離散数学

— 1. 集合と写像 —
— 1.2 写像 —

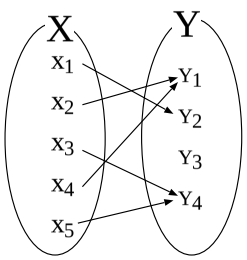
栗原正純 kuri@ice.uec.ac.jp

写象

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

$f : X \longrightarrow Y$,

$f(x_1) = y_2$, $f(x_2) = f(x_4) = y_1$, $f(x_3) = f(x_5) = y_4$



$f : X \longrightarrow Y$

1.2 写像

定義 **35.** (写象) X, Y を空でない集合とする。

1. X の各要素に対し、Y の要素が一つずつ対応するとき、
   この対応を写像という。
2. 写像を f とするとき、
   “ $f : X \longrightarrow Y$ ” または “ $X \xrightarrow{f} Y$ ” と表し，X から Y への写像という.
   X を f の始集合 (あるいは定義域), Y を 終集合 (あるいは値域) という.
3. f によって $x \in X$ に対応する Y の要素を $f(x)$ と表し，
   x における f の値という。このとき、
   “ $f : x \longmapsto f(x)$ ” と表す。

(注意) X のどの要素 x に対しても、その値 $f(x)$ が必ず，しかし，ただ 1 つ定義されている .

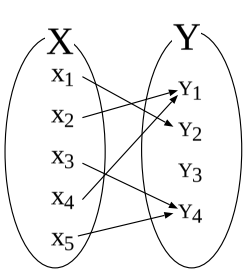
例 **36.** (写象)

次の図は、$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ に対し，

$f : X \longrightarrow Y$, $f : x \longmapsto f(x)$,

$f(x_1) = y_2$, $f(x_2) = f(x_4) = y_1$, $f(x_3) = f(x_5) = y_4$

という写像を表す。



$f : X \longrightarrow Y$

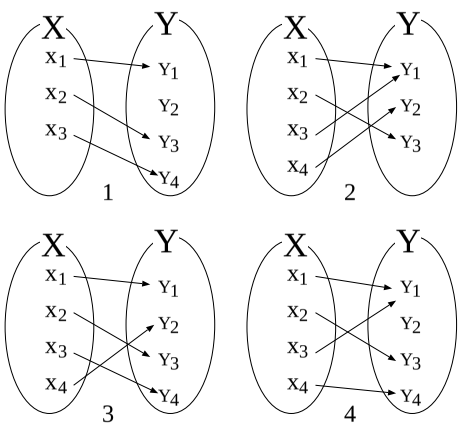
定義 **37.** X, Y を空でない集合とし，
写像 f と g を共に $f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Y$ とする。

1. 写像 f と g が等しいとは，
   「 任意の $x \in X$ に対し，$f(x) = g(x)$ 」
   が成り立つこと。f と g が等しいことを $f = g$ と表す。
2. 写像 f が定値写像であるとは、
   「任意の $x, y \in X$ に対し，$f(x) = f(y)$ 」
   が成り立つこと。
3. 写像 f が恒等写像であるとは、
   「任意の $x \in X$ に対し，$f(x) = x$ 」
   が成り立つことをいう。

---

4. 写像 f が 単射，あるいは 1対1写像 であるとは、
   「 任意の $x, y \in X$ に対し，もし $x \neq y$ ならば $f(x) \neq f(y)$ 」
   が成り立つこと。
   (あるいは，その対偶となる，「 $f(x) = f(y)$ ならば $x = y$ 」が成り立つこと)
5. 写像 f が 全射，あるいは X から Y の上への写像であるとは、
   「 任意の $y \in Y$ に対し，$f(x) = y$ となるような $x \in X$ が存在する」こと。
6. 全射 かつ 単射 である写像を 全単射 という。
   特に，集合 X からそれ自身への全単射を X 上の 置換 ともいう。

例 **38.** 写像 $f : X \longrightarrow Y$ の例を示す。単射であるか？ 全射であるか？



1.単射 (全射ではない), 2.全射 (単射ではない), 3.全単射, 4.全射でも単射でもない.

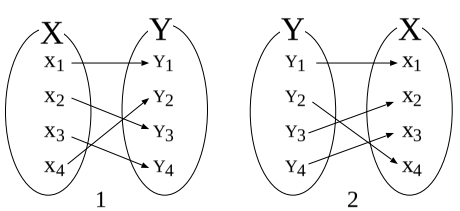
定義 **39.** (逆写象)

写像 $f : X \longrightarrow Y$ が 全単射である とき，任意の $y \in Y$ に対し，
$f(x) = y$ となる $x \in X$ が ただ 1 つ定まる.

$y \in Y$ に，このような $x \in X$ を対応させる Y から X への写像を f の 逆写像 とよび，f^{-1} と表す。

すなわち、$f(x) = y$ のとき，かつ そのときに限り，$f^{-1}(y) = x$ である.

例 **40.** 全単射である写像 $f : X \longrightarrow Y$ とその逆写像 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ の例.



1. $f : X \longrightarrow Y$, 2. $f^{-1} : Y \longrightarrow X$.

例 **41.**　全単射 f の逆写像 f^{-1} は全単射であることを示せ。

(証明) (逆写像 f^{-1} が *i)*写像であり，かつ *ii)*単射 かつ *iii)*全射 であることを示せばよい)

写像 f を $f : X \longrightarrow Y$ とすると、$f^{-1} : Y \longrightarrow X$.

