離散数学

— 1. 集合と写像 —
— 1.1 集合 —

栗原正純 kuri@ice.uec.ac.jp

(2007/11/14/16:57)

1.1 集合

定義 1. *(集合)*

1. 次のような性質をもつ，“もの” の集まりを集合という．
   - *i.* あるものが集合に属するか，どうかが、明確に判断できる．
   - *ii.* 集合に属する *2* つのものが，同一であるかどうか判断できる．
2. 集合を構成するものを，その集合の要素 *(*あるいは元*(*げん*))* という．
3. もの x が，集合 X の要素であることを，x は X に 属する といい，
   $x \in X$ または $X \ni x$ と表す．
   (x は X に 含まれる，または，X は x を 含む*)*
   $x_1 \in X, x_2 \in X, \ldots, x_n \in X$ を $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ と略記する．

4. もの x が，集合 X の要素でないことを，$x \notin X$ または $X \not\ni x$ と表し，
   x は X に属さないという．
   (x は X に 含まれない，または，X は x を 含まない*)*
5. 集合を要素とする集合を集合族という．

定義 2. *(集合の記法)*

1. 要素 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ からなる集合を $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ と表す．*(*外延的記法*)*
2. $P(x)$ を x に関する条件とする．
   $P(x)$ を満たす x を要素とし，かつ，そのような x だけを要素とする集合を $\{x \mid P(x)\}$ と表す．*(*内延的記法*)*
3. 複数の条件 $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ があるとき、$P_1(x), \ldots, P_n(x)$ をすべて満たす x を要素とし、かつ、そのような x だけを要素とする集合を $\{x \mid P_1(x), \ldots, P_n(x)\}$ と表す。
4. X を集合とするとき、$\{x \mid x \in X,\ P(x)\}$ を $\{x \mid P(x)\}$ と略記する。

注意 3. *(集合の記法)*

1. 中カッコ “ {”, “ } ” を用いる。要素を コンマ “ , ”で区切る．
2. $\{x \mid P(x)\}$ の中の x は、カッコ “ { ”と “ } ” の中だけで通用する変数。したがって，$\{x \mid P(x)\} = \{y \mid P(y)\} = \{z \mid P(z)\}$.

定義 4. *(空集合)*

要素をもたない集合を空(くう)集合とよび、記号 ϕ*(*ファイ*)* で表す。

注意 5. *(空集合)*

1. 空集合 ϕ と集合 $\{\phi\}$ は異なる．
2. ϕ は要素をもたない集合*(* 0 個の要素をもつ集合*)*．
3. $\{\phi\}$ は ϕ という要素をもつ集合*(* 1 個の要素をもつ集合*)*．
4. 空集合を外延的記法で表せば、{ } と書くことができるが、
   通常は用いない。
5. しかし、集合 $\{\phi\}$ を外延的記法で表せば、{ { } } と書ける．

例 6. *(集合の例)*

1. 自然数全体の集まり: $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
2. 10 より小さい素数全体の集まり: $\{2, 3, 5, 7\}$.
   (1 より大きい整数 x が 1 と 自分自身の x 以外に，正の約数をもたないとき，x を素数という．*)*
3. 十分大きい自然数全体の集まり．これは集合ではない。
   集合の定義で示した，条件 *i.* *(*集合に属するかどうか明確に判断できる*)* を満たさない．
4. 次の集合は空集合である: $\{x \mid x \in \mathbf{Z},\ 2x+1=0\}$.
   条件式 $2x+1=0$ を満たす整数は存在しないから．
   ここで，記号 $\mathbf{Z}$ は，整数全体からなる集合を表す．
   条件 $P(x)$ を “ $2x+1=0$ ” とすれば，$\{x \mid x \in \mathbf{Z}, P(x)\}$ と書ける。
   これより，$\{x \mid x \in \mathbf{Z}, P(x)\} = \{y \mid y \in \mathbf{Z}, P(y)\}$ も理解できる．

定義 7. *(部分集合)*

X, Y を集合とする。

X の要素がすべて Y の要素であるとき，X は Y の部分集合であるといい，$X \subseteq Y$ または $Y \supseteq X$ と表す．

X が Y の部分集合であり，かつ，X でない Y の要素が存在するとき，X は Y の真部分集合であるといい，$X \subset Y$ または $Y \supset X$ と表す．

別の言い方をすると、
$X \subseteq Y$ かつ $X \neq Y$ ならば X は Y の真部分集合である．

(例 *)*

集合 X, Y を $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ とすると，

$X \subseteq Y$ であり，さらに，$X \subset Y$ となる．

定義 8. *(特別な集合の記号)*

1. 自然数の全体からなる集合 $\{1, 2, \ldots\}$ を $\mathbf{N}$ と表す．
   (***Natural numbers*** *)*
2. 整数の全体からなる集合: $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ を $\mathbf{Z}$ と表す．
   (***Integers, Zahlen (Zahl (数, number)*** の複数形*))*
3. 有理数の全体からなる集合 $\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z},\ b \neq 0 \right\}$ を $\mathbf{Q}$ と表す．
   (***Rational numbers, Quotient(商)*** *)*
4. 実数の全体からなる集合を $\mathbf{R}$ と表す．
   (***Real numbers*** *)*
5. 複素数の全体からなる集合を $\mathbf{C}$ と表す．
   (***Complex numbers*** *)*
6. このとき、$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ が成り立つ．

定義 9. （$X = Y$）

X, Y を集合とする．

$X \subseteq Y$ かつ $X \supseteq Y$ のとき，X と Y は等しいといい，$X = Y$ と表す．

定義 10. （$X \subseteq Y$ の証明）

集合 X, Y に対し、$X \subseteq Y$ を証明する基本的な方法は、

「 すべての $x \in X$ に対し、$x \in Y$ である 」

ことを示せばよい。

ここで，「 任意の $x \in X$ に対し、$x \in Y$ である 」も同じ意味．

（$X = Y$ の証明）$X = Y$ を証明するには，$X = Y$ の定義より，

「$X \subseteq Y$ かつ $X \supseteq Y$」 を示せばよい．

例 11. 次のことを証明せよ。

1. 任意の集合 X に対し，$X \subseteq X$.

2. 任意の集合 X に対し，$\phi \subseteq X$.

3. $\{x \mid x \in \mathbf{N},\ 3 \leq x^2 \leq 17\} = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ 2 \leq x \leq 4\}$.

4. $\{2, 3, 1\} \subset \{4, 3, 6, 1, 5, 2\}$.

