離散数学

— 1. 集合と写像 —
— 1.1 集合 —

栗原正純 kuri@ice.uec.ac.jp

1.1 集合

定義 1. (集合)

1. 次のような性質をもつ, "もの" の集まりを**集合**という.
   i. あるものが集合に属するか, どうかが、明確に判断できる.
   ii. 集合に属する2つのものが, 同一であるかどうか判断できる.
2. 集合を構成するものを, その集合の**要素**(あるいは**元**(げん))という.
3. もの x が, 集合 X の要素であることを, x は X に **属する**といい,
   $x \in X$ または $X \ni x$ と表す.
   (x は X に **含まれる**, または, X は x を **含む**)
   $x_1 \in X, x_2 \in X, \ldots, x_n \in X$ を $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ と略記する.

4. ものxが, 集合Xの要素でないことを, $x \notin X$ または $X \not\ni x$ と表し,

x は X に属さないという.

(x は X に 含まれない, または, X は x を 含まない)

5. 集合を要素とする集合を集合族という.

定義 2.　(集合の記法)

1. 要素 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ からなる集合を $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ と表す．(外延的記法)
2. $P(x)$ を x に関する条件とする．
   $P(x)$ を満たす x を要素とし，かつ，そのような x だけを要素とする集合を $\{x \mid P(x)\}$ と表す．(内延的記法)
3. 複数の条件 $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ があるとき、$P_1(x), \ldots, P_n(x)$ をすべて満たす x を要素とし、かつ、そのような x だけを要素とする集合を $\{x \mid P_1(x), \ldots, P_n(x)\}$ と表す。
4. X を集合とするとき、$\{x \mid x \in X,\ P(x)\}$ を $\{x \mid P(x)\}$ と略記する。

注意 3.　(集合の記法)

1. 中カッコ “ { ”, “ } ” を用いる。要素を コンマ “ , ”で区切る．
2. $\{x \mid P(x)\}$ の中の x は、カッコ “ { ”と “ } ” の中だけで通用する変数。したがって，$\{x \mid P(x)\} = \{y \mid P(y)\} = \{z \mid P(z)\}$.

定義 4. (空集合)

要素をもたない集合を<u>空(くう)集合</u>とよび、記号 ϕ(ファイ) で表す。

注意 5. (空集合)

1. 空集合 ϕ と集合 $\{\phi\}$ は異なる.
2. ϕ は要素をもたない集合(0 個の要素をもつ集合).
3. $\{\phi\}$ は ϕ という要素をもつ集合(1 個の要素をもつ集合).
4. 空集合を外延的記法で表せば、$\{\ \}$ と書くことができるが、通常は用いない。
5. しかし、集合 $\{\phi\}$ を外延的記法で表せば、$\{\ \{\ \}\ \}$ と書ける.

例 6. (集合の例)

1. 自然数全体の集まり: $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

2. 10 より小さい素数全体の集まり: $\{2, 3, 5, 7\}$.

(1 より大きい整数 x が 1 と 自分自身の x 以外に, 正の約数をもたないとき, x を素数という.)

3. 十分大きい自然数全体の集まり. <u>これは集合ではない。</u>

集合の定義で示した, 条件 i. (集合に属するかどうか明確に判断できる) を満たさない.

4. 次の集合は空集合である: $\{x \mid x \in \mathbf{Z},\ 2x + 1 = 0\}$.

条件式 $2x + 1 = 0$ を満たす整数は存在しないから.

ここで, 記号 $\mathbf{Z}$ は, 整数全体からなる集合を表す.

条件 $P(x)$ を " $2x + 1 = 0$ " とすれば, $\{x \mid x \in \mathbf{Z}, P(x)\}$ と書ける。

これより, $\{x \mid x \in \mathbf{Z}, P(x)\} = \{y \mid y \in \mathbf{Z}, P(y)\}$ も理解できる.

定義 7. (部分集合)

X, Y を集合とする。

X の要素がすべて Y の要素であるとき, X は Y の部分集合であるといい, $X \subseteq Y$ または $Y \supseteq X$ と表す.

X が Y の部分集合であり, かつ, X でない Y の要素が存在するとき, X は Y の真部分集合であるといい, $X \subset Y$ または $Y \supset X$ と表す.