*i)*写像であること) $f^{-1} : Y \longrightarrow X$

(任意の $y \in Y$ に対し，$f^{-1}(y) = x$ となる $x \in X$ が *1* つしかもただ *1* つ定まることを示せばよい)

f は全射であるから任意の $y \in Y$ に対し，$f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する．さらに，f は単射であるから $f(x) = y$ となる $x \in X$ はただ *1* つである．

*ii)*全射) $f^{-1} : Y \longrightarrow X$

(任意の $x \in X$ に対し，$x = f^{-1}(y)$ となる $y \in Y$ が存在することを示せばよい)

f は全単射より，任意の $x \in X$ に対し，$f(x) = y$ となる $y \in Y$ が一意に定まる．したがって，逆写像の定義より，$x = f^{-1}(y)$ である．

ゆえに、任意の $x \in X$ に対し、$f^{-1}(y) = x$ となる $y \in Y$ が存在する。

*iii)*単射) $f^{-1} : Y \longrightarrow X$

(任意の $y_1, y_2 \in Y$ に対し、$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ ならば $y_1 = y_2$ となることを示せばよい)

逆写像の定義より，任意の $y_1, y_2 \in Y$ に対し，$f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ となる $x_1, x_2 \in X$ がただ *1* つ定まる。すなわち，$f^{-1}(y_1) = x_1$, $f^{-1}(y_2) = x_2$ である．そこで，

$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ ならば $x_1 = f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x_2$ より $x_1 = x_2$.

したがって、$x = x_1 = x_2$ とすれば，

$y_1 = f(x_1) = f(x) = f(x_2) = y_2$ より $y_1 = y_2$.

ゆえに、任意の $y_1, y_2 \in Y$ に対し，$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ ならば $y_1 = y_2$.

以上の *i, ii, iii)* より，f^{-1} は全単射である。■

定義 **42.**　(象 と 原象 (逆象))

X, Y を空でない集合とし，f を写像 $f : X \longrightarrow Y$ とする。

1. X の部分集合 $A(\subseteq X)$ に対し、

$$F(A) := \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$$
$$= \{y \mid y \in Y,\ y = f(x) \text{ を満たす } x \in A \text{ が存在する}\}$$

を A の f による像という。

特に、$F(X)$ を f の値域像という。

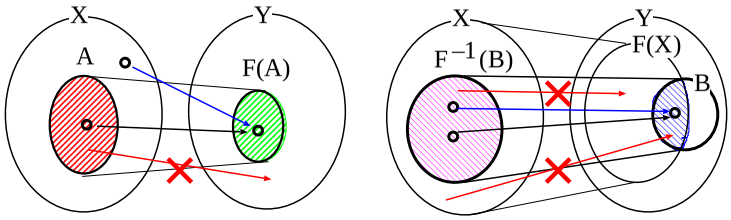
2. Y の部分集合 $B(\subseteq Y)$ に対し、

$$F^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

を B の f による原像、あるいは逆像という。

(例) $f : X \longrightarrow Y$,　$A \subseteq X$,　$B \subseteq Y$

$F(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$　　$F^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$



$f : X \longrightarrow Y$

(注意)

1. F と F^{-1} は，f と f^{-1} とは異なる。

2. F は，X のベキ集合 2^X から Y のベキ集合 2^Y への対応.

$F : 2^X \longrightarrow 2^Y$

3. F^{-1} は，Y のベキ集合 2^Y から X のベキ集合 2^X への対応.

$F^{-1} : 2^Y \longrightarrow 2^X$

4. $f : X \longrightarrow Y$ に対し，$F : 2^X \longrightarrow 2^Y$

$f : x \longmapsto f(x) = y$ に対し，$F : \{x\} \longrightarrow F(\{x\}) = \{f(x)\} = \{y\}$

5. しかし、同じ記号で表す習慣がある:

F, F^{-1} に対し、それぞれ f, f^{-1} を用いる。すなわち，

$f(A) = F(A)$

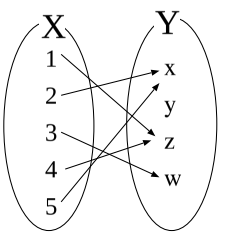
$f^{-1}(B) = F^{-1}(B)$

例 **43.**　(象 と 原象 (逆象)) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{x, y, z, w\}$ とする。

写像 $f : X \longrightarrow Y$ を図のように定義する。このとき、

$f(\{1, 2, 4\})$, $f(\{1, 3, 5\})$, $f^{-1}(\{x, y, w\})$, $f^{-1}(\{y, z\})$

をそれぞれ外延的記法で表せ。



(解) $f(\{1, 2, 4\}) = \{x, z\}$, $f(\{1, 3, 5\}) = \{x, z, w\}$,

$f^{-1}(\{x, y, w\}) = \{2, 5, 3\}$, $f^{-1}(\{y, z\}) = \{1, 4\}$.

定理 **44.**　X, Y を集合とし、$f : X \longrightarrow Y$ とする。

X の任意の部分集合 A, B に対し、以下のことを示せ。

1. $A \subseteq B$ ならば $f(A) \subseteq f(B)$.

2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

3. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

4. $f(X - A) \supseteq f(X) - f(A) (= f(X) \cap (f(A))^c)$.

5. $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$.

1. $A \subseteq B$ ならば $f(A) \subseteq f(B)$

(証明) (任意の $y \in f(A)$ に対し, $y \in f(B)$ を示せばよい)

任意の $y \in f(A)$ に対し, $f(A)$ の定義より,

$f(x) = y$ となる $x \in A$ が存在する。

仮定 $A \subseteq B$ より, $x \in A \subseteq B$ であるから, $x \in B$.

ゆえに, $f(B)$ の定義より、$y = f(x) \in f(B)$. ∎

2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(証明) $\subseteq$) 任意の$y \in f(A \cup B)$ に対し, $f(A \cup B)$ の定義より,

$f(x) = y$ となる $x \in A \cup B$ が存在する.

「$x \in A$ ならば $y = f(x) \in f(A)$」または

「$x \in B$ ならば $y = f(x) \in f(B)$」

ゆえに、$y \in f(A) \cup f(B)$.

$\supseteq$) 任意の $y \in f(A) \cup f(B)$ に対し、

「$y \in f(A)$ ならば $f(x) = y$ となる $x \in A$ が存在する」または

「$y \in f(B)$ ならば $f(x) = y$となる $x \in B$ が存在する」

したがって、$x \in A \cup B$ であり、$y = f(x) \in f(A \cup B)$.

以上より, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ は成り立つ. ∎

3. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

(証明)

任意の $y \in f(A \cap B)$ に対し, $f(x) = y$ となる $x \in A \cap B$ が存在する。

$x \in A$ かつ $x \in B$ より、$y = f(x) \in f(A)$ かつ $y = f(x) \in f(B)$.

ゆえに, $y \in f(A) \cap f(B)$ より, $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ が成り立つ.