5. $\{1, 2, 1, 3, 4, 2\} = \{1, 2, 3, 4, 4, 3\}$.

1. 任意の集合 X に対し、$X \subseteq X$.

(証明) (「任意の $x \in X$ に対し，$x \in X$」を示せばよい.)

任意の $x \in X$ に対し、$x \in X$ であることは、明らか。

ゆえに、$X \subseteq X$ が成り立つ．■

2. 任意の集合 X に対し、$\phi \subseteq X$.

(証明) (「任意の $x \in \phi$ に対し，$x \in X$」を示せばよい.)

「$x \in \phi$ ならば $x \in X$」の対偶「$x \notin X$ ならば $x \notin \phi$」が正しいことを示す。

ϕ は，要素をもたない集合であるから，常に，$x \notin \phi$ が成り立つ．

したがって，対偶は常に正しい．ゆえに，$\phi \subseteq X$ が成り立つ．■

(命題「 P ならば Q 」に対し，その主張 P, Q の否定を $\neg P, \neg Q$ と表すと，命題の対偶は「 $\neg Q$ ならば $\neg P$ 」となる．)

3. $\{x | x \in \mathbf{N},\ 3 \leq x^2 \leq 17\} = \{x | x \in \mathbf{N},\ 2 \leq x \leq 4\}$.

(証明) (左辺 $\subseteq$ 右辺 かつ 左辺 $\supseteq$ 右辺 を示せばよい.)

まず，$1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9,\ 4^2 = 16,\ 5^2 = 25$ より，左辺 $= \{2, 3, 4\}$.

一方，右辺 $= \{2, 3, 4\}$.

したがって，任意の左辺の要素は，右辺に属する．ゆえに，左辺 $\subseteq$ 右辺.

逆も，同様に成り立つから，左辺 $\supseteq$ 右辺．ゆえに，左辺 $=$ 右辺．■

4. $\{2, 3, 1\} \subset \{4, 3, 6, 1, 5, 2\}$.

(証明) (左辺 $\subseteq$ 右辺 かつ 左辺 $\neq$ 右辺 を示せばよい.)

任意の左辺の要素は，右辺に属するから，左辺 $\subseteq$ 右辺.

一方，右辺の要素 4 は左辺に属さないから，左辺 $\neq$ 右辺.

ゆえに， 左辺 $\subset$ 右辺．■

5. $\{1, 2, 1, 3, 4, 2\} = \{1, 2, 3, 4, 4, 3\}$.

(証明)

(左辺 $\subseteq$ 右辺 かつ 左辺 $\supseteq$ 右辺 を示せばよい.

さらに，左辺 $\subseteq$ 右辺 を示すには，

「任意の左辺の要素は，右辺に属する」を示せばよい.) ■

(注意)

1. 外延的記法で表すとき，要素の順序を入れ換えても，集合は変化しない.
2. 同じ要素を重複して列挙しても，その表す集合は，重複がない場合と同じ.
   (集合の条件 ii.(集合に属する2つの要素が同一かどうか判断できる)により，重複した場合は同一とみなす)
3. すなわち，$\{1, 2, 1, 3, 4, 2\} = \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 4, 3\}$.

例 12. 次のことが正しいかどうかを判定せよ。

1. $\phi \subseteq \phi$

2. $\phi \in \phi$

3. $\phi \subseteq \{\phi\}$

4. $\phi \in \{\phi\}$

5. $\{\phi\} \subseteq \{\phi\}$

6. $\{\phi\} \in \{\phi\}$

1. $\phi \subseteq \phi$

(解答) 任意の集合 X に対し、$\phi \subseteq X$ である.

そこで，$X = \phi$ とすると $\phi \subseteq \phi$. ゆえに、正しい。

2. $\phi \in \phi$

(解答) 空集合 ϕ の要素数は0 より，要素 ϕ を持つことができない．ゆえに、正しくない。

3. $\phi \subseteq \{\phi\}$

(解答) 任意の集合 X に対し、$\phi \subseteq X$ である.

そこで，$X = \{\phi\}$ とすると $\phi \subseteq \{\phi\}$. ゆえに、正しい。

4. $\phi \in \{\phi\}$

(解答) 集合 X を $X = \{x\}$ とすれば，$x \in X$ である.

$x = \phi$ とすれば，$\phi \in X = \{\phi\}$. ゆえに，正しい．

5. $\{\phi\} \subseteq \{\phi\}$

(解答) 任意の集合 X に対し，$X \subseteq X$. $X = \{\phi\}$ とすれば $\{\phi\} \subseteq \{\phi\}$.

ゆえに，正しい．

6. $\{\phi\} \in \{\phi\}$

(解答) $\{\phi\}$ の要素は ϕ だけであり，$\{\phi\}$ を要素としてもたない．

ゆえに，正しくない。

(定義の記号)

記号 “ $:=$ ” を “ 定義する ” という意味で用いる。(コロン イコール)

$A := B$ とは、既知の B によって A を新しく定義することを意味する。

すなわち、B によって A を定義する。

$B =: A$ と記述しても、$A := B$ と同じ意味である。

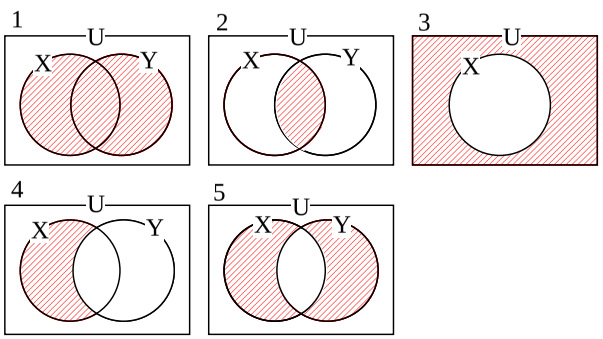
定義 13. 集合の間に、次のような 演算 “ $\cup, \cap, +, c, -, \ominus$ ” を考える。
U を集合とし、$X \subseteq U, Y \subseteq U$ とする。

1. $X \cup Y := \{x \mid x \in X$ または $x \in Y\}$. *(X と Y の和集合)*
2. $X \cap Y := \{x \mid x \in X$ かつ $x \in Y\}$. *(X と Y の積集合, 共通集合)*
3. $X \cap Y = \phi$ のとき、$X \cup Y$ を X と Y の直和といい、
   $X + Y$ と表すことがある。
4. $X^c := \{x \mid x \in U, x \notin X\}$. *($U$ に関する X の補集合, complement)*
5. $X - Y := X \cap Y^c$. *(X と Y の 差集合)* (資料要訂正 p.3, 定義 1.13の6「象 → 称」)
6. $X \ominus Y := (X - Y) \cup (Y - X)$. *($X$ と Y の対称差)*

