆえに、 $X \cap U \supseteq X$.

以上より、 $X \cap U = X$. ■

References

- [1] 尾関和彦, (情報技術者のための) 離散系数学入門, 共立出版, 2004.
- [2] 尾関和彦, 太田和夫, 國廣昇, “離散数学第一” 及び “離散数学第一演習問題集” 電気通信大学情報通信工学科講義資料, 2004.
- [3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 2003.
- [4] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 2003.
- [5] S. Lipschutz 著, 成嶋弘監訳, 離散数学 (コンピュータサイエンスの基礎数学), オーム社, 2004(H16).
- [6] 小倉久和, 情報の基礎離散数学 (－ 演習を中心とした －), 近代科学社, 2006.
- [7] 町田元, 横森貴, 計算機数学, 森北出版, 1990.