∎

左辺$\supseteq$右辺 が成り立たない例 (反例):

$X = \{1, 2\}, Y = \{y\}$ とし , X から Yへの写像 f を $f(1) = f(2) = y$ とする. そして , $A = \{1\}$, $B = \{2\} \subseteq X$ とする . このとき ,

左辺: $A \cap B = \phi$ より , $f(A \cap B) = \phi$

右辺: $f(A) \cap f(B) = \{y\}$

ゆえに , $y \in f(A) \cap f(B)$ に対し , $y \notin \phi = f(A \cap B)$. ∎

4. $f(X - A) \supseteq f(X) - f(A) (= f(X) \cap (f(A))^c)$

(証明) 任意の $y \in (f(X) - f(A))$ に対し、$y \in f(X)$ かつ $y \notin f(A)$.

そこで , x を $f(x) = y$ とすると、$x \in X$ かつ $x \notin A$.

$x \notin A$ より、$x \in A^c$.

したがって、$x \in X \cap A^c = X - A$. ゆえに、$y = f(x) \in f(X - A)$. ∎

左辺$\subseteq$右辺 が成り立たない例 :

$X = \{1, 2\}, Y = \{y\}$ とし , X から Yへの写像 f を $f(1) = f(2) = y$ とする. そして , $A = \{1\} \subseteq X$ とする . このとき ,

左辺: $X - A = X \cap A^c = \{2\}$ より , $f(X - A) = \{y\}$

右辺: $f(X) - f(A) = f(X) \cap (f(A))^c = \{y\} \cap \{y\}^c = \{y\} \cap \phi = \phi$

ゆえに , $y \in f(X - A)$ に対し , $y \notin \phi = f(X) - f(A)$. ∎

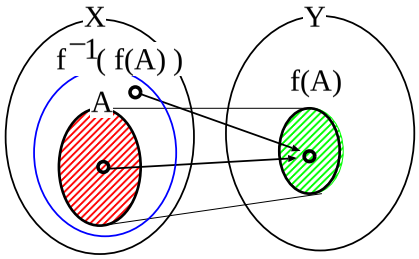
5. $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$

(証明) $\supseteq$) を示す。任意の $x \in A$ に対し、$y = f(x) \in Y$ とすると、

$f(A)$の定義より、 $y \in f(A)$.

次に、$f^{-1}(f(A))$ の定義より、

$x \in \{x \mid f(x) = y \in f(A)\} = f^{-1}(f(A))$. ∎



$f : X \longrightarrow Y$

(f が単射である場合は、$f^{-1}(f(A)) = A$ が成り立つ):

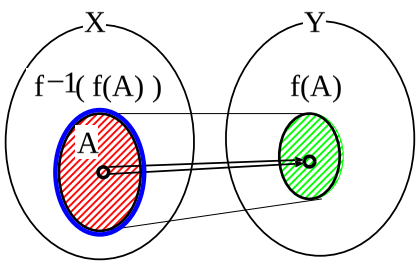
$\subseteq$) を示す。任意の $x \in f^{-1}(f(A))$ に対し、$y = f(x) \in Y$とする。

$f^{-1}(f(A))$ の定義より、$y = f(x) \in f(A)$.

次に、$f(A)$の定義より、$f(a) = y = f(x)$ となる $a \in A$ が存在する。

f は単射であるから、$f(a) = f(x)$ ならば $x = a$.

ゆえに、$x = a \in A$. ∎



定理 **45.** X, Y を集合とし、$f : X \longrightarrow Y$ とする。

Y の任意の部分集合 A, B に対し、以下のことを示せ。

1. $A \subseteq B$ ならば $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.

2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

4. $f^{-1}(Y - B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) (= f^{-1}(Y) \cap (f^{-1}(B))^c)$.

5. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

1. $A \subseteq B$ ならば $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$

(証明)

任意の $x \in f^{-1}(A)$ に対し、$f^{-1}(A)$ の定義より、$f(x) \in A$.

仮定 $A \subseteq B$ より、$f(x) \in A \subseteq B$ であるから、$f(x) \in B$.

ゆえに、$f^{-1}(B)$ の定義より、$x \in f^{-1}(B)$. ∎

2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

(証明)

$\subseteq$) 任意の $x \in f^{-1}(A \cup B)$ に対し、$f^{-1}(A \cup B)$ の定義より、
$f(x) \in A \cup B$.

「$f(x) \in A$ならば $x \in f^{-1}(A)$」または

「$f(x) \in B$ならば $x \in f^{-1}(B)$」

以上より、$x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

$\supseteq$) 任意の $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ に対し,

「$f^{-1}(A)$ の定義より、$x \in f^{-1}(A)$ ならば $f(x) \in A$」または

「$f^{-1}(B)$の定義より, $x \in f^{-1}(B)$ ならば $f(x) \in B$」

したがって、$f(x) \in A \cup B$.

ゆえに、$f^{-1}(A \cup B)$の定義より、$x \in f^{-1}(A \cup B)$. ∎

3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

(証明)

$\subseteq$) 任意の $x \in f^{-1}(A \cap B)$ に対し、$f^{-1}(A \cap B)$ の定義より、
$f(x) \in A \cap B$.

したがって、$f(x) \in A \cap B$ ならば $x \in f^{-1}(A)$ かつ $x \in f^{-1}(B)$.

ゆえに、$x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

$\supseteq$) 任意の $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ に対し、
$f^{-1}(A)$ と $f^{-1}(B)$ の定義より、$f(x) \in A$ かつ $f(x) \in B$.

したがって、$f(x) \in A \cap B$.

ゆえに、$f^{-1}(A \cap B)$の定義より、$x \in f^{-1}(A \cap B)$.

4. $f^{-1}(Y - B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) (= f^{-1}(Y) \cap (f^{-1}(B))^c)$

(証明)

$\subseteq$) 任意の $x \in f^{-1}(Y - B)$ に対し、
$f^{-1}(Y - B)$ の定義と差集合の定義より、$f(x) \in Y - B = Y \cap B^c$.

すなわち、$f(x) \in Y$ かつ $f(x) \in B^c$.

i) $f^{-1}(Y)$ の定義より、$x \in f^{-1}(Y)$.

ii) $f(x) \in B^c$ ならば $f(x) \notin B$.