(注意)

1. 上記定義における集合 U を全体集合という。
2. “$x \in X$ または $x \in Y$” は , “$x \in X$ かつ $x \in Y$” となる場合を含む。
   $X \cap Y \subseteq X \cup Y$

ベン図(Venn diagram)

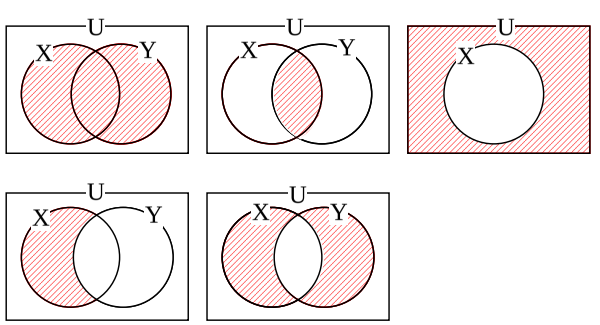


1. $X \cup Y$, **2.** $X \cap Y$, **3.** X^c, **4.** $X - Y = X \cap Y^c$,
5. $X \ominus Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.

(注意: 直観的に理解する場合, ベン図は便利ではあるが, 証明するときの本質には用いない)

例 14. $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$, $X = \{3,4,5\}$, $Y = \{1,2,3,4,6\}$ とするとき、$X \cup Y$, $X \cap Y$, X^c, $X - Y$, $X \ominus Y$ をそれぞれ外延的記法で表せ。

(解答) $X \cup Y = \{1,2,3,4,5,6\}$, $X \cap Y = \{3,4\}$, $X^c = \{1,2,6,7,8\}$,
$X - Y = \{5\}$, $X \ominus Y = \{1,2,5,6\}$.



定理 15. U を全体集合とする。
U の任意の部分集合 X に対し、以下が成立する。

1. $X \cup U = U$, $X \cap U = X$.
2. $X \cup \phi = X$, $X \cap \phi = \phi$.
3. $X \cup X^c = U$, $X \cap X^c = \phi$.
4. $(X^c)^c = X$.

1. $X \cup U = U$

   (証明) ($X \cup U \subseteq U$ かつ $X \cup U \supseteq U$ を示せばよい)
   仮定より , $X \subseteq U$ である .
   まず , $\subseteq$ を示す:
   任意の $x \in X \cup U$ に対し, $X \subseteq U$ より, $x \in U$. ゆえに, $X \cup U \subseteq U$.
   次に , $\supseteq$ を示す:
   任意の $x \in U$ に対し, $x \in X \cup U$ より, $X \cup U \supseteq U$.
   以上より、$X \cup U = U$. ∎

2. $X \cap U = X$

   (証明) $\subseteq$) 任意の $x \in X \cap U$ に対し, $X \subseteq U$ より, $x \in X$ は明らか.
   ゆえに, $X \cap U \subseteq X$.
   $\supseteq$) 任意の $x \in X$ に対し, $x \in X \subseteq U$ より, $x \in X$ かつ $x \in U$.
   すなわち , $x \in X \cap U$. ゆえに、 $X \cap U \supseteq X$.
   以上より、$X \cap U = X$. ∎

例 16. X, Y を集合とする . このとき , 次を証明せよ。

1. $X \subseteq Y$ ならば $X \cap Y = X$ が成り立つ。
2. $X \cap Y = X$ ならば $X \subseteq Y$ が成り立つ。

定理 17. 任意の集合 X, Y, Z に対し、以下の等式が成立する。

1. $X \cup Y = Y \cup X$,
   $X \cap Y = Y \cap X$. (交換律)
2. $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$,
   $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$. (結合律)
3. $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$,
   $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$. (分配律)
4. $X \cup X = X$,
   $X \cap X = X$. (ベキ等律)
5. $(X \cup Y) \cap X = X$,
   $(X \cap Y) \cup X = X$. (吸収律)

1. $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$ (分配律)

(証明) $A :=$左辺, $B :=$右辺 とする.

まず , $A \subseteq B$ を示す:

任意の $x \in A$ に対し , $x \in X \cup Y$ かつ $x \in Z$.

このとき , $x \in X$ または $x \in Y$ である .

そこで, i) $x \in X$ かつ $x \in Z$ ならば $x \in X \cap Z$ より, $x \in B$.

または, ii) $x \in Y$ かつ $x \in Z$ ならば $x \in Y \cap Z$ より, $x \in B$.

したがって, 常に $x \in B$. ゆえに , $A \subseteq B$.

次に, $A \supseteq B$ を示す:

任意の $x \in B$ に対し , $x \in X \cap Z$ または $x \in Y \cap Z$.

そこで, i) $x \in X \cap Z$ ならば $x \in X \cup Y$ かつ $x \in Z$ より, $x \in A$.

または, ii) $x \in Y \cap Z$ ならば $x \in X \cup Y$ かつ $x \in Z$ より, $x \in A$.

したがって, 常に $x \in A$ が成り立つ. ゆえに , $A \supseteq B$.

以上より, $A = B$ が成り立つ. ■

2. $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$ (分配律)

(証明) $A :=$左辺, $B :=$右辺 とする.

まず, $A \subseteq B$ を示す:

任意の $x \in A$ に対し, $x \in X \cap Y$ または $x \in Z$.

そこで, i) $x \in X \cap Y$ ならば $x \in X \cup Z$ かつ $x \in Y \cup Z$ より, $x \in B$.

または, ii) $x \in Z$ ならば $x \in X \cup Z$ かつ $x \in Y \cup Z$ より, $x \in B$.

したがって, 常に $x \in B$. ゆえに , $A \subseteq B$.

次に, $A \supseteq B$ を示す:

任意の $x \in B$ に対し , $x \in X \cup Z$ かつ $x \in Y \cup Z$.

そこで, i) $x \in Z$ ならば, 明らかに $x \in A$.

または, ii) $x \notin Z$ ならば $x \in X$ かつ $x \in Y$ より, $x \in X \cap Y$.

ゆえに, $x \in A$.

したがって, 常に $x \in A$. ゆえに , $A \supseteq B$.

