

離散数学

— 1. 集合と写像 —

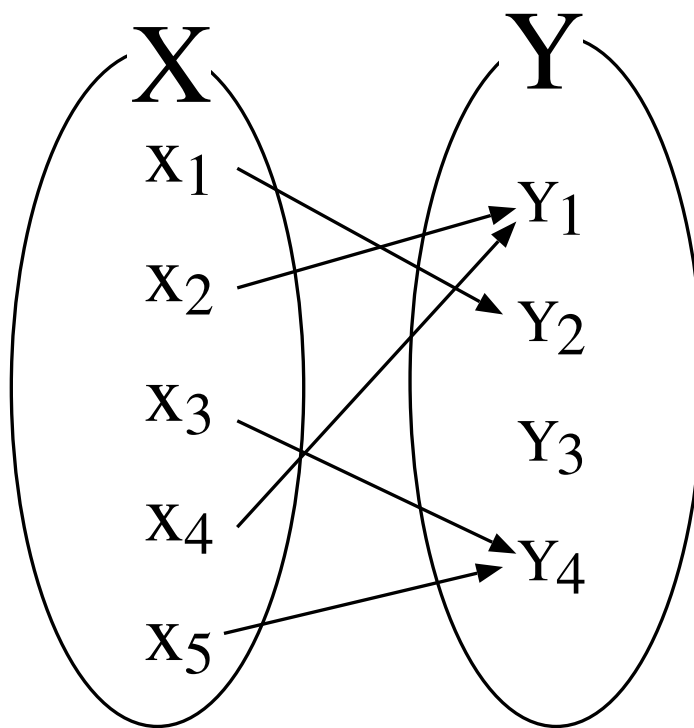
— 1.2 写像 —

写象

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$$

$$f : X \longrightarrow Y,$$

$$f(x_1) = y_2, f(x_2) = f(x_4) = y_1, f(x_3) = f(x_5) = y_4$$



$$f : X \longrightarrow Y$$

1.2 写像

定義 35. (写象) X, Y を空でない集合とする。

1. X の各要素に対し、 Y の要素が一つずつ対応するとき、この対応を写像という。

2. 写像を f とするとき、

“ $f : X \longrightarrow Y$ ” または “ $X \xrightarrow{f} Y$ ” と表し、 X から Y への写像 という。

X を f の始集合 (あるいは定義域), Y を 終集合 (あるいは値域) という。

3. f によって $x \in X$ に対応する Y の要素を $f(x)$ と表し、 x における f の値 という。このとき、

“ $f : x \longmapsto f(x)$ ” と表す。

(注意) X のどの要素 x に対しても、その値 $f(x)$ が必ず、しかし、ただ 1 つ定義されている。

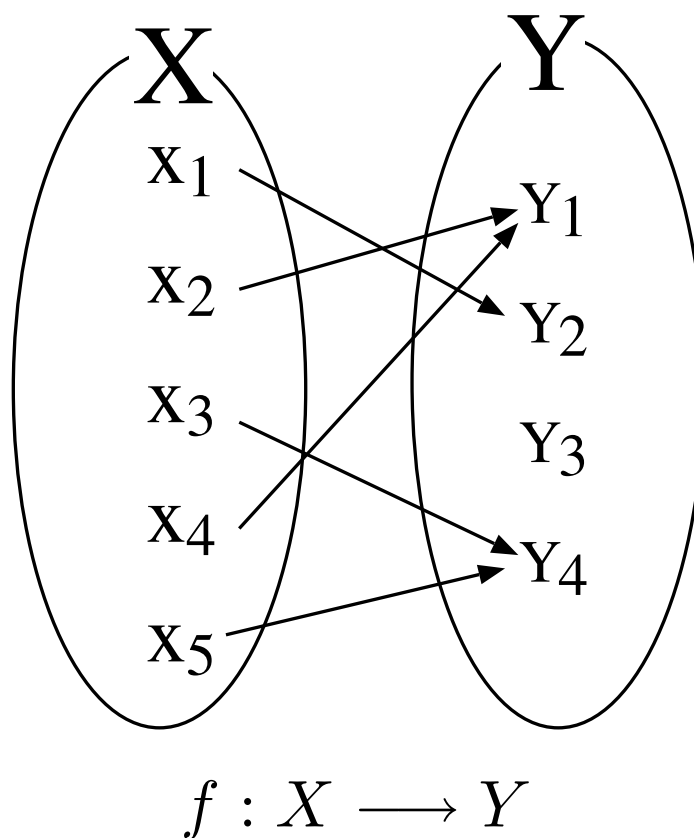
例 36. (写象)

次の図は、 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ に対し、

$$f : X \longrightarrow Y, \quad f : x \longmapsto f(x) ,$$

$$f(x_1) = y_2, f(x_2) = f(x_4) = y_1, f(x_3) = f(x_5) = y_4$$

という写像を表す。



定義 37. X, Y を空でない集合とし、
写像 f と g を共に $f : X \longrightarrow Y, g : X \longrightarrow Y$ とする。

1. 写像 f と g が等しいとは、

「任意の $x \in X$ に対し、 $f(x) = g(x)$ 」

が成り立つこと。 f と g が等しいことを $f = g$ と表す。

2. 写像 f が定値写像であるとは、

「任意の $x, y \in X$ に対し、 $f(x) = f(y)$ 」

が成り立つこと。

3. 写像 f が恒等写像であるとは、

「任意の $x \in X$ に対し、 $f(x) = x$ 」

が成り立つことをいう。

4. 写像 f が 単射, あるいは 1対1写像 であるとは、

「任意の $x, y \in X$ に対し、もし $x \neq y$ ならば $f(x) \neq f(y)$ 」
が成り立つこと。

(あるいは、その対偶となる、「 $f(x) = f(y)$ ならば $x = y$ 」が成り立つこと)

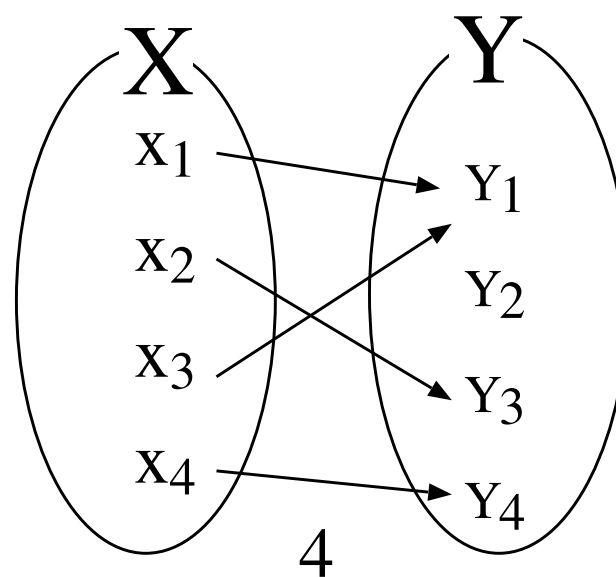
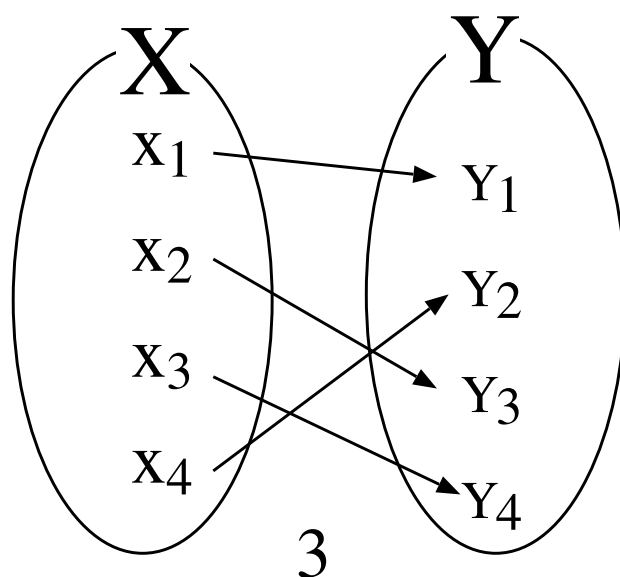
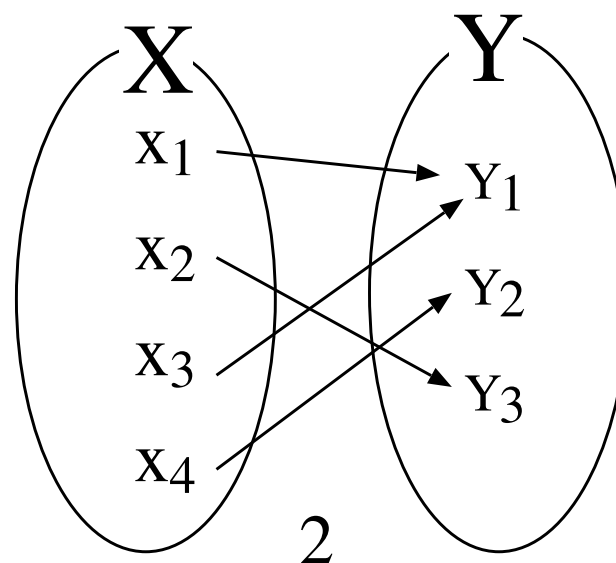
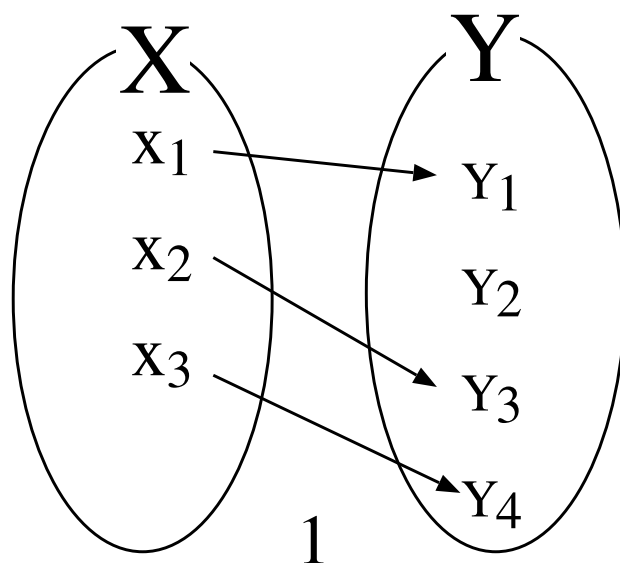
5. 写像 f が 全射, あるいは X から Y の上への写像 であるとは、

「任意の $y \in Y$ に対し、 $f(x) = y$ となるような $x \in X$ が存在する」
こと。

6. 全射 かつ 単射 である写像を 全単射 という。

特に、集合 X からそれ自身への全単射を X 上の 置換 ともいう。

例 38. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ の例を示す。単射であるか？ 全射であるか？



1. 単射 (全射ではない), 2. 全射 (単射ではない), 3. 全単射, 4. 全射でも単射でもない.

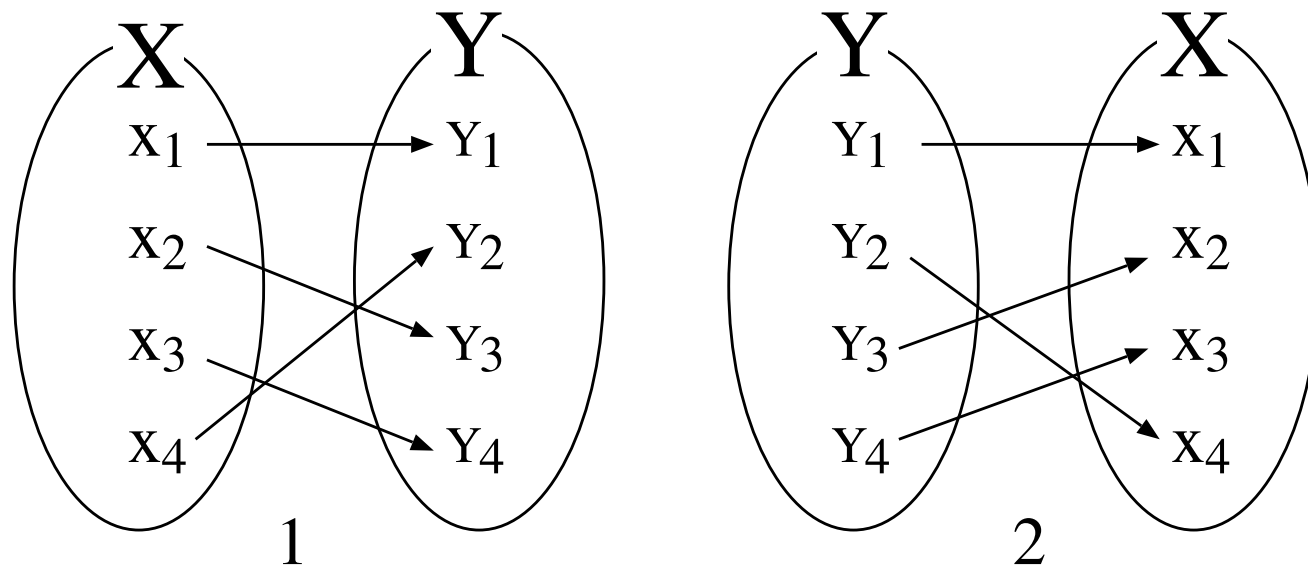
定義 39. (逆写象)

写像 $f : X \longrightarrow Y$ が **全単射である** とき, 任意の $y \in Y$ に対し,
 $f(x) = y$ となる $x \in X$ が **ただ 1 つ定まる**.