さらに、$f^{-1}(B)$ の定義より、$f(x) \notin B$ ならば $x \notin f^{-1}(B)$.

したがって、$x \in (f^{-1}(B))^c$.

ゆえに、$x \in f^{-1}(Y)$ かつ $x \in (f^{-1}(B))^c$.

以上より、$x \in f^{-1}(Y) \cap (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B)$.

$f^{-1}(Y - B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) (= f^{-1}(Y) \cap (f^{-1}(B))^c)$

$\supseteq$) 任意の $x \in f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) \cap (f^{-1}(B))^c$ に対し、

i) $f^{-1}(Y)$ の定義より、$f(x) \in Y$.

ii) $x \in (f^{-1}(B))^c$ より、$x \notin f^{-1}(B)$であり、
$f^{-1}(B)$ の定義より、$f(x) \notin B$. すなわち、$f(x) \in B^c$.

したがって、$f(x) \in Y$ かつ $f(x) \in B^c$.

ゆえに、 $f(x) \in Y \cap B^c = Y - B$.

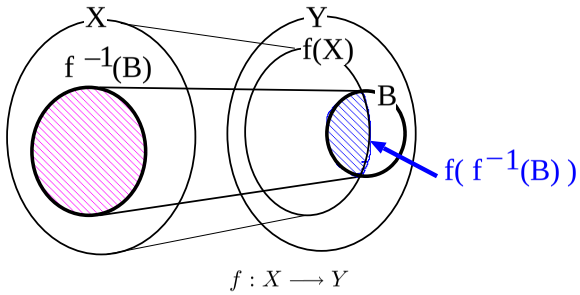
最後に、$f^{-1}(Y - B)$ の定義より、$x \in f^{-1}(Y - B)$. ∎

5. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

(証明) $\subseteq$) を示す。

任意の $y \in f(f^{-1}(B))$ に対し、$f(f^{-1}(B))$ の定義より、
$f(x) = y$ となる $x \in f^{-1}(B)$ が存在する。

$f^{-1}(B)$ の定義より、$x \in f^{-1}(B)$ ならば $y = f(x) \in B$. ∎



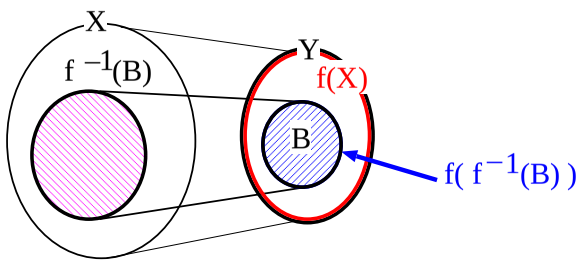
$f : X \longrightarrow Y$

(f が全射である場合は、$f(f^{-1}(B)) = B$ が成り立つ) :

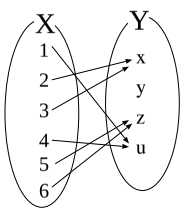
$\supseteq$) を示す。任意の $y \in B \subseteq Y$ に対し、f は全射であるから、
$f(x) = y \in B$ となる $x \in X$ が存在する。

$f^{-1}(B)$ の定義より、$f(x) \in B$ ならば $x \in f^{-1}(B)$.

さらに、$f(f^{-1}(B))$ の定義より、$x \in f^{-1}(B)$ ならば $f(x) \in f(f^{-1}(B))$
である。ゆえに、$y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. ∎



例 **46.** $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{x, y, z, u\}$ とする。
写像 $f : X \longrightarrow Y$ を図のように定義する。



1. $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 6\} \subseteq X$ とするとき、以下を確かめよ。

i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, *ii)* $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$,

iii) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$.

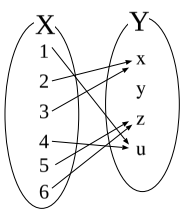
2. $A = \{x, y\}$, $B = \{y, u\} \subseteq Y$ とするとき、以下を確かめよ。

i) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, *ii)* $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,

iii) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

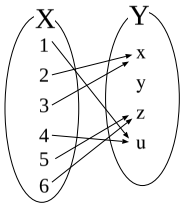
i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ *ii)* $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

$A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 6\} \subseteq X$



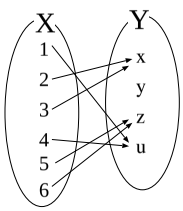
ii) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

$A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 6\} \subseteq X$



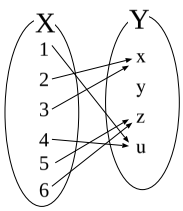
iii) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$

$A = \{2, 4, 5\} \subseteq X$



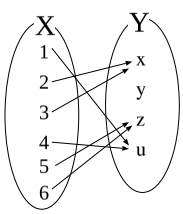
i) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ *ii)* $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

$A = \{x, y\}$, $B = \{y, u\} \subseteq Y$



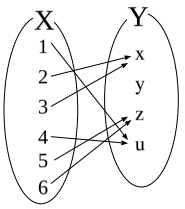
ii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

$A = \{x, y\}$, $B = \{y, u\} \subseteq Y$



iii) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

$B = \{y, u\} \subseteq Y$



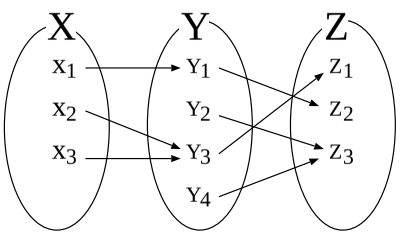
定義 47. (合成写像) X, Y, Z を空でない集合とする。

写像 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ に対し、それらの 合成写像 $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ を、

$x \in X$ に対し、$(g \circ f)(x) := g(\ f(x)\ )$ と定義する。

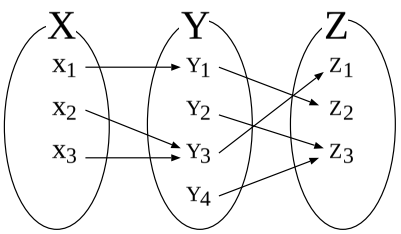
(例)

写像 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ より，合成写像 $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ が得られる．



$f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$

例 48. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ とする。
写像 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ を図のように定義する。



$(g \circ f)(x_1) = g(\ f(x_1)\ ) = g(\ y_1\ ) = z_2$.