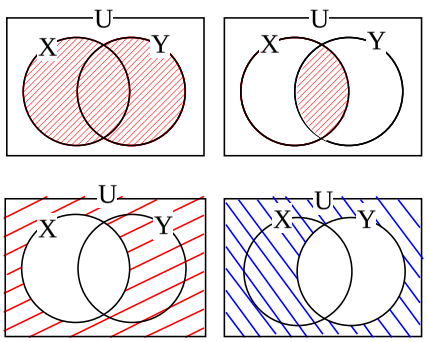
以上より, $A = B$ が成り立つ. ■

定理 18. (ド・モルガンの法則)

和集合, 共通集合, 補集合の間には, 以下のような関係がある.

1. $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$.

2. $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$.



2. $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$.

(証明)

$\subseteq$) 任意の $x \in (X \cap Y)^c$ に対し , $x \notin X \cap Y$ であるから,

$x \notin X$ または $x \notin Y$ である.

すなわち, $x \in X^c$ または $x \in Y^c$ であるから $x \in X^c \cup Y^c$.

ゆえに, $(X \cap Y)^c \subseteq X^c \cup Y^c$ が成り立つ.

$\supseteq$) 任意の $x \in X^c \cup Y^c$ に対し , $x \in X^c$ または $x \in Y^c$ である.

$x \in X^c$ ならば $x \notin X$ である. すなわち、$x \notin X \cap Y$.

同様に, $x \in Y^c$ ならば $x \notin Y$ である. すなわち、$x \notin X \cap Y$.

したがって, $x \in (X \cap Y)^c$.

ゆえに, $(X \cap Y)^c \supseteq X^c \cup Y^c$ が成り立つ.

以上より、$(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$. ■

例 19. (ド・モルガンの法則)

全体集合を$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$とする.

そして, $X = \{3,4,5\}$, $Y = \{1,2,3,4,6\} \subseteq U$ とする.

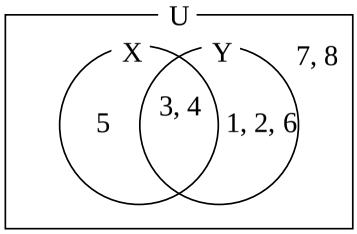
このとき, $X \cup Y = \{1,2,3,4,5,6\}$, $X \cap Y = \{3,4\}$,

$X^c = \{1,2,6,7,8\}$, $Y^c = \{5,7,8\}$.

これより、

$$(X \cup Y)^c = \{7,8\} = X^c \cap Y^c,$$

$$(X \cap Y)^c = \{1,2,5,6,7,8\} = X^c \cup Y^c.$$



例 20. 任意の集合 X, Y, Z に対し、以下が成り立つことを示せ。

1. $(X \cup Y) - Z = (X - Z) \cup (Y - Z)$

2. $(X - Y) - Z = X - (Y \cup Z)$

3. $X - (Y - Z) = (X - Y) \cup (Y \cap Z)$

1. $(X \cup Y) - Z = (X - Z) \cup (Y - Z)$

(証明) $A :=$左辺 , $B :=$右辺 とする . 差集合の定義より ,

$A = (X \cup Y) \cap Z^c$, $X - Z = X \cap Z^c$, $Y - Z = Y \cap Z^c$ に注意する.

$\subseteq$) 任意の $x \in A$ に対し , $x \in X \cup Y$ かつ $x \in Z^c$.

$x \in X$ または $x \in Y$ である .

i) $x \in X$ かつ $x \in Z^c$ ならば, $x \in X \cap Z^c = X - Z$ より, $x \in B$.

ii) $x \in Y$ かつ $x \in Z^c$ ならば, $x \in Y \cap Z^c = Y - Z$ より, $x \in B$.

ゆえに , 常に , $x \in B$ であるから, $A \subseteq B$.

$\supseteq$) $A = (X \cup Y) \cap Z^c$ であるから ,

任意の $x \in B$ に対し , $x \in X - Z$ または $x \in Y - Z$.

i) $x \in X - Z = X \cap Z^c$ ならば, $x \in X$ かつ $x \in Z^c$ より , $x \in A$.

ii) $x \in Y - Z = Y \cap Z^c$ ならば, $x \in Y$ かつ $x \in Z^c$ より , $x \in A$.

ゆえに , 常に , $x \in A$ であるから, $A \supseteq B$.

以上より , $A = B$ が成り立つ . ■

$(X \cup Y) - Z = (X - Z) \cup (Y - Z)$

(別証明)

$$\begin{aligned}(X \cup Y) - Z &= (X \cup Y) \cap Z^c \quad \text{(差集合の定義より)} \\ &= (X \cap Z^c) \cup (Y \cap Z^c) \quad \text{(分配律より)} \\ &= (X - Z) \cup (Y - Z) \quad \text{(差集合の定義より)}.\end{aligned}$$

2. $(X-Y)-Z = X-(Y\cup Z)$

(証明)

$$\begin{aligned}(X-Y)-Z &= (X\cap Y^c)\cap Z^c && \text{(差集合の定義より)}\\ &= X\cap(Y^c\cap Z^c) && \text{(結合律より)}\\ &= X\cap(Y\cup Z)^c && \text{(ド・モルガンの法則より)}\\ &= X-(Y\cup Z). && \text{(差集合の定義より)}\end{aligned}$$

3. $X-(Y-Z) = (X-Y)\cup(Y\cap Z)$

(証明)

$$\begin{aligned}X-(Y-Z) &= X\cap(Y\cap Z^c)^c && \text{(差集合の定義より)}\\ &= X\cap(Y^c\cup Z) && \text{(ド・モルガンの法則より)}\\ &= (X\cap Y^c)\cup(X\cap Z) && \text{(分配律より)}\\ &= (X-Y)\cup(X\cap Z). && \text{(差集合の定義より)}\end{aligned}$$

$\supseteq$) $x\in(\cap_{i=1}^{k}X_i)\cap X_{k+1}$ とする。

$x\in\cap_{i=1}^{k}X_i$ より、すべての$i\in\{1,\dots,k\}$に対し、$x\in X_i$ であり、さらに、 $x\in X_{k+1}$ が成り立つ。

したがって、すべての$i\in\{1,\dots,k+1\}$に対し、$x\in X_i$ より、$x\in\cap_{i=1}^{k+1}X_i$である。

ゆえに、$\cap_{i=1}^{k+1}X_i\supseteq(\cap_{i=1}^{k}X_i)\cap X_{k+1}$.

以上より、$\cap_{i=1}^{k+1}X_i=(\cap_{i=1}^{k}X_i)\cap X_{k+1}$が成り立つ.