$y \in Y$ に, このような $x \in X$ を対応させる Y から X への写像を
 f の **逆写象** とよび, f^{-1} と表す.

すなわち、 $f(x) = y$ のとき, かつ そのときに限り, $f^{-1}(y) = x$ である.

例 40. 全単射である写像 $f : X \longrightarrow Y$ とその**逆写象** $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ の例.



1. $f : X \longrightarrow Y$, 2. $f^{-1} : Y \longrightarrow X$.

例 41. 全単射 f の逆写像 f^{-1} は全単射であることを示せ。

(証明) (逆写像 f^{-1} が i) 写像であり, かつ ii) 単射 かつ iii) 全射 であることを示せばよい)

写像 f を $f : X \longrightarrow Y$ とすると、 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$.

i) 写像であること) $f^{-1} : Y \longrightarrow X$

(任意の $y \in Y$ に対し, $f^{-1}(y) = x$ となる $x \in X$ が 1 つしかもただ 1 つ定まることを示せばよい)

f は全射であるから任意の $y \in Y$ に対し, $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する. さらに, f は単射であるから $f(x) = y$ となる $x \in X$ はただ 1 つである.

ii) 全射) $f^{-1} : Y \longrightarrow X$

(任意の $x \in X$ に対し, $x = f^{-1}(y)$ となる $y \in Y$ が存在することを示せばよい)

f は全単射より, 任意の $x \in X$ に対し, $f(x) = y$ となる $y \in Y$ が一意に定まる. したがって, 逆写像の定義より, $x = f^{-1}(y)$ である.

ゆえに、任意の $x \in X$ に対し、 $f^{-1}(y) = x$ となる $y \in Y$ が存在する。

iii) 単射) $f^{-1} : Y \longrightarrow X$

(任意の $y_1, y_2 \in Y$ に対し、 $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ ならば $y_1 = y_2$ となることを示せばよい)

逆写像の定義より、任意の $y_1, y_2 \in Y$ に対し、 $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ となる $x_1, x_2 \in X$ がただ 1 つ定まる。すなわち、 $f^{-1}(y_1) = x_1$, $f^{-1}(y_2) = x_2$ である。そこで、

$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ ならば $x_1 = f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x_2$ より $x_1 = x_2$.

したがって、 $x = x_1 = x_2$ とすれば、

$y_1 = f(x_1) = f(x) = f(x_2) = y_2$ より $y_1 = y_2$.

ゆえに、任意の $y_1, y_2 \in Y$ に対し、 $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ ならば $y_1 = y_2$.

以上の i, ii, iii) より、 f^{-1} は全単射である。■

定義 42. (象 と 原象 (逆象))

X, Y を空でない集合とし, f を写像 $f : X \longrightarrow Y$ とする。

1. X の部分集合 $A(\subseteq X)$ に対し、

$$\begin{aligned} F(A) &:= \{f(x) \in Y \mid x \in A\} \\ &= \{y \mid y \in Y, y = f(x) \text{ を満たす } x \in A \text{ が存在する} \} \end{aligned}$$

を A の f による像という。

特に、 $F(X)$ を f の値域像という。

2. Y の部分集合 $B(\subseteq Y)$ に対し、

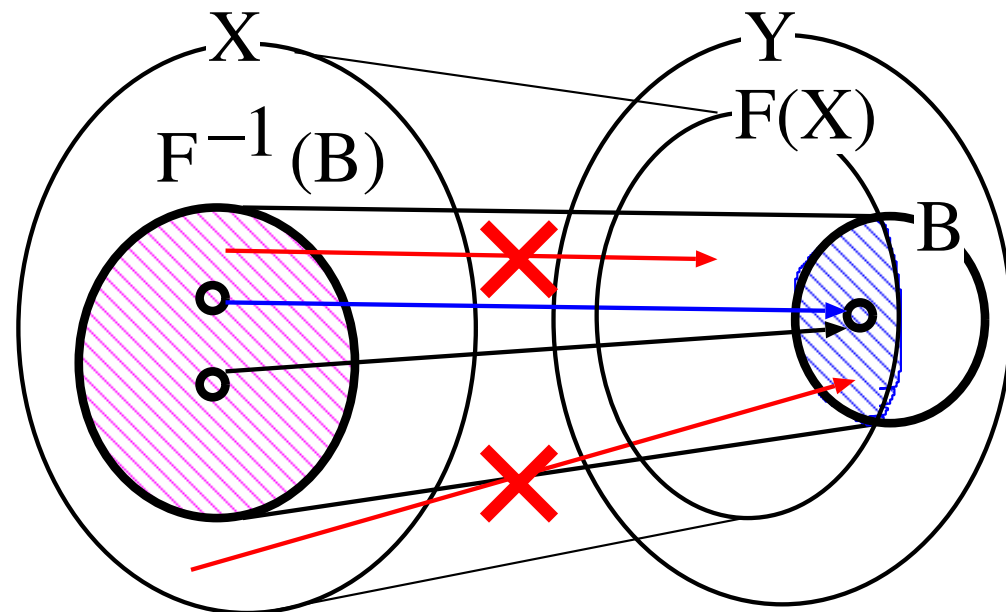
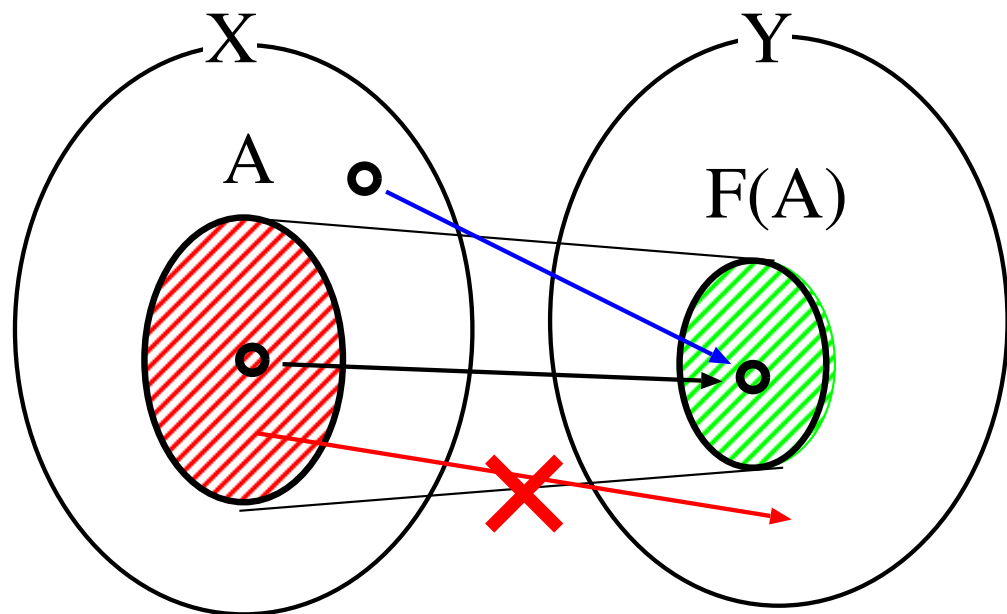
$$F^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

を B の f による原像、あるいは逆像という。

(例) $f : X \longrightarrow Y, \quad A \subseteq X, \quad B \subseteq Y$

$$F(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$$

$$F^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$



$$f : X \longrightarrow Y$$

(注意)

1. F と F^{-1} は, f と f^{-1} とは異なる。

2. F は, X のベキ集合 2^X から Y のベキ集合 2^Y への対応.

$$F : 2^X \longrightarrow 2^Y$$

3. F^{-1} は, Y のベキ集合 2^Y から X のベキ集合 2^X への対応.

$$F^{-1} : 2^Y \longrightarrow 2^X$$

4. $f : X \longrightarrow Y$ に対し, $F : 2^X \longrightarrow 2^Y$

$$f : x \longmapsto f(x) = y \text{ に対し, } F : \{x\} \longrightarrow F(\{x\}) = \{f(x)\} = \{y\}$$

5. しかし、同じ記号で表す習慣がある:

F, F^{-1} に対し、それぞれ f, f^{-1} を用いる。すなわち,

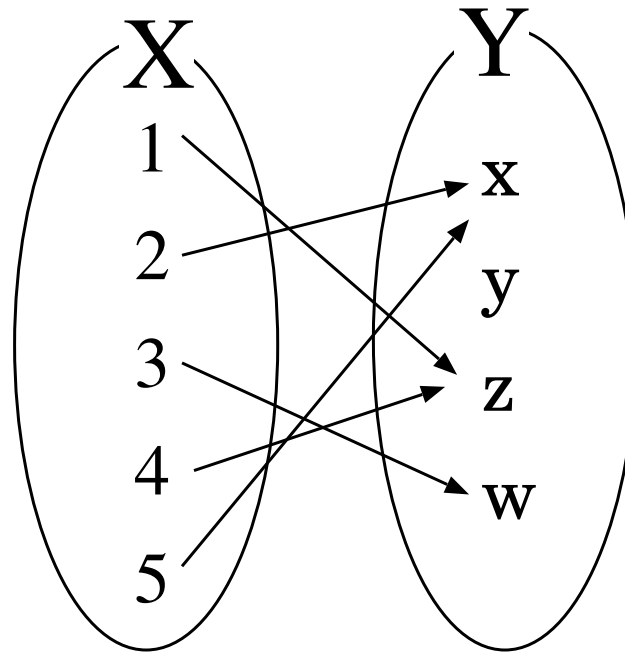
$$f(A) = F(A)$$

$$f^{-1}(B) = F^{-1}(B)$$

例 43. (象 と 原象 (逆象)) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{x, y, z, w\}$ とする。

写像 $f : X \longrightarrow Y$ を図のように定義する。このとき、

$f(\{1, 2, 4\})$, $f(\{1, 3, 5\})$, $f^{-1}(\{x, y, w\})$, $f^{-1}(\{y, z\})$
をそれぞれ外延的記法で表せ。



(解) $f(\{1, 2, 4\}) = \{x, z\}$, $f(\{1, 3, 5\}) = \{x, z, w\}$,

$f^{-1}(\{x, y, w\}) = \{2, 5, 3\}$, $f^{-1}(\{y, z\}) = \{1, 4\}$.

定理 44. X, Y を集合とし、 $f : X \longrightarrow Y$ とする。

X の任意の部分集合 A, B に対し、以下のことを示せ。

1. $A \subseteq B$ ならば $f(A) \subseteq f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
4. $f(X - A) \supseteq f(X) - f(A) (= f(X) \cap (f(A))^c)$.
5. $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$.

1. $A \subseteq B$ ならば $f(A) \subseteq f(B)$

(証明) (任意の $y \in f(A)$ に対し, $y \in f(B)$ を示せばよい)

任意の $y \in f(A)$ に対し, $f(A)$ の定義より,

$f(x) = y$ となる $x \in A$ が存在する。

仮定 $A \subseteq B$ より, $x \in A \subseteq B$ であるから, $x \in B$.

ゆえに, $f(B)$ の定義より, $y = f(x) \in f(B)$. ■

2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$

(証明) $\subseteq$) 任意の $y \in f(A \cup B)$ に対し, $f(A \cup B)$ の定義より,
 $f(x) = y$ となる $x \in A \cup B$ が存在する.

「 $x \in A$ ならば $y = f(x) \in f(A)$ 」または

「 $x \in B$ ならば $y = f(x) \in f(B)$ 」

ゆえに、 $y \in f(A) \cup f(B)$.

$\supseteq$) 任意の $y \in f(A) \cup f(B)$ に対し、

「 $y \in f(A)$ ならば $f(x) = y$ となる $x \in A$ が存在する」または

「 $y \in f(B)$ ならば $f(x) = y$ となる $x \in B$ が存在する」

したがって、 $x \in A \cup B$ であり、 $y = f(x) \in f(A \cup B)$.