$(g \circ f)(x_2) = g(\ f(x_2)\ ) = g(\ y_3\ ) = z_1$.

$(g \circ f)(x_3) = g(\ f(x_3)\ ) = g(\ y_3\ ) = z_1$.

定理 49. (合成写像の結合律) X, Y, Z, W を空でない集合とする。
写像 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ に対し、

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

が成り立つ.

(証明)
(任意の $x \in X$ に対し、$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$ が成り立つことを示せばよい)

$$\begin{aligned}((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(\ f(x)\ ) \\ &= h(\ g(\ f(x)\ )\ ) \\ &= h(\ (g \circ f)(x)\ ) \\ &= (h \circ (g \circ f))(x).\end{aligned}$$

例 **50.** 写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ がそれぞれ全単射ならば、次のことが成り立つことを示せ。

1. 合成写像 $g \circ f$ は全単射

2. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

(証明)

1. 合成写像 $g \circ f$ は全単射 ($g \circ f$ が 全射 かつ 単射 であることを示せばよい)

単射)

任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し, $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ とする。

$g(\ f(x_1)\ ) = (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) = g(\ f(x_2)\ )$ と書ける.

g は単射より, $g(\ f(x_1)\ ) = g(\ f(x_1)\ )$ ならば $f(x_1) = f(x_2)$. さらに,

f も単射より, $f(x_1) = f(x_1)$ ならば $x_1 = x_2$.

ゆえに, 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し,

$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ が言えた.

全射)

(任意の $z \in Z$ に対し, $(g \circ f)(x) = z$ となる $x \in X$ が存在することを示せばよい.)

任意の $z \in Z$ に対し, g は全射より, $g(y) = z$ となる $y \in Y$ が存在する.

さらに, f も全射より, $y \in Y$ に対し, $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する.

したがって, それらを整理すると,

$$z = g(\ y\ ) = g(\ f(x)\ ) = (g \circ f)(x)$$

と書ける。これより, 任意の $z \in Z$ に対し, $(g \circ f)(x) = z$ となる $x \in X$ が存在するが言えた.

以上より, $g \circ f$ は単射かつ全射であるから, $g \circ f$ は全単射である. ■

2. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

前記 *1* の結果より , $g \circ f$ は全単射であるから逆写像 $(g \circ f)^{-1}$ が存在する.

そこで, 任意の $z \in Z$ を取り出し, その z に対し, $(g \circ f)^{-1}(z) = x \in X$ とする .

すなわち , $z = (g \circ f)(x) = g(\ f(x)\ )$.

そして , g は全単射であるから , $g^{-1}(z) = f(x) \in Y$.

さらに , f も全単射であることより , $f^{-1}(\ g^{-1}(z)\ ) = x \in X$.

したがって , $x = f^{-1}(\ g^{-1}(z)\ ) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$.

ゆえに , $(g \circ f)^{-1}(z) = x = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$ が成り立つ . ■

例 **51.** X, Y, Z を空でない集合とし、$f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ とする。このとき、次のことが成り立つことを示せ。

1. 合成写像 $g \circ f$ が単射 ならば f は単射である。

2. 合成写像 $g \circ f$ が全射 ならば g は全射である。

3. 合成写像 $g \circ f$ が単射 かつ f が全射 ならば g は単射である。

4. 合成写像 $g \circ f$ が全射 かつ g は単射 ならば f は全射である。

単射, 全射 を証明する基本 (定義の条件を満たすことを示せばよい)

(f は単射)「任意の $a, b \in X$ に対し, $f(a) = f(b)$ ならば $a = b$」 を示せばよい. または, その対偶を示せばよい.

(f は全射)「任意の $y \in Y$ に対し, $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在すること」を示せばよい.

1. $g \circ f$ が単射ならば f は単射である。($X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$)

(証明) (任意の $a, b \in X$ に対し , $f(a) = f(b)$ ならば $a = b$ を示せばよい.)

任意の $a, b \in X$ に対し , $f(a) = f(b)$ ならば , $g(f(a)) = g(f(b))$.

これより, $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(b)) = (g \circ f)(b)$.

仮定より $g \circ f$ は単射であるから, $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$ ならば $a = b$.

ゆえに , $f(a) = f(b)$ ならば $a = b$ が言えるので , f は単射である . ■

2. $g \circ f$ が全射ならば g は全射である。($X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$)

(証明) (任意の $z \in Z$ に対し , $g(y) = z$ となる $y \in Y$ が存在することを示せばよい.)

$g \circ f$ が全射であることより ,

任意の $z \in Z$ に対し , $(g \circ f)(x) = z$ となる $x \in X$ が存在する .

すると , $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ となる $y = f(x) \in Y$ が存在する .

ゆえに, $z \in Z$ に対し, $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$ となる $y \in Y$ が存在するので, g は全射である。■

3. $g \circ f$ が単射 かつ f が全射ならば g は単射である。($X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$)

(証明) (任意の $y_1, y_2 \in Y$ に対し , $g(y_1) = g(y_2)$ ならば $y_1 = y_2$ を示せばよい .)

f は全射であるから , 任意の $y_1, y_2 \in Y$ に対し ,

$f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ となる x_1, $x_2 \in X$ が存在する .

一方 , $g(y_1) = g(y_2)$ ならば

$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) = g(y_2) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$ より,

$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$.

$g \circ f$ は単射であるから , $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$.

したがって , $x = x_1 = x_2$ とすれば $y_1 = f(x_1) = f(x) = f(x_2) = y_2$ となる .

ゆえに , $g(y_1) = g(y_2)$ ならば $y_1 = y_2$ より, g は単射である . ■

4. $g \circ f$が全射 かつ g は単射ならば f は全射である。$(X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z)$

(証明) (任意の$y \in Y$に対し，$f(x) = y$となる$x \in X$が存在することを示せばよい．)

任意の $y \in Y$ に対し，$g(y) = z \in Z$ とする．

$g \circ f$ は全射であるから$z \in Z$ に対し，$(g \circ f)(x) = z$ となる $x \in X$ が存在する．

このとき，$g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z = g(y)$ である．

g は単射であることより，$g(f(x)) = g(y)$ ならば $f(x) = y$.