別の言い方をすると、
$X \subseteq Y$ かつ $X \neq Y$ ならば X は Y の真部分集合である.

(例)

集合 X, Y を $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ とすると,

$X \subseteq Y$ であり, さらに, $X \subset Y$ となる.

定義 8. （特別な集合の記号）

1. **自然数**の全体からなる集合 $\{1, 2, \dots\}$ を $\mathbb{N}$ と表す.

   (*Natural numbers*)

2. **整数**の全体からなる集合: $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ を $\mathbb{Z}$ と表す.

   (*Integers, Zahlen (Zahl (数, number) の複数形))*

3. **有理数**の全体からなる集合 $\left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$ を $\mathbb{Q}$ と表す.

   (*Rational numbers, Quotient(商))*

4. **実数**の全体からなる集合を $\mathbb{R}$ と表す.

   (*Real numbers*)

5. **複素数**の全体からなる集合を $\mathbb{C}$ と表す.

   (*Complex numbers*)

6. このとき、$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ が成り立つ.

定義 9. （ $X = Y$ ）

X, Y を集合とする.

$X \subseteq Y$ かつ $X \supseteq Y$ のとき, X と Y は等しいといい, $X = Y$ と表す.

定義 10. （ $X \subseteq Y$ の証明 ）

集合 X, Y に対し、$X \subseteq Y$ を証明する基本的な方法は、

「 すべての $x \in X$ に対し、$x \in Y$ である 」

ことを示せばよい。

ここで,「 任意の $x \in X$ に対し、$x \in Y$ である 」も同じ意味.

（ $X = Y$ の証明 ）$X = Y$ を証明するには, $X = Y$ の定義より,

「$X \subseteq Y$ かつ $X \supseteq Y$」 を示せばよい.

例 11.　次のことを証明せよ。

1. 任意の集合 X に対し, $X \subseteq X$.
2. 任意の集合 X に対し, $\phi \subseteq X$.
3. $\{x \mid x \in \mathbf{N},\ 3 \leq x^2 \leq 17\} = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ 2 \leq x \leq 4\}$.
4. $\{2, 3, 1\} \subset \{4, 3, 6, 1, 5, 2\}$.
5. $\{1, 2, 1, 3, 4, 2\} = \{1, 2, 3, 4, 4, 3\}$.

1. 任意の集合 X に対し、 $X \subseteq X$.

(証明) (「任意の$x \in X$に対し，$x \in X$」を示せばよい.)

任意の $x \in X$ に対し、$x \in X$ であることは、明らか。

ゆえに、$X \subseteq X$ が成り立つ. ∎

2. 任意の集合 X に対し、 $\phi \subseteq X$.

(証明) (「任意の $x \in \phi$ に対し，$x \in X$」を示せばよい.)

「$x \in \phi$ ならば $x \in X$」の対偶「$x \notin X$ ならば $x \notin \phi$」が正しいことを示す。

ϕ は, 要素をもたない集合であるから, 常に, $x \notin \phi$ が成り立つ.

したがって，対偶は常に正しい．ゆえに，$\phi \subseteq X$ が成り立つ． ∎

(命題「 P ならば Q 」に対し，その主張 P, Q の否定を $\neg P$, $\neg Q$ と表すと，命題の対偶は「 $\neg Q$ ならば $\neg P$ 」となる.)

3. $\underline{\{x | x \in \mathbf{N},\ 3 \leq x^2 \leq 17\} = \{x | x \in \mathbf{N},\ 2 \leq x \leq 4\}}$.

(証明) **(左辺 $\subseteq$ 右辺 かつ 左辺 $\supseteq$ 右辺 を示せばよい.)**

まず, $1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9,\ 4^2 = 16,\ 5^2 = 25$ **より, 左辺** $= \{2, 3, 4\}$.

一方, 右辺 $= \{2, 3, 4\}$.

したがって, 任意の左辺の要素は, 右辺に属する. ゆえに, 左辺 $\subseteq$ 右辺.

逆も, 同様に成り立つから, 左辺 $\supseteq$ 右辺. ゆえに, 左辺 $=$ 右辺. ∎

4. $\underline{\{2, 3, 1\} \subset \{4, 3, 6, 1, 5, 2\}}$.