以上より、 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ は成り立つ. ■

3. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

(証明)

任意の $y \in f(A \cap B)$ に対し, $f(x) = y$ となる $x \in A \cap B$ が存在する。

$x \in A$ かつ $x \in B$ より, $y = f(x) \in f(A)$ かつ $y = f(x) \in f(B)$.

ゆえに, $y \in f(A) \cap f(B)$ より, $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ が成り立つ。

■

左辺 $\supset$ 右辺 が成り立たない例 (反例):

$X = \{1, 2\}, Y = \{y\}$ とし, X から Y への写像 f を $f(1) = f(2) = y$ とする. そして, $A = \{1\}, B = \{2\} \subseteq X$ とする. このとき,

左辺: $A \cap B = \phi$ より, $f(A \cap B) = \phi$

右辺: $f(A) \cap f(B) = \{y\}$

ゆえに, $y \in f(A) \cap f(B)$ に対し, $y \notin \phi = f(A \cap B)$. ■

$$4. \quad \underline{f(X - A) \supseteq f(X) - f(A) (= f(X) \cap (f(A))^c)}$$

(証明) 任意の $y \in (f(X) - f(A))$ に対し、 $y \in f(X)$ かつ $y \notin f(A)$.

そこで、 x を $f(x) = y$ とすると、 $x \in X$ かつ $x \notin A$.

$x \notin A$ より、 $x \in A^c$.

したがって、 $x \in X \cap A^c = X - A$. ゆえに、 $y = f(x) \in f(X - A)$. ■

左辺 $\subseteq$ 右辺 が成り立たない例 :

$X = \{1, 2\}, Y = \{y\}$ とし、 X から Y への写像 f を $f(1) = f(2) = y$ とする. そして、 $A = \{1\} \subseteq X$ とする. このとき、

左辺: $X - A = X \cap A^c = \{2\}$ より、 $f(X - A) = \{y\}$

右辺: $f(X) - f(A) = f(X) \cap (f(A))^c = \{y\} \cap \{y\}^c = \{y\} \cap \emptyset = \emptyset$

ゆえに、 $y \in f(X - A)$ に対し、 $y \notin \emptyset = f(X) - f(A)$. ■

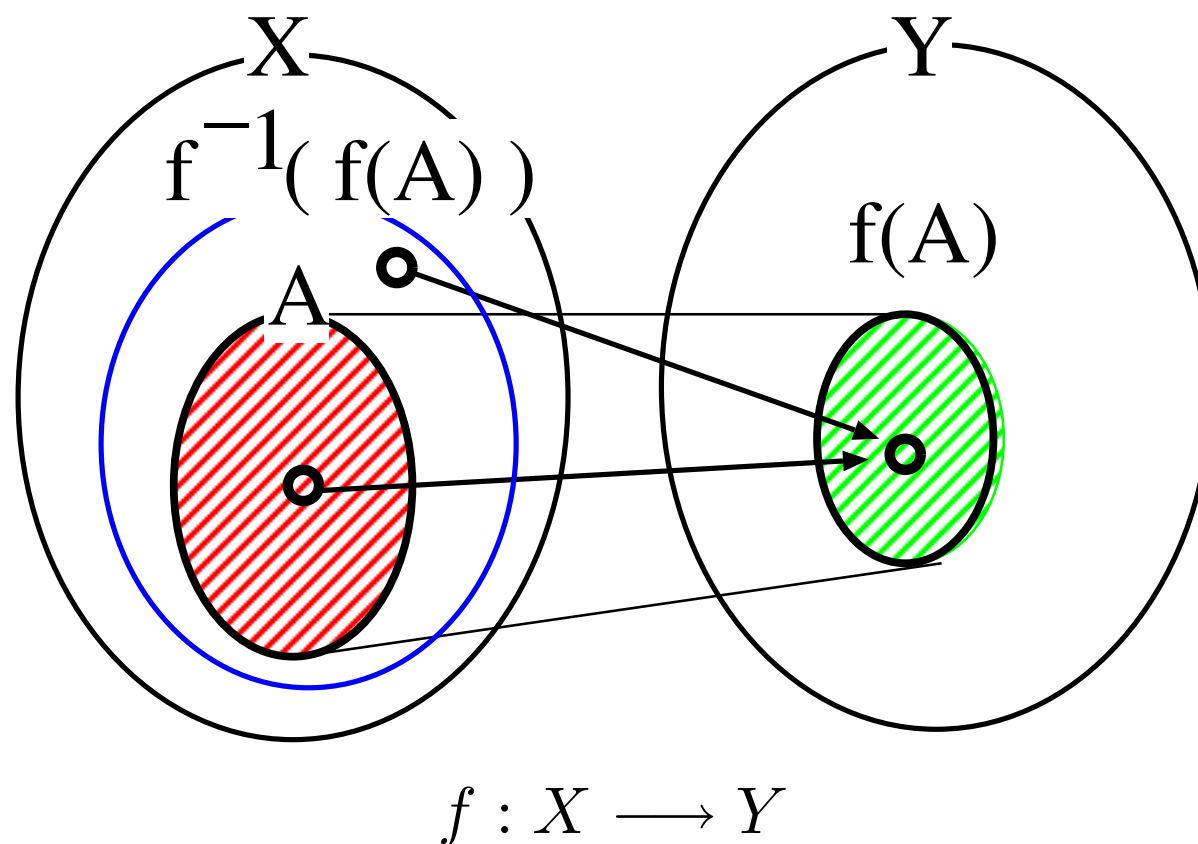
5. $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$

(証明) $\supseteq$ を示す。 任意の $x \in A$ に対し、 $y = f(x) \in Y$ とすると、

$f(A)$ の定義より、 $y \in f(A)$.

次に、 $f^{-1}(f(A))$ の定義より、

$x \in \{x \mid f(x) = y \in f(A)\} = f^{-1}(f(A))$. ■



(f が単射である場合は、 $f^{-1}(f(A)) = A$ が成り立つ):

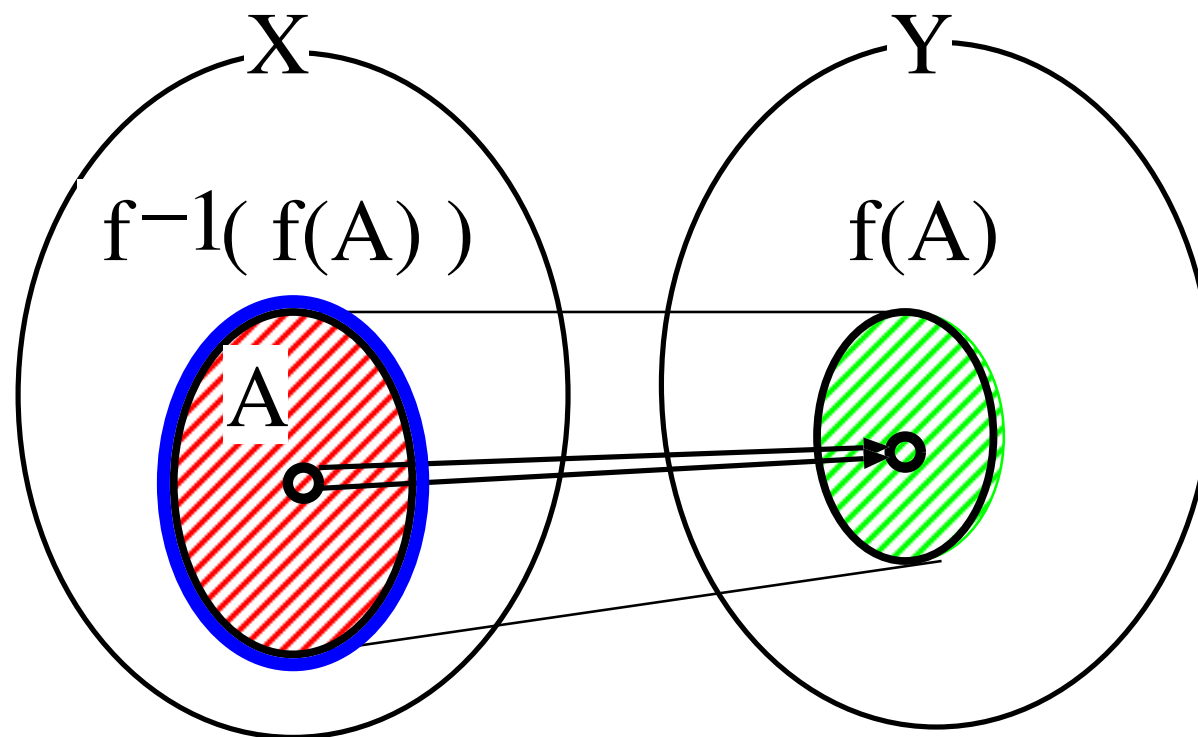
$\subseteq$) を示す。任意の $x \in f^{-1}(f(A))$ に対し、 $y = f(x) \in Y$ とする。

$f^{-1}(f(A))$ の定義より、 $y = f(x) \in f(A)$ 。

次に、 $f(A)$ の定義より、 $f(a) = y = f(x)$ となる $a \in A$ が存在する。

f は単射であるから、 $f(a) = f(x)$ ならば $x = a$ 。

ゆえに、 $x = a \in A$ 。■



定理 45. X, Y を集合とし、 $f : X \longrightarrow Y$ とする。

Y の任意の部分集合 A, B に対し、以下のことを示せ。

1. $A \subseteq B$ ならば $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.
2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
4. $f^{-1}(Y - B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) (= f^{-1}(Y) \cap (f^{-1}(B))^c)$.
5. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

1. $A \subseteq B$ ならば $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$

(証明)

任意の $x \in f^{-1}(A)$ に対し、 $f^{-1}(A)$ の定義より、 $f(x) \in A$.

仮定 $A \subseteq B$ より、 $f(x) \in A \subseteq B$ であるから、 $f(x) \in B$.

ゆえに、 $f^{-1}(B)$ の定義より、 $x \in f^{-1}(B)$. ■

2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

(証明)

$\subseteq$) 任意の $x \in f^{-1}(A \cup B)$ に対し、 $f^{-1}(A \cup B)$ の定義より、
 $f(x) \in A \cup B$.

「 $f(x) \in A$ ならば $x \in f^{-1}(A)$ 」 または

「 $f(x) \in B$ ならば $x \in f^{-1}(B)$ 」

以上より、 $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

$\supseteq$) 任意の $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ に対し、

「 $f^{-1}(A)$ の定義より、 $x \in f^{-1}(A)$ ならば $f(x) \in A$ 」 または

「 $f^{-1}(B)$ の定義より、 $x \in f^{-1}(B)$ ならば $f(x) \in B$ 」

したがって、 $f(x) \in A \cup B$.

ゆえに、 $f^{-1}(A \cup B)$ の定義より、 $x \in f^{-1}(A \cup B)$. ■

3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

(証明)

$\subseteq$) 任意の $x \in f^{-1}(A \cap B)$ に対し、 $f^{-1}(A \cap B)$ の定義より、
 $f(x) \in A \cap B$.

したがって、 $f(x) \in A \cap B$ ならば $x \in f^{-1}(A)$ かつ $x \in f^{-1}(B)$.

ゆえに、 $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

$\supseteq$) 任意の $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ に対し、
 $f^{-1}(A)$ と $f^{-1}(B)$ の定義より、 $f(x) \in A$ かつ $f(x) \in B$.

したがって、 $f(x) \in A \cap B$.

ゆえに、 $f^{-1}(A \cap B)$ の定義より、 $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

4. $f^{-1}(Y - B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B)(= f^{-1}(Y) \cap (f^{-1}(B))^c)$

(証明)

$\subseteq$ 任意の $x \in f^{-1}(Y - B)$ に対し、

$f^{-1}(Y - B)$ の定義と差集合の定義より、 $f(x) \in Y - B = Y \cap B^c$.

すなわち、 $f(x) \in Y$ かつ $f(x) \in B^c$.

i) $f^{-1}(Y)$ の定義より、 $x \in f^{-1}(Y)$.

ii) $f(x) \in B^c$ ならば $f(x) \notin B$.

さらに、 $f^{-1}(B)$ の定義より、 $f(x) \notin B$ ならば $x \notin f^{-1}(B)$.

したがって、 $x \in (f^{-1}(B))^c$.

ゆえに、 $x \in f^{-1}(Y)$ かつ $x \in (f^{-1}(B))^c$.