ゆえに，任意の $y \in Y$ に対し，$f(x) = y$ となる $x \in X$が存在することより，f は全射である。∎

定義 52. Xを空でない集合とする。

このとき、直積 $X \times X$ から X への写像を X 上の 2項演算 という。

実数の加法 “+” や乗法 “×” は、2つの実数に対して1つの実数を対応させる写像である。

したがって、これらは $\mathbf{R}$ 上の2項演算である。

たとえば, $\mathbf{R}$ 上の加法における 2項演算 は以下の通り.

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$f : (a, b) \longmapsto f(a, b) = a + b$$

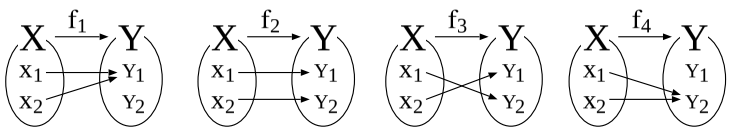
定義 53. 集合Xから集合Yへの写像の全体からなる集合を

$$Y^X := \{f \mid f : X \longrightarrow Y\}$$

と表す。

例 54. $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ に対し、集合Y^Xを外延的記法で表せ。

(解答) $Y^X = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. ただし、$f_1, f_2, f_3, f_4$ は図のような写像である。



写像 f_1, f_2, f_3, f_4.

定理 55. X, Y を空でない有限集合とし、$|X| = m$, $|Y| = n$ とする。
X から Y への写像の数に関し、以下のことが成り立つ。

1. 写像の総数 : $|\{f \mid f : X \longrightarrow Y\}| = |Y^X| = n^m = |Y|^{|X|}$

2. 単射の総数 : $|\{f \mid f : X \longrightarrow Y,\ f \text{ は単射}\}|$

$$= \begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1)) = \dfrac{n!}{(n-m)!}, & (m \leq n) \\ 0, & (m > n) \end{cases}$$

3. 全射の総数 : $|\{f \mid f : X \longrightarrow Y,\ f \text{ は全射}\}|$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m, & (m \geq n) \\ 0, & (m < n) \end{cases}$$

証明するに当たり，X, Y は有限集合であるから、

$X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ としても一般性は失われない。

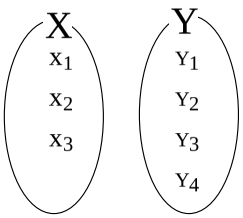
1. 写像の総数 : $|Y|^{|X|} = n^m$ $(X = \{x_1, \ldots, x_m\}, Y = \{y_1, \ldots, y_n\})$

(証明) 各 $x_i \in X$ に対し、$f(x_i) = y_j$ となる対応を指定することで写像は定まる。

x_i に対し、そのような対応を指定する仕方は n 通り。

したがって、m 個の $x_1, x_1, \ldots, x_m$ に対し、$f(x_i) = y_j$ の値を定める組合せは n^m 通りある。

ゆえに、$|Y^X| = n^m = |Y|^{|X|}$. ∎



2. 単射の総数 : $n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1))$, (m ≤ n のとき)

$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$.

(証明)

単射であるから、

任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し、$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$.

したがって、これを満たすには、$m \leq n$ でなければならない。

したがって、*i)* $m > n$ のときには *0* 個となる。

ii) $m \leq n$ の場合について考える。求める個数は、x_1 から x_m に対し、順に $f(x_1), \ldots, f(x_m)$ の値を $y_1, \ldots, y_n$ の中から定める数である。

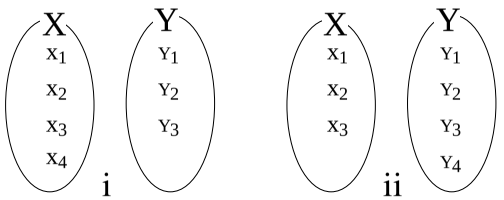
ただし、単射であるから $x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ を満たす必要がある。

すなわち、n 個の中から m 個を順に取り出す順列の数である。

ゆえに、求める個数は、$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$ となる。∎

i) $m > n$ のとき, *0* 個.

ii) $m \leq n$ のとき, $n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$



3. 全射の総数 : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m$, $(m \geq n)$のとき)

(証明)

全射であるから、

任意の $y \in Y$ に対し、$f(x) = y$となる$x \in X$が存在する。

i) $m < n$であるとすると，$y_1 \neq y_2$ である $y_1, y_2 \in Y$ に対し，
$y_1 = f(x) = y_2$ となる $x \in X$ が少なくとも *1* つは存在することになる。

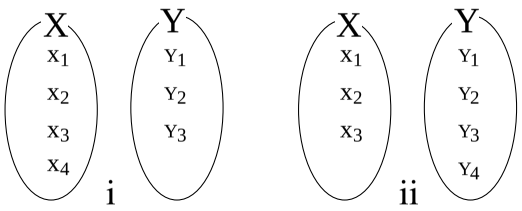
しかし、これは、写像の定義である、$f(x)$ の値が唯 *1* つ定まるということに矛盾する。

ゆえに、$m < n$ のときは、*0* 個である。

ii) $m \geq n$ の場合については、ここでの証明は省略する。(例 *1.60* を参照) ∎

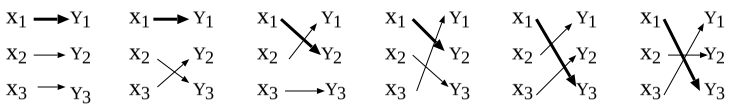
i) $m \geq n$ のとき, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m$.

ii) $m < n$ のとき, *0* 個.



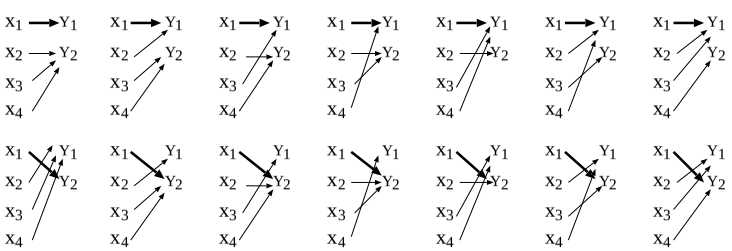
$(m,n) = (3,2)$ の場合, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m = 6$.