ゆえに、$n=k$の仮定より,

$\cap_{i=1}^{k+1}X_i=(\cap_{i=1}^{k}X_i)\cap X_{k+1}=X_1\cap\cdots\cap X_k\cap X_{k+1}$

が成り立つ。

以上のことから，数学的帰納法により，任意の自然数 n に対して

$\cap_{i=1}^{n}X_i=X_1\cap\cdots\cap X_n$

は成り立つ . ■

定義 21. 集合 $X_1,\dots,X_n$ に対し、以下を定義する。

1. ($X_1,\dots,X_n$の和集合)

$$\bigcup_{i=1}^{n}X_i := \{x \mid \text{ある } i\in\{1,\dots,n\} \text{ に対し、 } x\in X_i\}.$$

2. ($X_1,\dots,X_n$の積集合，共通集合)

$$\bigcap_{i=1}^{n}X_i := \{x \mid \text{すべての } i\in\{1,\dots,n\} \text{ に対し、 } x\in X_i\}.$$

(例) $X_1=\{1,2\}$, $X_2=\{2,3\}$ とする。このとき，

$\cup_{i=1}^{2}X_i=\{1,2,3\}$,

$\cap_{i=1}^{2}X_i=\{2\}$.

定理 23. (拡張されたド・モルガンの法則)
任意の集合 $X_1,\dots,X_n$ に対し，以下が成り立つ.

1. $\left(\bigcup_{i=1}^{n}X_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^{n}X_i^c$.

2. $\left(\bigcap_{i=1}^{n}X_i\right)^c=\bigcup_{i=1}^{n}X_i^c$.

定理 22. 任意の自然数 n と、任意の n 個の集合 $X_1,\dots,X_n$ に対し，以下の等式が成り立つ。

1.
$$\bigcup_{i=1}^{n}X_i = X_1\cup\cdots\cup X_n$$

2.
$$\bigcap_{i=1}^{n}X_i = X_1\cap\cdots\cap X_n$$

定義 24. $\mathcal{S}$ を集合族 (すなわち、集合を要素とする集合) とする。

1. (和集合)
$$\bigcup_{X\in\mathcal{S}}X := \{x \mid \text{ある } X\in\mathcal{S} \text{ に対し}, x\in X\}.$$

2. (積集合, 共通集合)
$$\bigcap_{X\in\mathcal{S}}X := \{x \mid \text{すべての } X\in\mathcal{S} \text{ に対し}, x\in X\}.$$

(集合族 $\mathcal{S}$ の要素を集合 $X_1,\dots,X_n$ とすれば $\mathcal{S}=\{X_1,\dots,X_n\}$.)

この記法を用いると、前定理は以下のように記述できる .

定理 25. (拡張されたド・モルガンの法則)
任意の集合 $X_1,\dots,X_n$ に対し，以下が成り立つ.

1. $(\cup_{X\in\mathcal{S}}X)^c=\cap_{X\in\mathcal{S}}X^c$.

2. $(\cap_{X\in\mathcal{S}}X)^c=\cup_{X\in\mathcal{S}}X^c$.

2. $\bigcap_{i=1}^{n}X_i = X_1\cap\cdots\cap X_n$

(証明)

集合の数 n に関する数学的帰納法で示す。

$n=1$のとき、$X_1=X_1$.

$n=k$のとき、$\cap_{i=1}^{k}X_i=X_1\cap\cdots\cap X_k$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$のとき、$\cap_{i=1}^{k+1}X_i=X_1\cap\cdots\cap X_{k+1}$が成り立つことを示そう。

そのために、まず、$\cap_{i=1}^{k+1}X_i=(\cap_{i=1}^{k}X_i)\cap X_{k+1}$が成り立つことを示す。

$\subseteq$) $x\in\cap_{i=1}^{k+1}X_i$ とする。

集合$\cap_{i=1}^{n}X_i$の定義より、すべての$i\in\{1,\dots,k+1\}$に対し、$x\in X_i$.

したがって、$x\in\cap_{i=1}^{k}X_i$ かつ $x\in X_{k+1}$である。

すなわち、$x\in\cap_{i=1}^{k}X_i\cap X_{k+1}$.

ゆえに、$\cap_{i=1}^{k+1}X_i\subseteq(\cap_{i=1}^{k}X_i)\cap X_{k+1}$.

定義 26. (n 重対, 順序対)

“もの” $x_1,\dots,x_n$ に対し、$(x_1,\dots,x_n)$ を $x_1,\dots,x_n$ の

n 重対 (じゅうつい)という。

特に、(x_1,x_2) を x_1 と x_2 の 順序対という。($(x_1,x_2)\neq(x_2,x_1)$)

定義 27. (直積)

$X_1,\dots,X_n$ を集合とする。

$$X_1\times\cdots\times X_n := \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_1\in X_1,\dots,x_n\in X_n\}$$

を $X_1,\dots,X_n$ の 直積, または直積集合という。

$X_1=\cdots=X_n=X$ のとき、$X^n := X_1\times\cdots\times X_n$ と表す。

(注意) もし，$X_i=\phi$ ならば $X_1\times\cdots\times X_n=\phi$.

なぜなら，どのようなn重対$(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$ に対しても，

$x_i\notin X_i=\phi$ であるから $(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)\notin X_1\times\cdots\times X_i\times\cdots\times X_n$.

例 28. （直積集合）

1. $X=\{2,1\}, Y=\{3,2,4\}$ のとき、$X\times Y$ を外延的記法で表せ。
2. $\{(x,y)\mid (x,y)\in \mathbf{N}^2, x^2+y^2\leq 8\}$ を外延的記法で表せ。
3. $\{(x,y,z)\mid (x,y,z)\in \mathbf{N}^3, x+y+z=4\}$ を外延的記法で表せ。
4. 任意のX,Y,Zに対し、以下が成り立つことを示せ。
   $(X\cap Z)\times Y=(X\times Y)\cap(Z\times Y)$.
5. X,Y,Z,W を集合とする。以下が成り立つことを証明せよ。
   $(X\cap Y)\times(Z\cap W)=(X\times Z)\cap(Y\times W)$

1. $X=\{2,1\}, Y=\{3,2,4\}$ のとき、$X\times Y$ を外延的記法で表せ。
   (解答) $X\times Y=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$.

2. $\{(x,y)\mid (x,y)\in \mathbf{N}^2, x^2+y^2\leq 8\}$ を外延的記法で表せ。
   (解答) $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.

3. $\{(x,y,z)\mid (x,y,z)\in \mathbf{N}^3, x+y+z=4\}$ を外延的記法で表せ。
   (解答) $\{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$.