以上より、 $x \in f^{-1}(Y) \cap (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B)$.

$$\underline{f^{-1}(Y - B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B)(= f^{-1}(Y) \cap (f^{-1}(B))^c)}$$

$\supseteq$) 任意の $x \in f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) \cap (f^{-1}(B))^c$ に対し、

i) $f^{-1}(Y)$ の定義より、 $f(x) \in Y$.

ii) $x \in (f^{-1}(B))^c$ より、 $x \notin f^{-1}(B)$ であり、

$f^{-1}(B)$ の定義より、 $f(x) \notin B$. すなわち、 $f(x) \in B^c$.

したがって、 $f(x) \in Y$ かつ $f(x) \in B^c$.

ゆえに、 $f(x) \in Y \cap B^c = Y - B$.

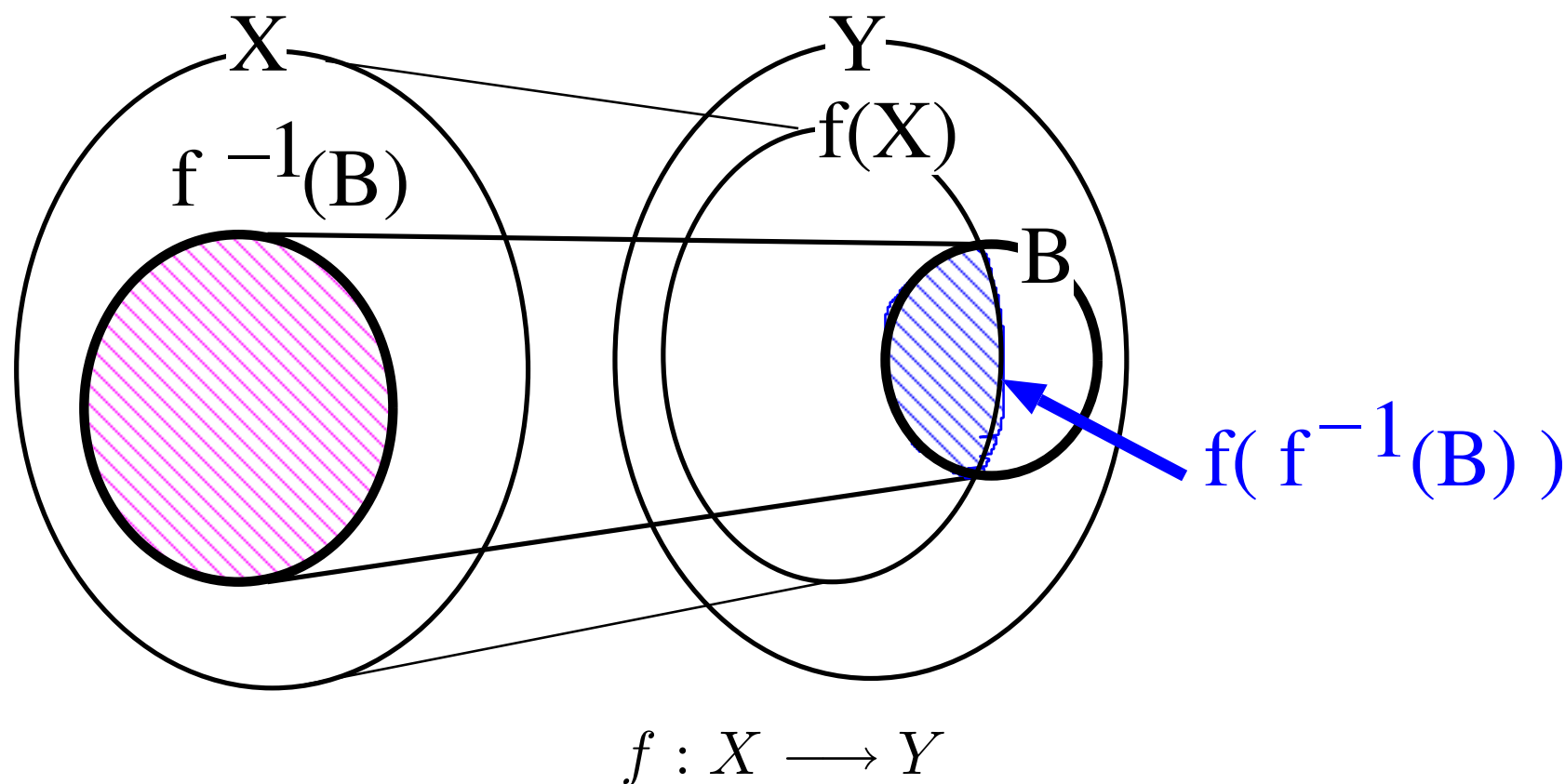
最後に、 $f^{-1}(Y - B)$ の定義より、 $x \in f^{-1}(Y - B)$. ■

5. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

(証明) $\subseteq$) を示す。

任意の $y \in f(f^{-1}(B))$ に対し、 $f(f^{-1}(B))$ の定義より、
 $f(x) = y$ となる $x \in f^{-1}(B)$ が存在する。

$f^{-1}(B)$ の定義より、 $x \in f^{-1}(B)$ ならば $y = f(x) \in B$. ■

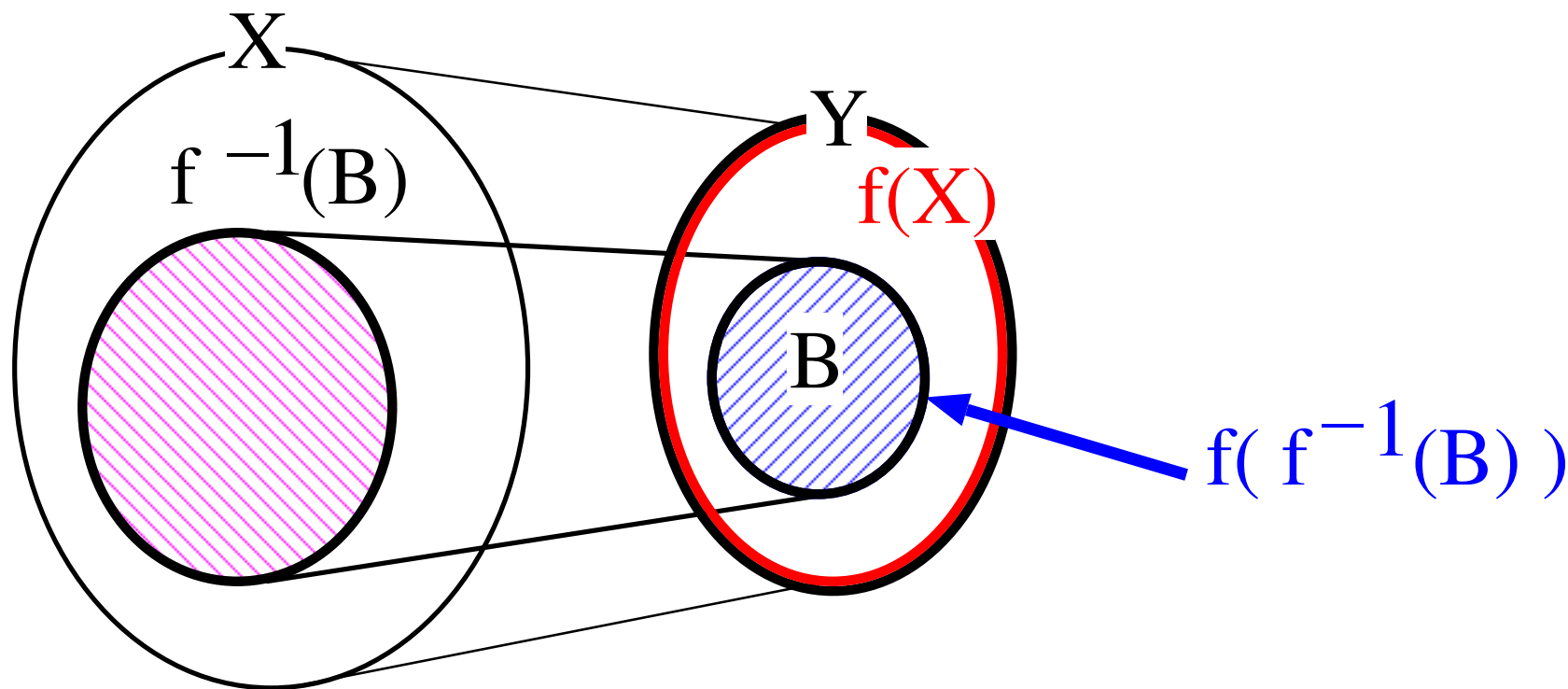


(f が全射である場合は、 $f(f^{-1}(B)) = B$ が成り立つ) :

$\supseteq$) を示す。任意の $y \in B \subseteq Y$ に対し、 f は全射であるから、 $f(x) = y \in B$ となる $x \in X$ が存在する。

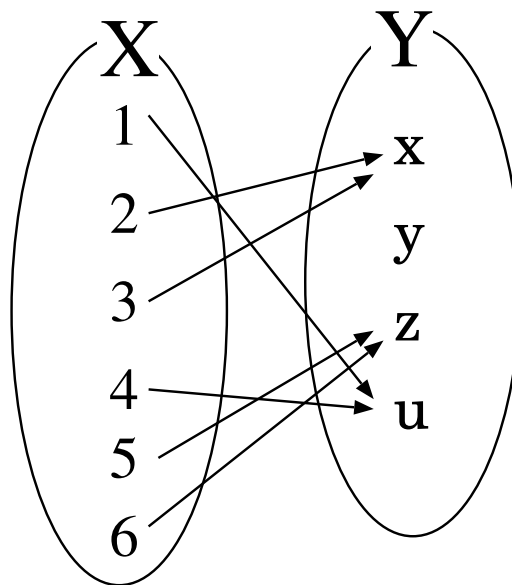
$f^{-1}(B)$ の定義より、 $f(x) \in B$ ならば $x \in f^{-1}(B)$ 。

さらに、 $f(f^{-1}(B))$ の定義より、 $x \in f^{-1}(B)$ ならば $f(x) \in f(f^{-1}(B))$ である。ゆえに、 $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. ■



例 46. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{x, y, z, u\}$ とする。

写像 $f : X \longrightarrow Y$ を図のように定義する。



1. $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 6\} \subseteq X$ とするとき、以下を確かめよ。

i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, ii) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$,

iii) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$.

2. $A = \{x, y\}$, $B = \{y, u\} \subseteq Y$ とするとき、以下を確かめよ。

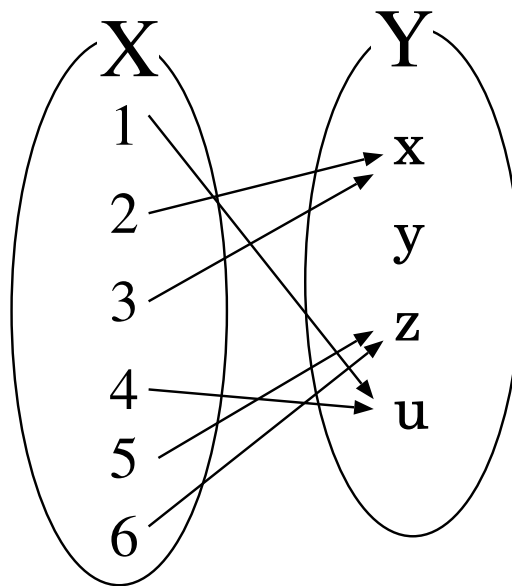
i) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, ii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,

iii) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

$$\mathbf{i)} \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

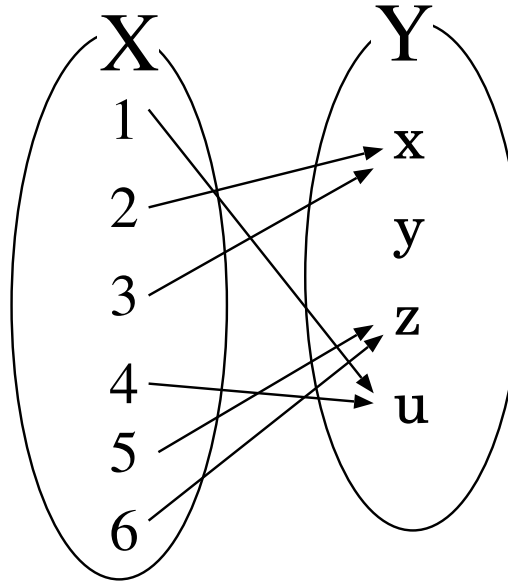
$$\mathbf{ii)} \quad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

$$A = \{2, 4, 5\}, \quad B = \{1, 4, 6\} \subseteq X$$



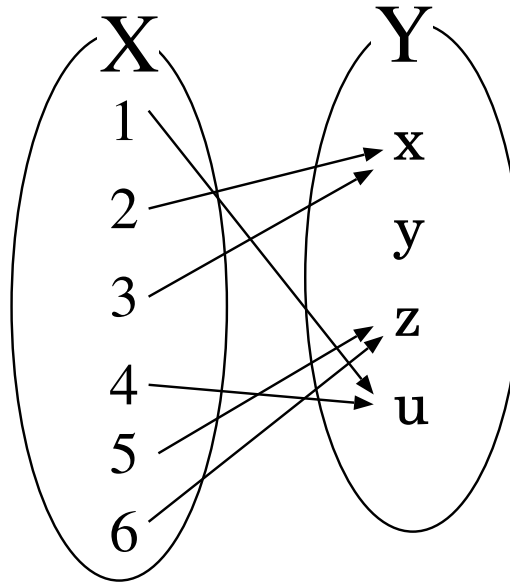
ii) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