$\sum_{k=0}^{2}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^3 = 0 - 2\cdot 1^3 + 1\cdot 2^3 = 0 - 2 + 8 = 6$



$(m,n) = (4,2)$ の場合, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m = 14$.

$\sum_{k=0}^{2}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^4 = 0 - 2\cdot 1^4 + 1\cdot 2^4 = 0 - 2 + 16 = 14$



系 **56.** X, Y を空でない有限集合とする。

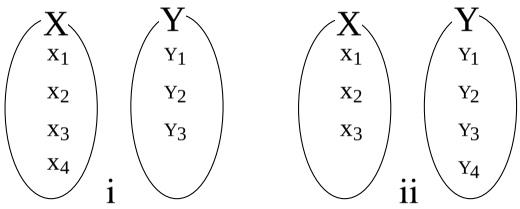
1. “X から Y への単射が存在する”ことと、“$|X| \leq |Y|$”は同値である。
2. “X から Y への全射が存在する”ことと、“$|X| \geq |Y|$”は同値である。
3. “X から Y への全単射が存在する”ことと、“$|X| = |Y|$”は同値である。

1. “X から Y への単射が存在する” $\Leftrightarrow$ “$|X| \leq |Y|$”

(証明)

単射が存在するならば、その個数は *1* 以上であるから、$|X| > |Y|$ ではない。すなわち、$|X| \leq |Y|$ である。

逆に、$|X| \leq |Y|$ ならば、$|Y|!/(|Y|-|X|)!(>0)$ 個の単射を定義できるので、単射が存在する。∎

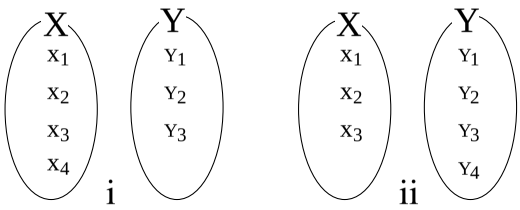


2. “X から Y への全射が存在する” $\Leftrightarrow$ “$|X| \geq |Y|$”

(証明)

全射が存在するならば、その個数は *1* 以上であるから、$|X| < |Y|$ ではない。すなわち、$|X| \geq |Y|$ である。

逆に、$|X| \geq |Y|$ ならば、$\sum_{k=0}^{|Y|}(-1)^{|Y|-k}\binom{|Y|}{k}k^{|X|}(>0)$ 個の全射を定義できるので、全射が存在する。∎

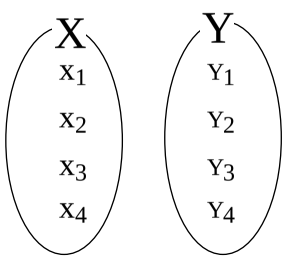


3. “X から Y への全単射が存在する” $\Leftrightarrow$ “$|X| = |Y|$”

(証明)

全単射が存在するならば、上記 *1,2* より、$|X| = |Y|$ である。

逆に、$|X| = |Y|$ ならば、$X = \{x_1, \ldots, x_{|X|}\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_{|X|}\}$ に対し、$f(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, |X|$ とすることで、f は全単射となる。ゆえに、全単射が存在する。∎



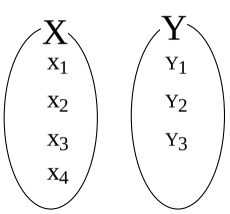
鳩の巣原理:

X, Y を有限集合とする。

$|X| > |Y|$ ならば X から Y への単射は存在しない。

したがって、$f(x_1) = f(x_2)$ となる、異なる $x_1, x_2 \in X$ が存在する。

これを、一般に、鳩の巣原理 という。



$f : X \to Y$

定理 57. *(鳩の巣原理)* X, Y を空でない有限集合とする。

$k = \lceil \frac{|X|}{|Y|} \rceil$ とするとき、X から Y への任意の写像 f に対し、$f(x_1) = \cdots = f(x_k)$ を満たす k 個の異なる $x_1, \ldots, x_k$ が存在する。■

*(**Ceiling**記号 と **Floor**記号)* x を実数とする。

1. $\lceil x \rceil$ とは、「x 以上の最小の整数」を表す。*(x の天井 (**ceiling**))*
   $x = 2.3$ならば、$\lceil 2.3 \rceil = 3$
2. $\lfloor x \rfloor$ とは、「x 以下の最大の整数」を表す。*(x の床 (**floor**))*
   $x = 2.3$ならば、$\lfloor 2.3 \rfloor = 2$
3. $\lceil x \rceil - x < 1$ が成り立つ.
4. $x - \lfloor x \rfloor < 1$ が成り立つ.

定理 X, Y を空でない有限集合とする。

$k = \lceil \frac{|X|}{|Y|} \rceil$ とするとき、X から Y への任意の写像 f に対し、

$f(x_1) = \cdots = f(x_k)$を満たす k 個の異なる $x_1, \ldots, x_k$ が存在する。

(証明) 背理法を用いて証明する。

$|X| > |Y|$とする。このとき、$k > 0$ である。

X から Y への任意の写像 f に対し、$f(x_1) = \cdots = f(x_k)$ を満たす k 個の異なる $x_1, \ldots, x_k$ が存在しないと仮定する。

すなわち、すべて k 個より少ないとする。すると、

$|X| \leq (k-1)|Y| = (\lceil \frac{|X|}{|Y|} \rceil - 1)|Y| < \frac{|X|}{|Y|}|Y| = |X|$
より、$|X| < |X|$ となり、矛盾。

ゆえに, $f(x_1) = \cdots = f(x_k)$ を満たす k 個の異なる $x_1, \ldots, x_k$ が存在する. ■

例 58. 13人以上の人がいれば、必ず同じ生まれ月の人がいることを示せ。

(解答)