4. $(X\cap Z)\times Y=(X\times Y)\cap(Z\times Y)$
   (解答)
   $\subseteq$) 任意の$(a,b)\in(X\cap Z)\times Y$に対し，
   $a\in X$ かつ $a\in Z$ かつ $b\in Y$ である．
   したがって，$(a,b)\in X\times Y$ かつ $(a,b)\in Z\times Y$.
   ゆえに，$(a,b)\in(X\times Y)\cap(Z\times Y)$.
   $\supseteq$) 上記の逆を示せばよい．
   任意の $(a,b)\in(X\times Y)\cap(Z\times Y)$ に対し，
   $(a,b)\in X\times Y$ かつ $(a,b)\in Z\times Y$.
   すなわち，$a\in X$ かつ $a\in Z$. さらに，$b\in Y$.
   ゆえに， $(a,b)\in(X\cap Z)\times Y$.
   以上より，左辺＝右辺. ∎

5. $(X\cap Y)\times(Z\cap W)=(X\times Z)\cap(Y\times W)$
   (解答) $\subseteq$) 任意の$(a,b)\in(X\cap Y)\times(Z\cap W)$に対し，
   $a\in X\cap Y$ かつ $b\in Z\cap W$.
   したがって，“$a\in X$ かつ $a\in Y$” かつ “$b\in Z$ かつ $b\in W$.”
   順序を換え，“$a\in X$ かつ $b\in Z$” かつ “$a\in Y$ かつ $b\in W$.”
   ゆえに，$(a,b)\in X\times Z$ かつ $(a,b)\in Y\times W$ より，
   $(a,b)\in(X\times Z)\cap(Y\times W)$.
   $\supseteq$) 上記の逆を示せばよい．任意の$(a,b)\in(X\times Z)\cap(Y\times W)$に対し，
   $(a,b)\in X\times Z$ かつ $(a,b)\in Y\times W$.
   すなわち，“$a\in X$ かつ $b\in Z$” かつ “$a\in Y$ かつ $b\in W$.”
   順序を換え，“$a\in X$ かつ $a\in Y$” かつ “$b\in Z$ かつ $b\in W$.”
   ゆえに，$a\in X\cap Y$ かつ $b\in Z\cap W$ より，
   $(a,b)\in(X\cap Y)\times(Z\cap W)$.
   以上より，左辺＝右辺. ∎

(例)

X, Y, Z, W を集合とする。
以下の等式が正しければ証明し、そうでなければ反例を挙げよ。

1. $(X\cup Y)\times(Z\cup W)=(X\times Z)\cup(Y\times W)$
2. $(X-Y)\times(Z-W)=(X\times Z)-(Y\times W)$
3. $(X\ominus Y)\times(Z\ominus W)=(X\times Z)\ominus(Y\times W)$
4. $(X\cup Y)\times Z=(X\times Z)\cup(Y\times Z)$
5. $(X-Y)\times Z=(X\times Z)-(Y\times Z)$
6. $(X\ominus Y)\times Z=(X\times Z)\ominus(Y\times Z)$

定義 29. (べき集合)

X を集合とする。

X の部分集合の全体からなる集合をX のベキ集合とよび、2^X と表す:

$2^X:=\{Y\mid Y\subseteq X\}$.

注意

ベキ集合 2^X は、X 自身と 空集合 ϕ を要素として含む。

冪集合, 巾集合, power set

例 30. (べき集合)

1. $X=\{a\}$ とするとき、2^X を外延的記法で表せ。
2. $X=\{a,b\}$ とするとき、2^X を外延的記法で表せ。
3. $X=\{a,b,c\}$ とするとき、2^X を外延的記法で表せ。
4. $X=\{\phi,\{a\}\}$ とするとき、2^X を外延的記法で表せ。
5. $\{a\}\neq\{\{a\}\}$であることに注意する。
6. $2^{\{\phi\}}$ を外延的記法で表せ。
   (ヒント: $X=\{a\}$のaをϕに置き換えて考える。)
7. $2^{2^{\{\phi\}}}$ を外延的記法で表せ。
8. $X=\{a,b\}$とするとき、$2^X\times X$を外延的記法で表せ.

1. $X=\{a\}$
   (解答) $2^X=\{\phi,X\}$.

2. $X=\{a,b\}$
   (解答) $2^X=\{\phi,\{a\},\{b\},X\}$.

3. $X=\{a,b,c\}$
   (解答) $2^X=\{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},X\}$.

4. $X = \{\phi, \{a\}\}$

(解答) $2^X = \{\phi, \{\phi\}, \{\{a\}\}, X\}$.

6. $2^{\{\phi\}}$

(解答) $2^{\{\phi\}} = \{\phi, \{\phi\}\}$.

7. $2^{2^{\{\phi\}}}$

(解答) $2^{2^{\{\phi\}}} = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$.

8. $X = \{a, b\}$ とするとき、$2^X \times X$ を外延的記法で表せ.

(解答) $2^X = \{\phi, \{a\}, \{b\}, X\}$ より,

$2^X \times X = \{(\phi, a), (\{a\}, a), (\{b\}, a), (X, a),$
$(\phi, b), (\{a\}, b), (\{b\}, b), (X, b)\}$.

定義 31. (有限集合, 無限集合)
有限個の要素からなる集合を有限集合という。それ以外の集合を無限集合という。有限集合 X の要素数を $|X|$ と表す。

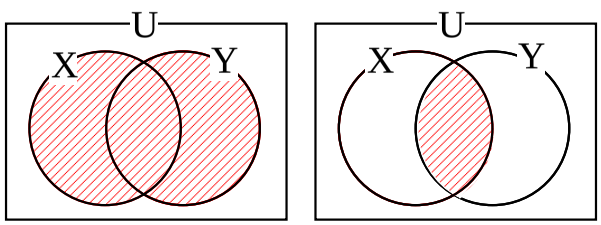
(注意)

1. 空集合 ϕ は有限集合であり、$|\phi| = 0$ である。
2. 有限集合 X, Y に対し、$X \cap Y = \phi$ ならば $|X \cup Y| = |X| + |Y|$ が成り立つ。
3. 一般に、有限集合 $X_1, \ldots, X_n$ に対し、$X_i \cap X_j = \phi \ (i \neq j)$ ならば、$|X_1 \cup \cdots \cup X_n| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$ が成り立つ。
4. 上記のことから、有限集合の要素数を数え上げる1つの方法として、それを互いに共通部分をもたない、いくつかの部分集合に分割し、それぞれの要素数を数えて足し合わせればよい。

定理 32. (包除原理)

有限集合 X, Y に対し、以下の等式が成り立つ。

1. $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$. (包除原理)
   (Principle of inclusion and exclusion)
2. $|X \times Y| = |X| \times |Y|$.
3. $|2^X| = 2^{|X|}$.