$A = \{2, 4, 5\}, B = \{1, 4, 6\} \subseteq X$



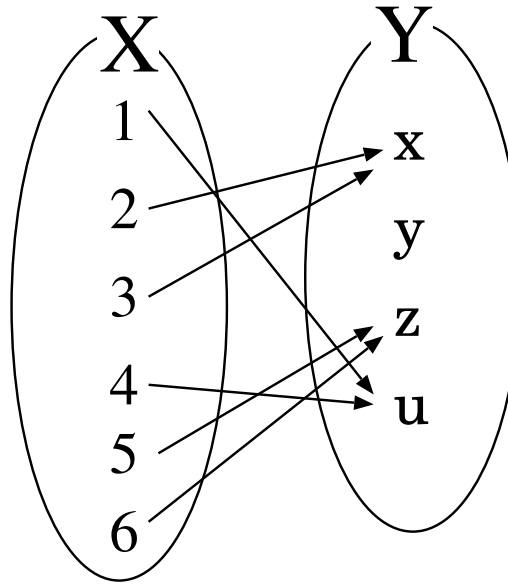
iii) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$

$A = \{2, 4, 5\} \subseteq X$



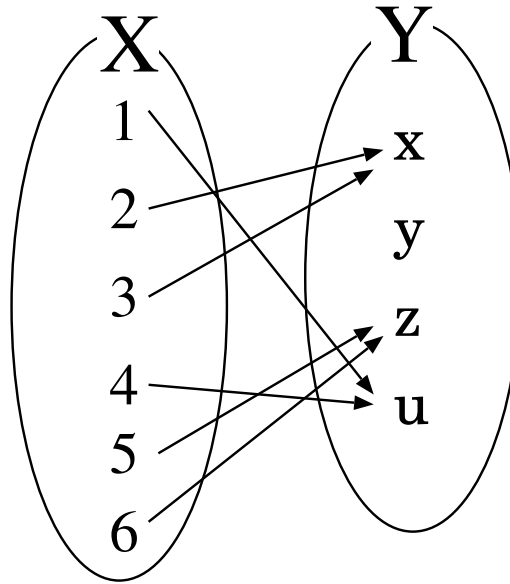
$$\mathbf{i)} \ f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad \mathbf{ii)} \ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$A = \{x, y\}, \ B = \{y, u\} \subseteq Y$$



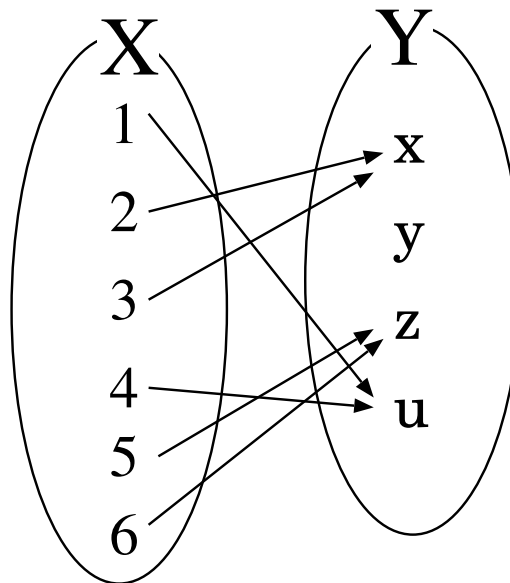
ii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

$A = \{x, y\}, B = \{y, u\} \subseteq Y$



iii) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

$B = \{y, u\} \subseteq Y$

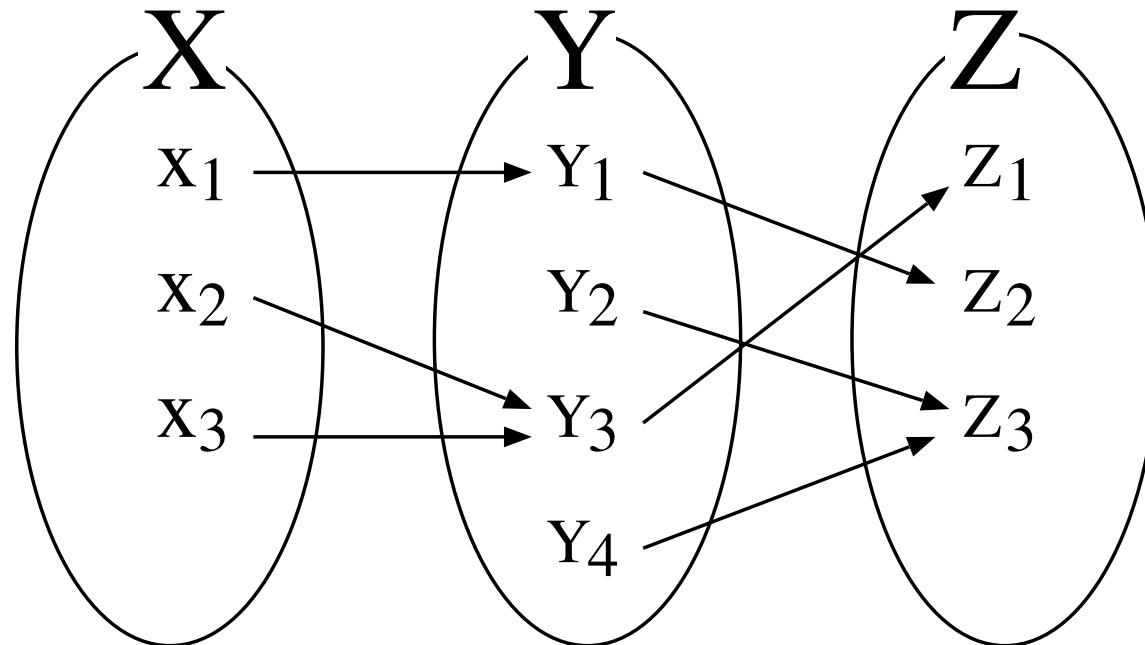


定義 47. (合成写像) X, Y, Z を空でない集合とする。

写像 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ に対し、それらの 合成写像 $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ を、
 $x \in X$ に対し、 $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ と定義する。

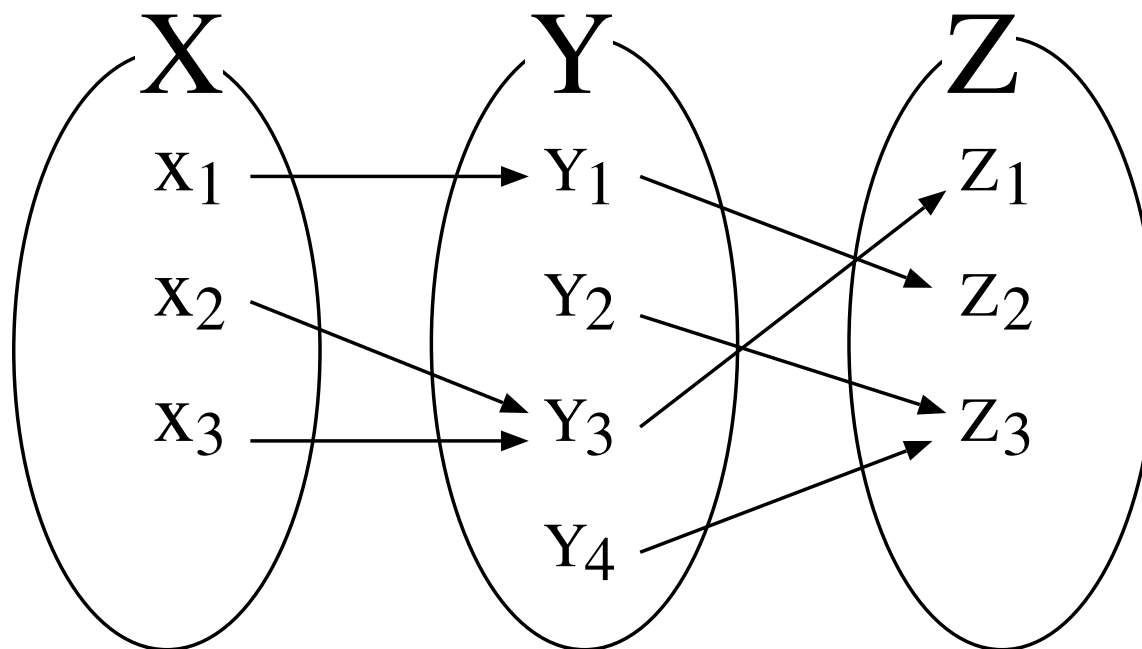
(例)

写像 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ より、合成写像 $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ が得られる。



$$f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z$$

例 48. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ とする。
写像 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ を図のように定義する。



$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) = z_2.$$

$$(g \circ f)(x_2) = g(f(x_2)) = g(y_3) = z_1.$$

$$(g \circ f)(x_3) = g(f(x_3)) = g(y_3) = z_1.$$

定理 49. (合成写像の結合律) X, Y, Z, W を空でない集合とする。

写像 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ に対し、

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

が成り立つ。

(証明)

(任意の $x \in X$ に対し、 $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$ が成り立つことを示せばよい)

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= h((g \circ f)(x)) \\ &= (h \circ (g \circ f))(x). \end{aligned}$$

例 50. 写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ がそれぞれ全単射ならば、次のことが成り立つことを示せ。

1. 合成写像 $g \circ f$ は全単射

2. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

(証明)

1. 合成写像 $g \circ f$ は全単射 ($g \circ f$ が 全射 かつ 単射 であることを示せばよい)

単射)

任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し, $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ とする。

$g(f(x_1)) = (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) = g(f(x_2))$ と書ける。

g は単射より, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ ならば $f(x_1) = f(x_2)$. さらに,

f も単射より, $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$.

ゆえに, 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し,

$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ が言えた。

全射)

(任意の $z \in Z$ に対し, $(g \circ f)(x) = z$ となる $x \in X$ が存在することを示せばよい.)

任意の $z \in Z$ に対し, g は全射より, $g(y) = z$ となる $y \in Y$ が存在する.

さらに, f も全射より, $y \in Y$ に対し, $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する.

したがって, それらを整理すると,

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

と書ける。これより, 任意の $z \in Z$ に対し, $(g \circ f)(x) = z$ となる $x \in X$ が存在するが言えた.

以上より, $g \circ f$ は単射かつ全射であるから, $g \circ f$ は全単射である. ■

$$\underline{2. (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

前記 1 の結果より， $g \circ f$ は全単射であるから逆写像 $(g \circ f)^{-1}$ が存在する。

そこで，任意の $z \in Z$ を取り出し，その z に対し， $(g \circ f)^{-1}(z) = x \in X$ とする。

すなわち， $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ 。

そして， g は全単射であるから， $g^{-1}(z) = f(x) \in Y$ 。

さらに， f も全単射であることより， $f^{-1}(g^{-1}(z)) = x \in X$ 。

したがって， $x = f^{-1}(g^{-1}(z)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$ 。

ゆえに， $(g \circ f)^{-1}(z) = x = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$ が成り立つ。■

例 51. X, Y, Z を空でない集合とし、 $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z$ とする。
このとき、次のことが成り立つことを示せ。

1. 合成写像 $g \circ f$ が単射 **ならば** f は単射である。
2. 合成写像 $g \circ f$ が全射 **ならば** g は全射である。
3. 合成写像 $g \circ f$ が単射 **かつ** f が全射 **ならば** g は単射である。
4. 合成写像 $g \circ f$ が全射 **かつ** g は単射 **ならば** f は全射である。

単射, 全射 を証明する基本 (定義の条件を満たすことを示せばよい)

(**f は単射**) 「任意の $a, b \in X$ に対し、 $f(a) = f(b)$ **ならば** $a = b$ 」 を示せばよい。または、その対偶を示せばよい。

(**f は全射**) 「任意の $y \in Y$ に対し、 $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在すること」を示せばよい。

1. $g \circ f$ が単射ならば f は単射である。 ($X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$)

(証明) (任意の $a, b \in X$ に対し, $f(a) = f(b)$ ならば $a = b$ を示せばよい.)