13人以上の人の集合をX, 月の集合を$Y = \{1, \ldots, 12\}$とする。

そして、X に属する人に、その生まれ月を対応させる写像を考える。

$|X| \geq 13 > 12 = |Y|$であるから、鳩の巣原理の定理より、

少なくとも$\lceil \frac{13}{12} \rceil = 2$ 人の人が同じ生まれ月になる。■

定理 59. X, Y を空でない有限集合とし、$|X| = |Y|$ とする。このとき、

X から Y への写像が全射であることと、単射であることは同値である。

(証明) 写像を f とする。

全射→単射) 全射より、任意の $y \in Y$ に対し、$f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する。

そこで、$f(x_1) = f(x_2)$ かつ $x_1 \neq x_2$ となる $x_1, x_2 \in X$ が存在すると仮定すると、$|X| > |Y|$ となる。

これは、$|X| = |Y|$ に矛盾。

ゆえに、$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ である。すなわち、f は単射である。

全射←単射) 単射より、$x_1 \neq x_2$ となる任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し、$f(x_1) \neq f(x_2)$ である。

$|X|$ 個の $f(x) \in Y$ はすべて異なり $|X|$ 個ある。

$|X| = |Y|$ であるから

$Y = \{f(x_i) \mid i = 1, \ldots, |X|,$ もし $i \neq j$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)\}$
と定めることができる。

ゆえに、任意の $y \in Y$ に対し、$f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する。すなわち、f は全射である。■

濃度 (のうど)

1. 集合 X から集合 Y への全単射が存在するとき、
   X と Y は 対等 であるという。
2. 対等な集合は等しい 濃度 *(Cardinality (Cardinal number))* をもつという。
3. 集合 X の濃度を $|X|$ と表す。
4. 有限集合の場合、$|X|$ はその要素数を表す。
5. 有限集合 X, Y に対し、
   X と Y が等しい濃度をもつことと、$|X| = |Y|$は同値である。
6. 集合 X から集合 Y への全射が存在するとき、
   $|X|$ は $|Y|$ 以上であるといい、$|X| \geq |Y|$と表す。
7. $|X| \geq |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$ のとき、
   $|X|$は$|Y|$ より大きいといい、$|X| > |Y|$ と表す。

例 60. 空でない有限集合 X, Y に対し , $|X| = m, |Y| = n$ とする。
このとき , X から Y への全射の総数は $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m$ と書けることを , 以下に厳密な証明ではないが , スケッチする .

1. まず , X から Y への写像の総数は n^m である .
2. 要素数 m の集合 X から要素数 k の部分集合 $B(\subseteq Y)$ への全射の総数を $F(m, k)$ と表す.
3. このとき , n^m 個の写像の中で値域 (終集合) が要素数 k 個の部分集合 $B \subseteq Y$ になるような写像の総数は $\binom{n}{k} F(m, k)$ である .
4. したがって , 写像の総数は $n^m = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} F(m, k)$ と書ける .

(続く)

5. すると，$F(m,n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m$ を n に関する数学的帰納法で証明できる．

$n=1$のとき，正しいことを示し，$n-1$まで，正しいと仮定する．

すると，n のときでも，次式の最後の等号が成り立つことを示すことができる．*(文献[3]の第1章末の問題19(p.41)の解答を参照．)*

$$\begin{aligned} F(m,n) &= n^m - \sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}F(m,j) \\ &= n^m - \sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}\left(\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}k^m\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

6. 実数全体の集合 $\mathbf{R}$ の濃度も，無限の濃度．
連続の濃度といい，$\aleph$ (アレフ) と書く．すなわち，$|\mathbf{R}|=\aleph$.
7. $\aleph_0<\aleph$ (Cantorの対角線論法)
8. $\aleph_0$ 以下の濃度をもつ集合を可算集合という．
$\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$ は可算集合．
9. $\aleph_0$ より大きい濃度をもつ集合を非可算集合という．
$\mathbf{R}$ は非可算集合．

例 **61.**
有限集合Xの分割とはXの部分集合を要素とする集合$\{A_1,\ldots,A_n\}$で、次の条件を満たすもののことである。

1. $A_i\neq\phi\ (i=1,\ldots,n)$,
2. $\cup_{i=1}^{n}A_i=X$,
3. $i\neq j\ \rightarrow A_i\cap A_i=\phi$.

各 A_i を 分割ブロック という。

X から集合 $\{1,\ldots,n\}$ への全射の総数を与える公式を用いて、X を n 個のブロックに分ける分割の総数を示せ。

(解答)

$\frac{1}{n!}F(|X|,n)$. $\blacksquare$

References

[1] 尾関和彦, (情報技術者のための)離散系数学入門, 共立出版, 2004.

[2] 尾関和彦, 太田和夫, 國廣昇, “離散数学第一” 及び “離散数学第一演習問題集” 電気通信大学情報通信工学科講義資料, 2004.

[3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 2003.

[4] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 2003.

[5] S. Lipschutz著, 成嶋弘監訳, 離散数学(コンピュータサイエンスの基礎数学), オーム社, 2004(H16).

[6] 小倉久和, 情報の基礎離散数学(– 演習を中心とした –), 近代科学社, 2006.

[7] 町田元, 横森貴, 計算機数学, 森北出版, 1990.

濃度について

1. 有限の濃度: 0 または 自然数で表される濃度, 有限集合の濃度のこと
2. 無限の濃度: 無限集合の濃度のこと
3. 自然数全体の集合 $\mathbf{N}$ の濃度は, 無限の濃度.
可算の濃度といい, $\aleph_0$ (アレフ ゼロ) と書く．すなわち, $|\mathbf{N}|=\aleph_0$.
4. 偶数全体の集合を P とすれば, $\mathbf{N}$ と P は対等である.
なぜなら, $f(n)=2n$ とすれば, f は $\mathbf{N}$ から P への全単射な写像となる.
5. 有理数全体の集合 $\mathbf{Q}$ の濃度は, $\aleph_0$ である.
なぜなら, $f(a,b)=a/b$ とすれば, f は $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}$ から $\mathbf{Q}$ への全射な写像となる．したがって, $|\mathbf{Q}|\leq|\mathbf{N}|=\aleph_0$. 一方, $|\mathbf{Q}|\geq|\mathbf{N}|=\aleph_0$ であるから, $|\mathbf{Q}|=\aleph_0$.