1. $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ (包除原理)

(証明) 互いに共通部分をもたないような部分集合で、
集合 X, $X \cup Y$ を次のように表す。

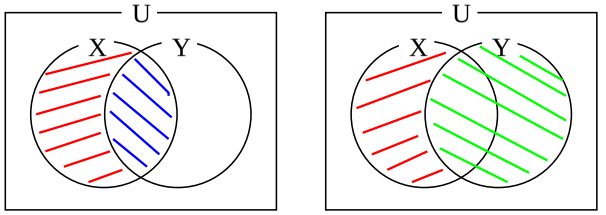
$X = (X - Y) \cup (X \cap Y)$, $X \cup Y = (X - Y) \cup Y$.

それぞれより、

$|X| = |X - Y| + |X \cap Y|$, $|X \cup Y| = |X - Y| + |Y|$.

これらより、$|X - Y|$ の項を消すと、

$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$. ∎



2. $|X \times Y| = |X| \times |Y|$

(証明) $X \times Y$ の要素は、要素 $x \in X$ と $y \in Y$ の順序対 (x, y) である。

x と y がとりうる値の個数はそれぞれ $|X|$ と $|Y|$ である。

したがって、それらから得られる順序対の全体の個数は $|X| \times |Y|$ となる。

ゆえに, $|X \times Y| = |X| \times |Y|$. ∎

3. $|2^X| = 2^{|X|}$

(証明) (考え方)

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $|X| = 3$ について考える .

$\{x_1, x_2, x_3\}$ (b_1, b_2, b_3)	X の部分集合
$(0,0,0)$	$\{\ \} = \phi$
$(1,0,0)$	$\{x_1\}$
$(0,1,0)$	$\{x_2\}$
$(0,0,1)$	$\{x_3\}$
$(1,1,0)$	$\{x_1, x_2\}$
$(1,0,1)$	$\{x_1, x_3\}$
$(0,1,1)$	$\{x_2, x_3\}$
$(1,1,1)$	$\{x_1, x_2, x_3\}$

$\Rightarrow \quad 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 2^{|X|}$

$\begin{cases} b_i = 1 \text{ ならば要素 } x_i \text{ を部分集合に含める} \\ b_i = 0 \text{ ならば要素 } x_i \text{ を部分集合に含めない} \end{cases}$

(証明) 仮定より、X は有限集合であるから、
$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $|X| = n$ としても、一般性は失われない。

X の部分集合を決める方法として、以下のことを考える。

0 と 1 からなる集合を $B = \{0, 1\}$ とし、その n 重の直積集合を B^n とする。

B^n の要素は、$(b_1, \ldots, b_n)$ という n 重対となる。

そこで、$(b_1, \ldots, b_n)$ を用いて、次のように X の部分集合を定める。

b_i の値が、$\begin{cases} b_i = 1 \text{ ならば要素 } x_i \text{ を部分集合に含める} \\ b_i = 0 \text{ ならば要素 } x_i \text{ を部分集合に含めない} \end{cases}$

この方法により、B^n の要素から過不足なく、X のすべての部分集合を定めることができる。

B^n の要素数は 2^n 個であるから、すべての部分集合の個数も 2^n 個である。

ゆえに、$|2^X| = 2^n = 2^{|X|}$. ∎

(別解) $|2^X| = 2^{|X|}$

n個の中から k を選び出す組合せの数は $\binom{n}{k} = {}_nC_k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ である。

したがって、Xの部分集合で要素数が k であるものは $\binom{n}{k}$ 個である。

これより、X の部分集合の総数 $|2^X|$ は $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ となる。

すなわち，$|2^X| = 2^n = 2^{|X|}$.

ここで、2項定理 $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^m y^{n-m}$ に

$x = y = 1$ を代入すると、$\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m} = 2^n$ が得られる。■

例 34. (包除原理)
有限集合 X, Y, Z を有限集合 U の部分集合とするとき，
以下が成り立つことを示せ。

1. $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$
2. $|X \cap Y| = |U| - |X^c| - |Y^c| + |X^c \cap Y^c|$
   $= |X| + |Y| + |X^c \cap Y^c| - |U|$
3. $|X \cap Y \cap Z| = |U| - |X^c| - |Y^c| - |Z^c|$
   $+|X^c \cap Y^c| + |X^c \cap Z^c| + |Y^c \cap Z^c| - |X^c \cap Y^c \cap Z^c|$
4. $|X^c \cap Y^c \cap Z| = |Z| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$
5. 1から250までの自然数の中で、2でも7でも割り切れず、
   かつ5で割り切れるものは、いくつあるか。(包除原理を用いて考えよ。)

2項定理 $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^m y^{n-m}$

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= \binom{3}{0}\cdot x^3 + \binom{3}{1}\cdot x^2 y + \binom{3}{2}\cdot x^1 y^2 + \binom{3}{3}\cdot y^3\\ &= 1\cdot x^3 + 3\cdot x^2 y + 3\cdot x^1 y^2 + 1\cdot y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2^3 = (1+1)^3 &= \binom{3}{0}\cdot 1 + \binom{3}{1}\cdot 1 + \binom{3}{2}\cdot 1 + \binom{3}{3}\cdot 1\\ &= 1+3+3+1\\ &= 8\end{aligned}$$

1. $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z|$
   $-|X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$

(解答)

$$\begin{aligned}|(X \cup Y) \cup Z| &= |(X \cup Y)| + |Z| - |(X \cup Y) \cap Z|\\ &= |X| + |Y| - |X \cap Y| + |Z| - |(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)|\\ &= |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y|\\ &\quad -|X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.\end{aligned}$$

ここで、$(X \cap Z) \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap (Z \cap Z) = X \cap Y \cap Z$ より，

$$\begin{aligned}|(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)| &= |X \cap Z| + |Y \cap Z| - |(X \cap Z) \cap (Y \cap Z)|\\ &= |X \cap Z| + |Y \cap Z| - |X \cap Y \cap Z|\end{aligned}$$

となることを最後の等式に用いた．■

例 33. n個の中からkを選び出す組合せの数 $\binom{n}{k}$ が $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ と表されることは、良く知られている。その式には、割算が含まれていることが分かる。では、その式の値が常に整数になるのは、なぜだろうか。この問題を解くヒントとなる事柄を以下に記載する．