任意の $a, b \in X$ に対し, $f(a) = f(b)$ ならば, $g(f(a)) = g(f(b))$.

これより, $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(b)) = (g \circ f)(b)$.

仮定より $g \circ f$ は単射であるから, $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$ ならば $a = b$.

ゆえに, $f(a) = f(b)$ ならば $a = b$ と言えるので, f は単射である. ■

2. $g \circ f$ が全射ならば g は全射である。 ($X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$)

(証明) (任意の $z \in Z$ に対し, $g(y) = z$ となる $y \in Y$ が存在することを示せばよい.)

$g \circ f$ が全射であることより,

任意の $z \in Z$ に対し, $(g \circ f)(x) = z$ となる $x \in X$ が存在する.

すると, $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ となる $y = f(x) \in Y$ が存在する.

ゆえに, $z \in Z$ に対し, $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$ となる $y \in Y$ が存在するので, g は全射である。■

3. $g \circ f$ が単射 かつ f が全射ならば g は単射である。 ($X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$)

(証明) (任意の $y_1, y_2 \in Y$ に対し, $g(y_1) = g(y_2)$ ならば $y_1 = y_2$ を示せばよい.)

f は全射であるから, 任意の $y_1, y_2 \in Y$ に対し,
 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ となる $x_1, x_2 \in X$ が存在する.

一方, $g(y_1) = g(y_2)$ ならば

$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) = g(y_2) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$ より,
 $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$.

$g \circ f$ は単射であるから, $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$.

したがって, $x = x_1 = x_2$ とすれば $y_1 = f(x_1) = f(x) = f(x_2) = y_2$ となる.

ゆえに, $g(y_1) = g(y_2)$ ならば $y_1 = y_2$ より, g は単射である. ■

4. $g \circ f$ が全射 かつ g は単射ならば f は全射である。 ($X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$)

(証明) (任意の $y \in Y$ に対し, $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在することを示せばよい.)

任意の $y \in Y$ に対し, $g(y) = z \in Z$ とする.

$g \circ f$ は全射であるから $z \in Z$ に対し, $(g \circ f)(x) = z$ となる $x \in X$ が存在する.

このとき, $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z = g(y)$ である.

g は単射であることより, $g(f(x)) = g(y)$ ならば $f(x) = y$.

ゆえに, 任意の $y \in Y$ に対し, $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在することより, f は全射である。■

定義 52. X を空でない集合とする。

このとき、直積 $X \times X$ から X への写像を X 上の 2項演算 という。

実数の加法 “+” や乗法 “ $\times$ ” は、2つの実数に対して1つの実数に対応させる写像である。

したがって、これらは $\mathbb{R}$ 上の2項演算である。

たとえば、 $\mathbb{R}$ 上の加法における 2項演算 は以下の通り.

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f : (a, b) \longmapsto f(a, b) = a + b$$

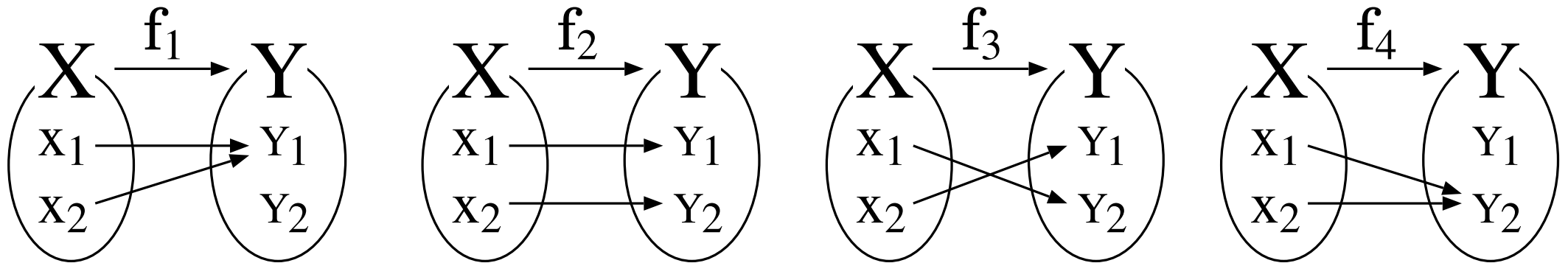
定義 53. 集合 X から集合 Y への写像の全体からなる集合を

$$Y^X := \{f \mid f : X \longrightarrow Y\}$$

と表す。

例 54. $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ に対し、集合 Y^X を外延的記法で表せ。

(解答) $Y^X = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. ただし、 f_1, f_2, f_3, f_4 は図のような写像である。



写像 f_1, f_2, f_3, f_4 .

定理 55. X, Y を空でない有限集合とし、 $|X| = m, |Y| = n$ とする。
 X から Y への写像の数に関し、以下のことが成り立つ。

1. **写像の総数** : $|\{f \mid f : X \longrightarrow Y\}| = |Y^X| = n^m = |Y|^{|X|}$

2. **単射の総数** : $|\{f \mid f : X \longrightarrow Y, f \text{ は単射}\}|$
$$= \begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}, & (m \leq n) \\ 0, & (m > n) \end{cases}$$

3. **全射の総数** : $|\{f \mid f : X \longrightarrow Y, f \text{ は全射}\}|$
$$= \begin{cases} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m, & (m \geq n) \\ 0, & (m < n) \end{cases}$$

証明するに当たり、 X, Y は有限集合であるから、

$X = \{x_1, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ としても一般性は失われない。

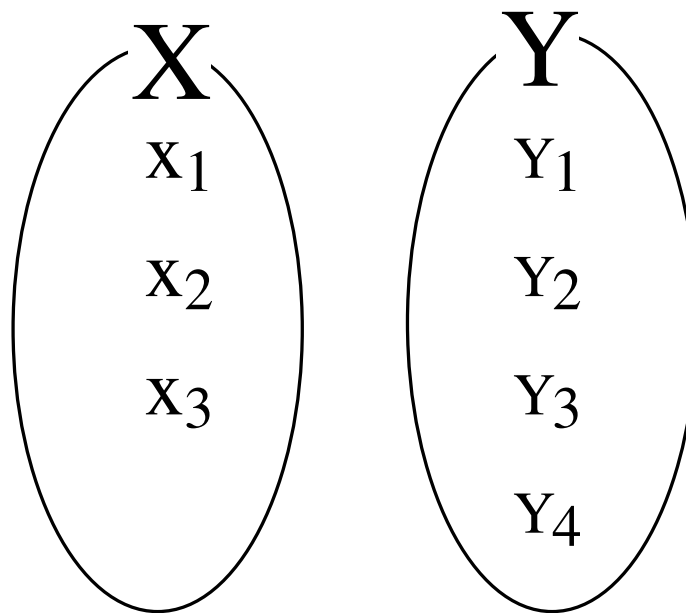
1. 写像の総数 : $|Y|^{|X|} = n^m$ ($X = \{x_1, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$)

(証明) 各 $x_i \in X$ に対し、 $f(x_i) = y_j$ となる対応を指定することで写像は定まる。

x_i に対し、そのような対応を指定する仕方は n 通り。

したがって、 m 個の $x_1, x_1, \dots, x_m$ に対し、 $f(x_i) = y_j$ の値を定める組合せは n^m 通りある。

ゆえに、 $|Y^X| = n^m = |Y|^{|X|}$. ■



2. 単射の総数 : $n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1))$, ($m \leq n$ のとき)

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}.$$

(証明)

単射であるから、

任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し、 $x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$.

したがって、これを満たすには、 $m \leq n$ でなければならない。

したがって、i) $m > n$ のときには 0 個となる。

ii) $m \leq n$ の場合について考える。求める個数は、 x_1 から x_m に対し、順に $f(x_1), \dots, f(x_m)$ の値を $y_1, \dots, y_n$ の中から定める数である。

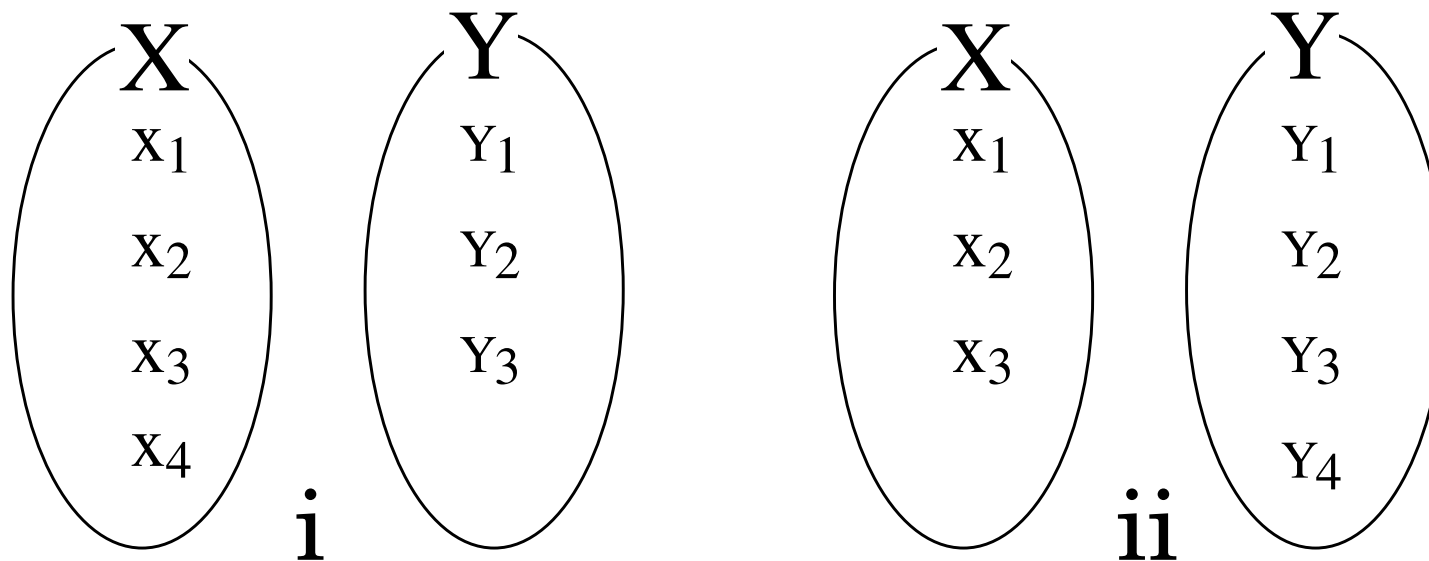
ただし、単射であるから $x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ を満たす必要がある。

すなわち、 n 個の中から m 個を順に取り出す順列の数である。

ゆえに、求める個数は、 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$ となる。■

i) $m > n$ のとき, 0 個.

ii) $m \leq n$ のとき, $n(n-1)(n-2) \cdots (n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$



3. 全射の総数 : $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m$, $(m \geq n)$ のとき)

(証明)

全射であるから、

任意の $y \in Y$ に対し、 $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する。

i) $m < n$ であるとする、 $y_1 \neq y_2$ である $y_1, y_2 \in Y$ に対し、
 $y_1 = f(x) = y_2$ となる $x \in X$ が少なくとも 1 つは存在することになる。