1. 「k, $0 \le k \le n$, に対し、$\binom{n}{k}$ は整数になる」ことを示せ。
   上記を命題$P(n)$として、nに関する数学的帰納法で証明する方法が考えられる。
2. n個の中からk個を選んで得られる順列の総数は
   ${}_nP_k = n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
3. n個の中からk個を選んで得られる組合せの総数は
   $\binom{n}{k} = {}_nC_k = \frac{{}_nP_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.
4. 「連続する k 個の自然数の積は $k!$ で割り切れる」ことを示せ。
   kに関する数学的帰納法で証明する方法が考えられる。

2. $|X \cap Y| = |U| - |X^c| - |Y^c| + |X^c \cap Y^c| = |X| + |Y| + |X^c \cap Y^c| - |U|$

(解答) 補集合の定義とド・モルガンの法則より，

$U = (X \cup Y) \cup (X \cup Y)^c = (X \cup Y) \cup (X^c \cap Y^c)$

$U = X \cup X^c$, $U = Y \cup Y^c$.

これらより、

$|U| = |X \cup Y| + |X^c \cap Y^c| = |X| + |Y| - |X \cap Y| + |X^c \cap Y^c|$.

ゆえに、

$$\begin{aligned}|X \cap Y| &= |X| + |Y| + |X^c \cap Y^c| - |U|\\ &= |U| - |X^c| - |Y^c| + |X^c \cap Y^c|.\end{aligned}$$

ここで，$|U| = |X| + |X^c|$, $|U| = |Y| + |Y^c|$ より，

$|X| + |Y| = 2|U| - |X^c| - |Y^c|$ となることを用いた．■

5. 式 $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ において、その分子 $n!$ は連続するn個の自然数の積である。それは、連続する$(n-k)$個とk個の自然数の積に分解できる。したがって、上記のことが正しければ、$\frac{n!}{(n-k)!k!}$の値は、常に整数となることが分かる。

3. $|X \cap Y \cap Z| = |U| - |X^c| - |Y^c| - |Z^c|$
   $+|X^c \cap Y^c| + |X^c \cap Z^c| + |Y^c \cap Z^c| - |X^c \cap Y^c \cap Z^c|$

(解答) 前記の結果 $|X \cap Y| = |U| - |X^c| - |Y^c| + |X^c \cap Y^c|$より，

$|(X \cap Y) \cap Z| = |U| - |(X \cap Y)^c| - |Z^c| + |(X \cap Y)^c \cap Z^c|$.

そこで、

$|(X \cap Y)^c| = |X^c \cup Y^c| = |X^c| + |Y^c| - |X^c \cap Y^c|$

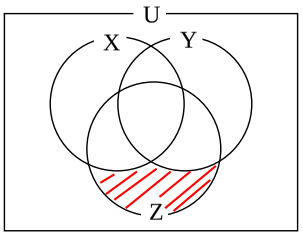
と

$$\begin{aligned}|(X \cap Y)^c \cap Z^c| &= |(X^c \cup Y^c) \cap Z^c| = |(X^c \cap Z^c) \cup (Y^c \cap Z^c)|\\ &= |X^c \cap Z^c| + |Y^c \cap Z^c| - |(X^c \cap Z^c) \cap (Y^c \cap Z^c)|\\ &= |X^c \cap Z^c| + |Y^c \cap Z^c| - |X^c \cap Y^c \cap Z^c|\end{aligned}$$

より、

$|(X \cap Y) \cap Z| = |U| - |X^c| - |Y^c| - |Z^c|$
$+|X^c \cap Y^c| + |X^c \cap Z^c| + |Y^c \cap Z^c| - |X^c \cap Y^c \cap Z^c|$. ■

4. $|X^c \cap Y^c \cap Z| = |Z| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$



References

[1] 尾関和彦, (情報技術者のための)離散系数学入門, 共立出版, 2004.

[2] 尾関和彦, 太田和夫, 國廣昇, “離散数学第一” 及び “離散数学第一演習問題集” 電気通信大学情報通信工学科講義資料, 2004.

[3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 2003.

[4] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 2003.

[5] S. Lipschutz著, 成嶋弘監訳, 離散数学(コンピュータサイエンスの基礎数学), オーム社, 2004(H16).

[6] 小倉久和, 情報の基礎離散数学(– 演習を中心とした –), 近代科学社, 2006.

[7] 町田元, 横森貴, 計算機数学, 森北出版, 1990.

5. $|X^c \cap Y^c \cap Z| = |Z| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$

(解答) 集合 $X \cup Y \cup Z$ は共通部分もたない部分集合の和集合

$(X \cup Y) \cup Z = ((X^c \cap Y^c) \cap Z) \cup (X \cup Y)$

と書ける。これより、

$|X \cup Y \cup Z| = |X^c \cap Y^c \cap Z| + |X \cup Y| = |X^c \cap Y^c \cap Z| + |X| + |Y| - |X \cap Y|.$

そして、$|X \cup Y \cup Z|$ の公式を用いて、

$|X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$

$= |X^c \cap Y^c \cap Z| + |X| + |Y| - |X \cap Y|$

となる。これを整理すると、

$|X^c \cap Y^c \cap Z| = |Z| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$

となる。∎

6. 1から250までの自然数の中で、**2** でも **7** でも割り切れず、かつ **5** で割り切れるものは、いくつあるか。

(解答)

$U = \{1, \ldots, 250\}$,

$X = \{x \mid x \in U, x$は**2**で割り切れる$\}$,

$Y = \{y \mid y \in U, y$は**7**で割り切れる$\}$,

$Z = \{z \mid z \in U, z$は**5**で割り切れる$\}$.

このとき，求める集合は $X^c \cap Y^c \cap Z$ と表すことができる．

$|Z| = 50$, $|X \cap Z| = 25$, $|Y \cap Z| = 7$, $|X \cap Y \cap Z| = 3$.

ゆえに，$|X^c \cap Y^c \cap Z| = |Z| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$ より，

$|X^c \cap Y^c \cap Z| = 50 - 25 - 7 + 3 = 21$ となる。∎

包除原理 $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ に関し，

一般に、集合 $X_1, \ldots, X_n$ に対し、以下が成り立つ。

$$|X_1 \cup \cdots \cup X_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_k}|.$$

また、直積集合の $|X \times Y| = |X| \times |Y|$ に関しても、一般に、

$$|X_1 \times \cdots \times X_n| = |X_1| \times \cdots \times |X_n|$$

が成り立つ。