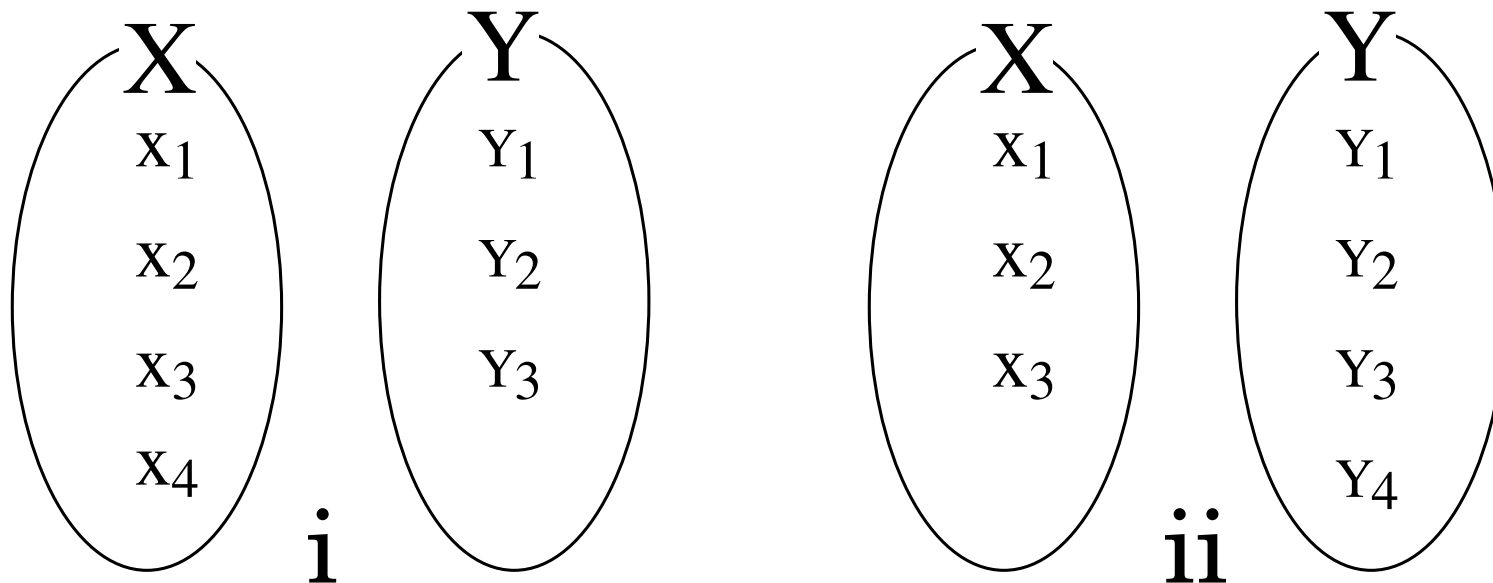
しかし、これは、写像の定義である、 $f(x)$ の値が唯 1 つ定まるということに矛盾する。

ゆえに、 $m < n$ のときは、0 個である。

ii) $m \geq n$ の場合については、ここでの証明は省略する。(例 1.60 を参照) ■

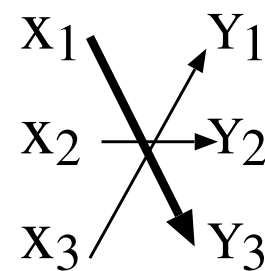
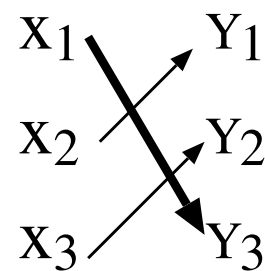
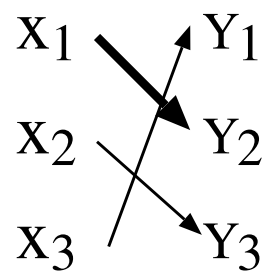
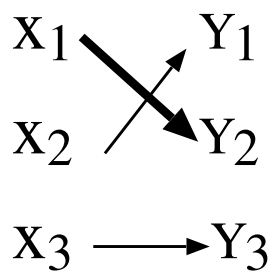
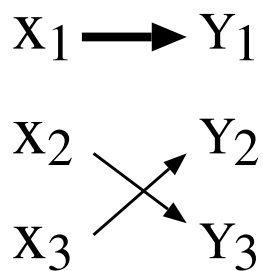
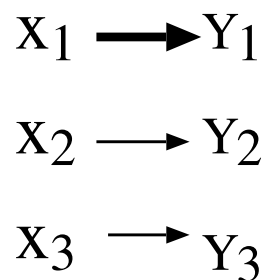
i) $m \geq n$ のとき, $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m$.

ii) $m < n$ のとき, 0 個.



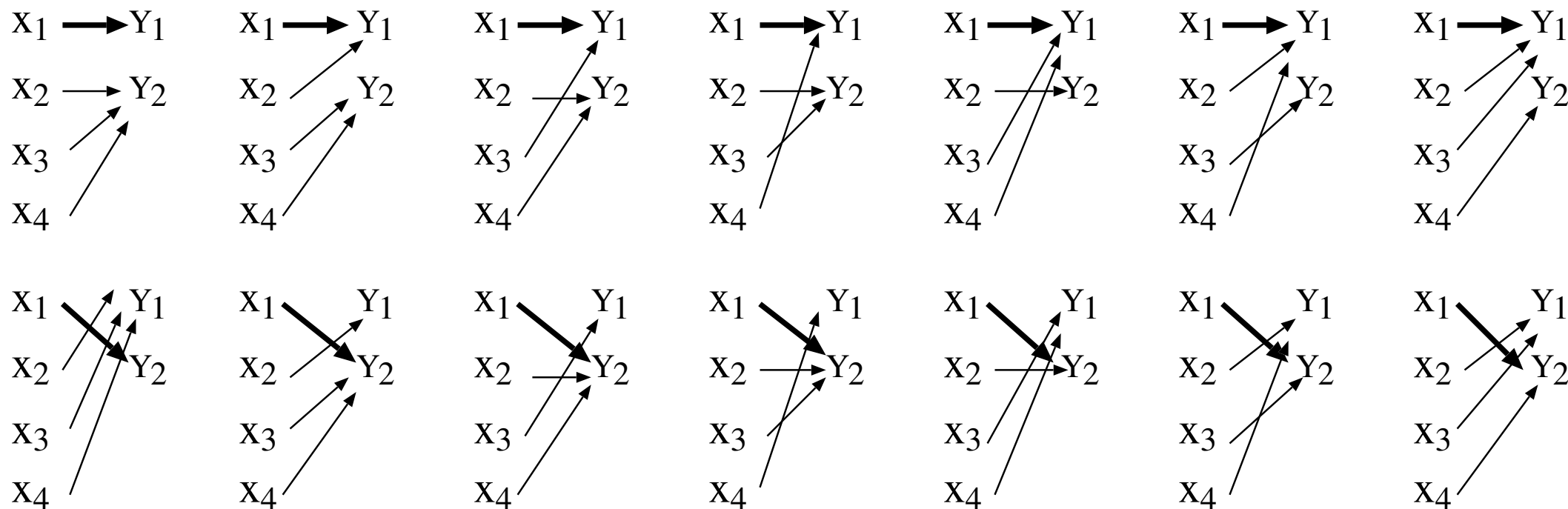
$(m, n) = (3, 2)$ の場合, $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m = 6$.

$$\sum_{k=0}^2 (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^3 = 0 - 2 \cdot 1^3 + 1 \cdot 2^3 = 0 - 2 + 8 = 6$$



$(m, n) = (4, 2)$ の場合, $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m = 14$.

$$\sum_{k=0}^2 (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^4 = 0 - 2 \cdot 1^4 + 1 \cdot 2^4 = 0 - 2 + 16 = 14$$



系 56. X, Y を空でない有限集合とする。

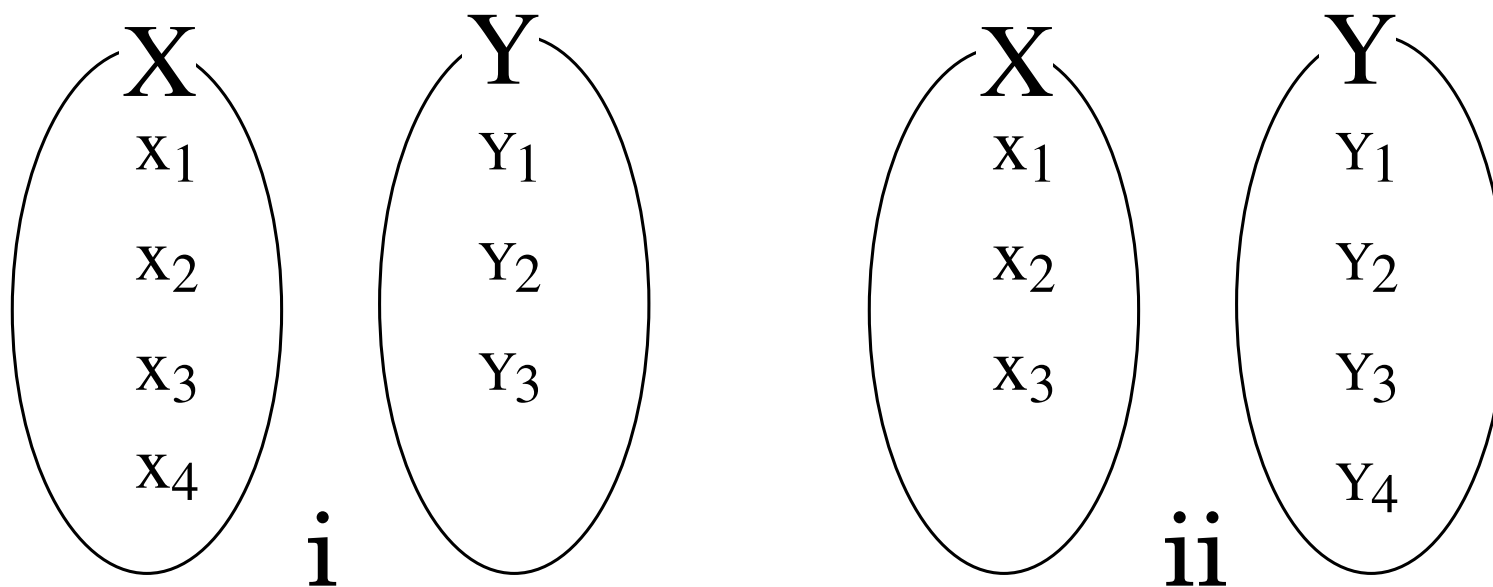
1. “ X から Y への単射が存在する” ことと、 “ $|X| \leq |Y|$ ” は同値である。
2. “ X から Y への全射が存在する” ことと、 “ $|X| \geq |Y|$ ” は同値である。
3. “ X から Y への全単射が存在する” ことと、 “ $|X| = |Y|$ ” は同値である。

1. “ X から Y への単射が存在する” $\Leftrightarrow$ “ $|X| \leq |Y|$ ”

(証明)

単射が存在するならば、その個数は1以上であるから、
 $|X| > |Y|$ ではない。すなわち、 $|X| \leq |Y|$ である。

逆に、 $|X| \leq |Y|$ ならば、 $|Y|!/(|Y| - |X|)! (> 0)$ 個の単射を定義できるので、単射が存在する。■

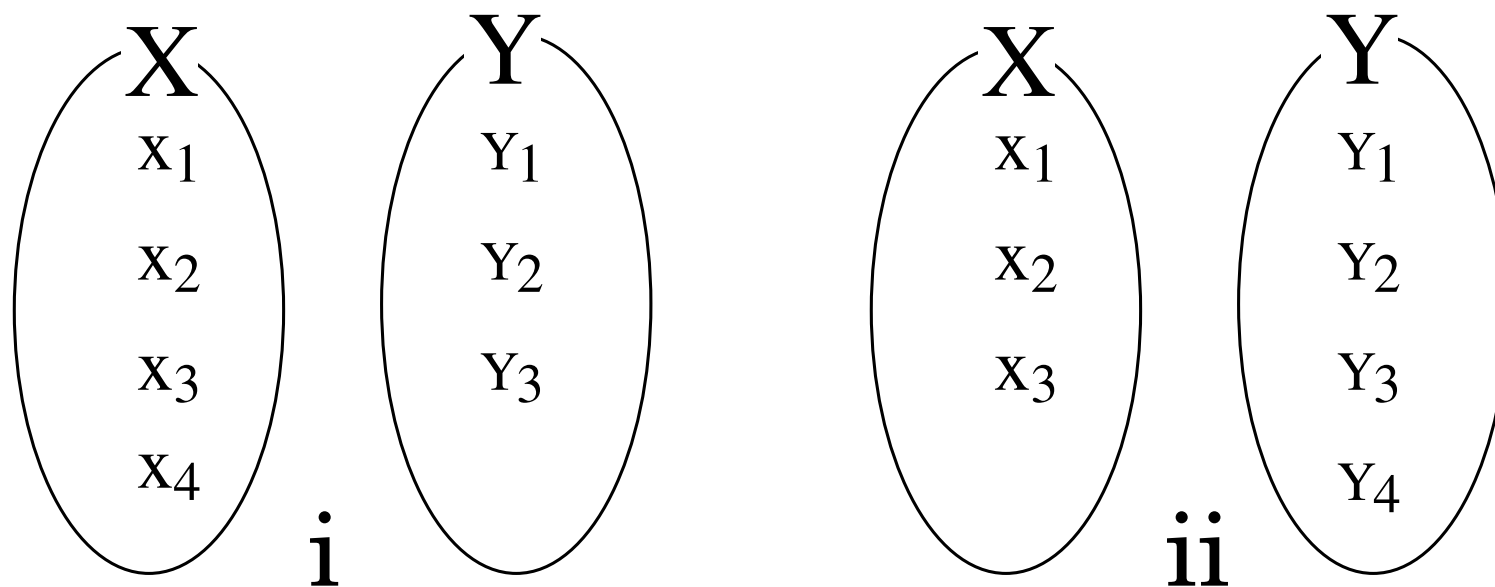


2. “ X から Y への全射が存在する” $\Leftrightarrow$ “ $|X| \geq |Y|$ ”

(証明)

全射が存在するならば、その個数は1以上であるから、
 $|X| < |Y|$ ではない。すなわち、 $|X| \geq |Y|$ である。

逆に、 $|X| \geq |Y|$ ならば、 $\sum_{k=0}^{|Y|} (-1)^{|Y|-k} \binom{|Y|}{k} k^{|X|} (> 0)$ 個の全射を定義できるので、全射が存在する。■

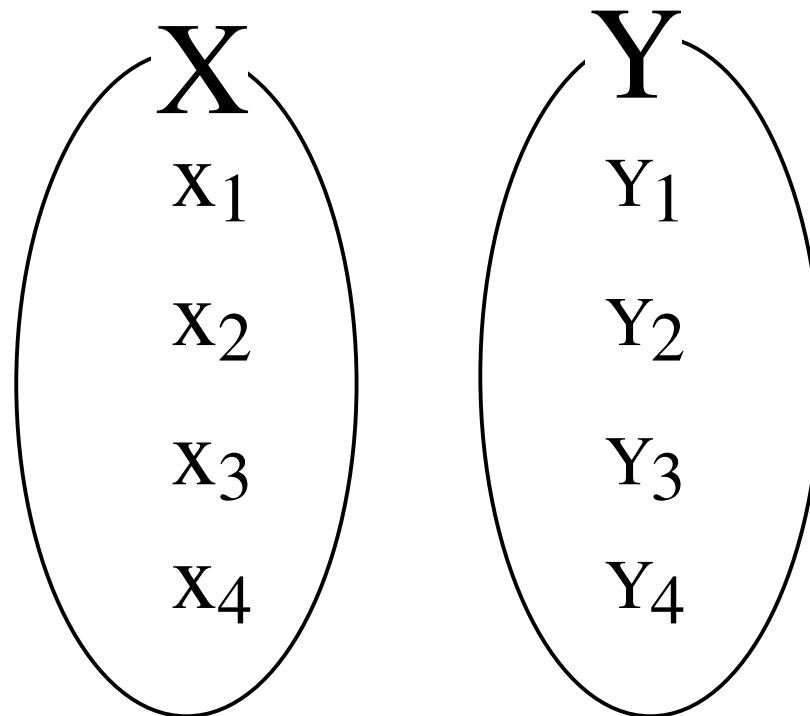


3. “ X から Y への全単射が存在する” $\Leftrightarrow$ “ $|X| = |Y|$ ”

(証明)

全単射が存在するならば、上記 1,2 より、 $|X| = |Y|$ である。

逆に、 $|X| = |Y|$ ならば、 $X = \{x_1, \dots, x_{|X|}\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_{|X|}\}$ に対し、 $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, |X|$ とすることで、 f は全単射となる。ゆえに、全単射が存在する。■



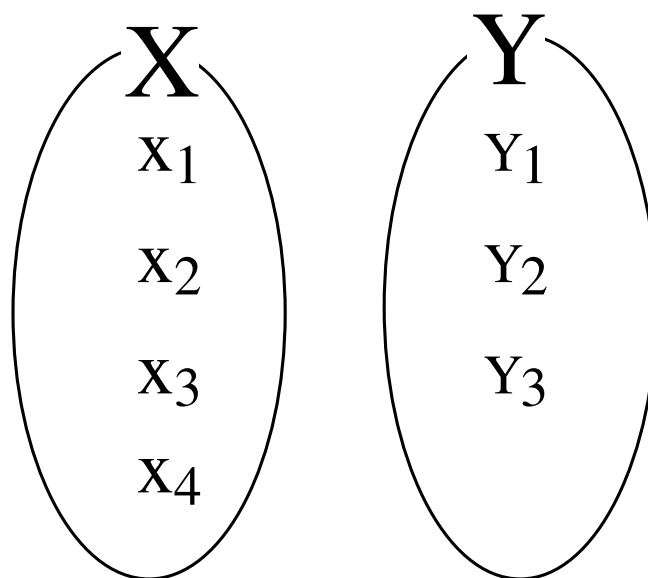
鳩の巣原理:

X, Y を有限集合とする。

$|X| > |Y|$ ならば X から Y への単射は存在しない。

したがって、 $f(x_1) = f(x_2)$ となる、異なる $x_1, x_2 \in X$ が存在する。

これを、一般に、**鳩の巣原理** という。



$$f : X \rightarrow Y$$

定理 57. (**鳩の巣原理**) X, Y を空でない有限集合とする。

$k = \lceil \frac{|X|}{|Y|} \rceil$ とするとき、 X から Y への任意の写像 f に対し、
 $f(x_1) = \cdots = f(x_k)$ を満たす k 個の異なる $x_1, \dots, x_k$ が存在する。■

(**Ceiling記号 と Floor記号**) x を実数とする。

1. $\lceil x \rceil$ とは、「 x 以上の最小の整数」を表す。(**x の天井 (ceiling)**)

$$x = 2.3 \text{ ならば、} \lceil 2.3 \rceil = 3$$

2. $\lfloor x \rfloor$ とは、「 x 以下の最大の整数」を表す。(**x の床 (floor)**)

$$x = 2.3 \text{ ならば、} \lfloor 2.3 \rfloor = 2$$

3. $\lceil x \rceil - x < 1$ が成り立つ。

4. $x - \lfloor x \rfloor < 1$ が成り立つ。

定理 X, Y を空でない有限集合とする。

$k = \lceil \frac{|X|}{|Y|} \rceil$ とするとき、 X から Y への任意の写像 f に対し、

$f(x_1) = \cdots = f(x_k)$ を満たす k 個の異なる $x_1, \dots, x_k$ が存在する。

(証明) 背理法を用いて証明する。

$|X| > |Y|$ とする。このとき、 $k > 0$ である。

X から Y への任意の写像 f に対し、 $f(x_1) = \cdots = f(x_k)$ を満たす k 個の異なる $x_1, \dots, x_k$ が存在しないと仮定する。

すなわち、すべて k 個より少ないとする。すると、

$|X| \leq (k-1)|Y| = (\lceil \frac{|X|}{|Y|} \rceil - 1)|Y| < \frac{|X|}{|Y|}|Y| = |X|$
より、 $|X| < |X|$ となり、矛盾。

ゆえに、 $f(x_1) = \cdots = f(x_k)$ を満たす k 個の異なる $x_1, \dots, x_k$ が存在する。 ■

例 58. 13人以上の人がいれば、必ず同じ生まれ月の人がいることを示せ。

(解答)

13人以上の人の集合を X , 月の集合を $Y = \{1, \dots, 12\}$ とする。

そして、 X に属する人に、その生まれ月を対応させる写像を考える。

$|X| \geq 13 > 12 = |Y|$ であるから、鳩の巣原理の定理より、

少なくとも $\lceil \frac{13}{12} \rceil = 2$ 人の人が同じ生まれ月になる。■

定理 59. X, Y を空でない有限集合とし、 $|X| = |Y|$ とする。このとき、
 X から Y への写像が全射であることと、単射であることは同値である。

(証明) 写像を f とする。

全射 $\rightarrow$ 単射) 全射より、任意の $y \in Y$ に対し、
 $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する。

そこで、 $f(x_1) = f(x_2)$ かつ $x_1 \neq x_2$ となる $x_1, x_2 \in X$ が存在すると仮定すると、 $|X| > |Y|$ となる。

これは、 $|X| = |Y|$ に矛盾。

ゆえに、 $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ である。すなわち、 f は単射である。

全射 ← 単射) 単射より、 $x_1 \neq x_2$ となる任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し、 $f(x_1) \neq f(x_2)$ である。

$|X|$ 個の $f(x) \in Y$ はすべて異なり $|X|$ 個ある。

$|X| = |Y|$ であるから

$Y = \{f(x_i) \mid i = 1, \dots, |X|, \text{ もし } i \neq j \text{ ならば } f(x_1) \neq f(x_2)\}$
と定めることができる。

ゆえに、任意の $y \in Y$ に対し、 $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する。すなわち、 f は全射である。■

濃度 (のうど)

1. 集合 X から集合 Y への全単射が存在するとき、
 X と Y は 対等 であるという。
2. 対等な集合は等しい 濃度 (*Cardinality (Cardinal number)*) をもつという。
3. 集合 X の濃度を $|X|$ と表す。
4. 有限集合の場合、 $|X|$ はその要素数を表す。
5. 有限集合 X, Y に対し、
 X と Y が等しい濃度をもつことと、 $|X| = |Y|$ は同値である。
6. 集合 X から集合 Y への全射が存在するとき、
 $|X|$ は $|Y|$ 以上であるといい、 $|X| \geq |Y|$ と表す。
7. $|X| \geq |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$ のとき、
 $|X|$ は $|Y|$ より大きいといい、 $|X| > |Y|$ と表す。

例 60. 空でない有限集合 X, Y に対し, $|X| = m, |Y| = n$ とする。

このとき, X から Y への全射の総数は $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m$ と書けることを,
以下に厳密な証明ではないが, スケッチする.

1. まず, X から Y への写像の総数は n^m である.
2. 要素数 m の集合 X から要素数 k の部分集合 $B(\subseteq Y)$ への全射の総数を $F(m, k)$ と表す.
3. このとき, n^m 個の写像の中で値域 (終集合) が要素数 k 個の部分集合 $B \subseteq Y$ になるような写像の総数は $\binom{n}{k} F(m, k)$ である.
4. したがって, 写像の総数は $n^m = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} F(m, k)$ と書ける.

(続く)

5. すると、 $F(m, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m$ を n に関する数学的帰納法で証明できる。

$n = 1$ のとき、正しいことを示し、 $n - 1$ まで、正しいと仮定する。

すると、 n のときでも、次式の最後の等号が成り立つことを示すことができる。(文献 [3] の第 1 章末の問題 19(p.41) の解答を参照。)

$$\begin{aligned} F(m, n) &= n^m - \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} F(m, j) \\ &= n^m - \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} \left(\sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} k^m \right) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 61.

有限集合 X の分割とは X の部分集合を要素とする集合 $\{A_1, \dots, A_n\}$ で、次の条件を満たすもののことである。

1. $A_i \neq \phi \ (i = 1, \dots, n),$

2. $\cup_{i=1}^n A_i = X,$

3. $i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = \phi.$

各 A_i を 分割ブロック という。

X から集合 $\{1, \dots, n\}$ への全射の総数を与える公式を用いて、 X を n 個のブロックに分ける分割の総数を示せ。

(解答)

$$\frac{1}{n!} F(|X|, n). \blacksquare$$

References

- [1] 尾関和彦, (情報技術者のための) 離散系数学入門, 共立出版, 2004.
- [2] 尾関和彦, 太田和夫, 國廣昇, “離散数学第一” 及び “離散数学第一演習問題集” 電気通信大学情報通信工学科講義資料, 2004.
- [3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 2003.
- [4] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 2003.
- [5] S. Lipschutz 著, 成嶋弘監訳, 離散数学 (コンピュータサイエンスの基礎数学), オーム社, 2004(H16).
- [6] 小倉久和, 情報の基礎離散数学 (－ 演習を中心とした －), 近代科学社, 2006.
- [7] 町田元, 横森貴, 計算機数学, 森北出版, 1990.

濃度について

1. **有限の濃度**: 0 または 自然数で表される濃度, 有限集合の濃度のこと
2. **無限の濃度**: 無限集合の濃度のこと
3. 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ の濃度は, 無限の濃度.

可算の濃度といい, $\aleph_0$ (アレフ ゼロ) と書く. すなわち, $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

4. 偶数全体の集合を P とすれば, $\mathbb{N}$ と P は対等である.

なぜなら, $f(n) = 2n$ とすれば, f は $\mathbb{N}$ から P への全単射な写像となる.

5. 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ の濃度は, $\aleph_0$ である.

なぜなら, $f(a, b) = a/b$ とすれば, f は $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ から $\mathbb{Q}$ への全射な写像となる. したがって, $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}| = \aleph_0$. 一方, $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{N}| = \aleph_0$ であるから, $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

6. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の濃度も、無限の濃度.

連続の濃度といい, $\aleph$ (アレフ) と書く. すなわち, $|\mathbb{R}| = \aleph$.

7. $\aleph_0 < \aleph$ (Cantor の対角線論法)

8. $\aleph_0$ 以下の濃度をもつ集合を**可算集合**という.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ は可算集合.

9. $\aleph_0$ より大きい濃度をもつ集合を**非可算集合**という.

$\mathbb{R}$ は非可算集合.