(証明) **(左辺 $\subseteq$ 右辺 かつ 左辺 $\neq$ 右辺 を示せばよい.)**

任意の左辺の要素は, 右辺に属するから, 左辺 $\subseteq$ 右辺.

一方, 右辺の要素 4 **は左辺に属さないから, 左辺 $\neq$ 右辺.**

ゆえに, 左辺 $\subset$ 右辺. ∎

5. $\underline{\{1,2,1,3,4,2\}=\{1,2,3,4,4,3\}.}$

(証明)

(左辺 $\subseteq$ 右辺 かつ 左辺 $\supseteq$ 右辺 を示せばよい.

さらに，左辺 $\subseteq$ 右辺 を示すには，

「任意の左辺の要素は，右辺に属する」を示せばよい.) ∎

(注意)

1. **外延的記法で表すとき，要素の順序を入れ換えても，集合は変化しない.**

2. **同じ要素を重複して列挙しても，その表す集合は，重複がない場合と同じ.**

   (集合の条件 ii.(集合に属する2つの要素が同一かどうか判断できる)により，重複した場合は同一とみなす)

3. **すなわち，** $\{1,2,1,3,4,2\}=\{1,2,3,4\}=\{1,2,3,4,4,3\}.$

例 12.　**次のことが正しいかどうかを判定せよ。**

1. $\phi \subseteq \phi$
2. $\phi \in \phi$
3. $\phi \subseteq \{\phi\}$
4. $\phi \in \{\phi\}$
5. $\{\phi\} \subseteq \{\phi\}$
6. $\{\phi\} \in \{\phi\}$

1. $\phi \subseteq \phi$

(解答) **任意の集合** X **に対し、** $\phi \subseteq X$ **である.**

そこで， $X = \phi$ **とすると** $\phi \subseteq \phi$**. ゆえに、正しい。**

2. $\phi \in \phi$

(解答) **空集合** ϕ **の要素数は0 より，要素** ϕ **を持つことができない．ゆえに、正しくない。**

3. $\phi \subseteq \{\phi\}$

(解答) **任意の集合** X **に対し、** $\phi \subseteq X$ **である.**

そこで， $X = \{\phi\}$ **とすると** $\phi \subseteq \{\phi\}$**. ゆえに、正しい。**

4. $\phi \in \{\phi\}$

(解答) **集合** X **を** $X = \{x\}$ **とすれば，** $x \in X$ **である.**

$x = \phi$ **とすれば，** $\phi \in X = \{\phi\}$**. ゆえに，正しい.**

5. $\underline{\{\phi\} \subseteq \{\phi\}}$

(解答) **任意の集合** X **に対し，** $X \subseteq X$**．** $X = \{\phi\}$ **とすれば** $\{\phi\} \subseteq \{\phi\}$**.**

ゆえに，正しい．

6. $\underline{\{\phi\} \in \{\phi\}}$

(解答) $\{\phi\}$ **の要素は** ϕ **だけであり，** $\{\phi\}$ **を要素としてもたない．**

ゆえに，正しくない。

(定義の記号)

記号 “ $:=$ ” を “ **定義する** ” という意味で用いる。(コロン イコール)

$A := B$ とは、既知の B によって A を新しく定義することを意味する。

すなわち、B によって A を定義する。

$B =: A$ と記述しても、$A := B$ と同じ意味である。

定義 13. 集合の間に、次のような 演算 “$\cup, \cap, +, c, -, \ominus$” を考える。
U を集合とし、$X \subseteq U$, $Y \subseteq U$ とする。

1. $X \cup Y := \{x \mid x \in X$ または $x \in Y\}$. (X と Y の**和集合**)

2. $X \cap Y := \{x \mid x \in X$ かつ $x \in Y\}$. (X と Y の**積集合**, **共通集合**)

3. $X \cap Y = \phi$ のとき、$X \cup Y$ を X と Y の**直和**といい、
$X + Y$ と表すことがある。

4. $X^c := \{x \mid x \in U, x \notin X\}$. ($U$ に関する X の**補集合**, complement)

5. $X - Y := X \cap Y^c$. (X と Y の **差集合**)　(資料要訂正 p.3, 定義 1.13 の 6 「象 → 称」)

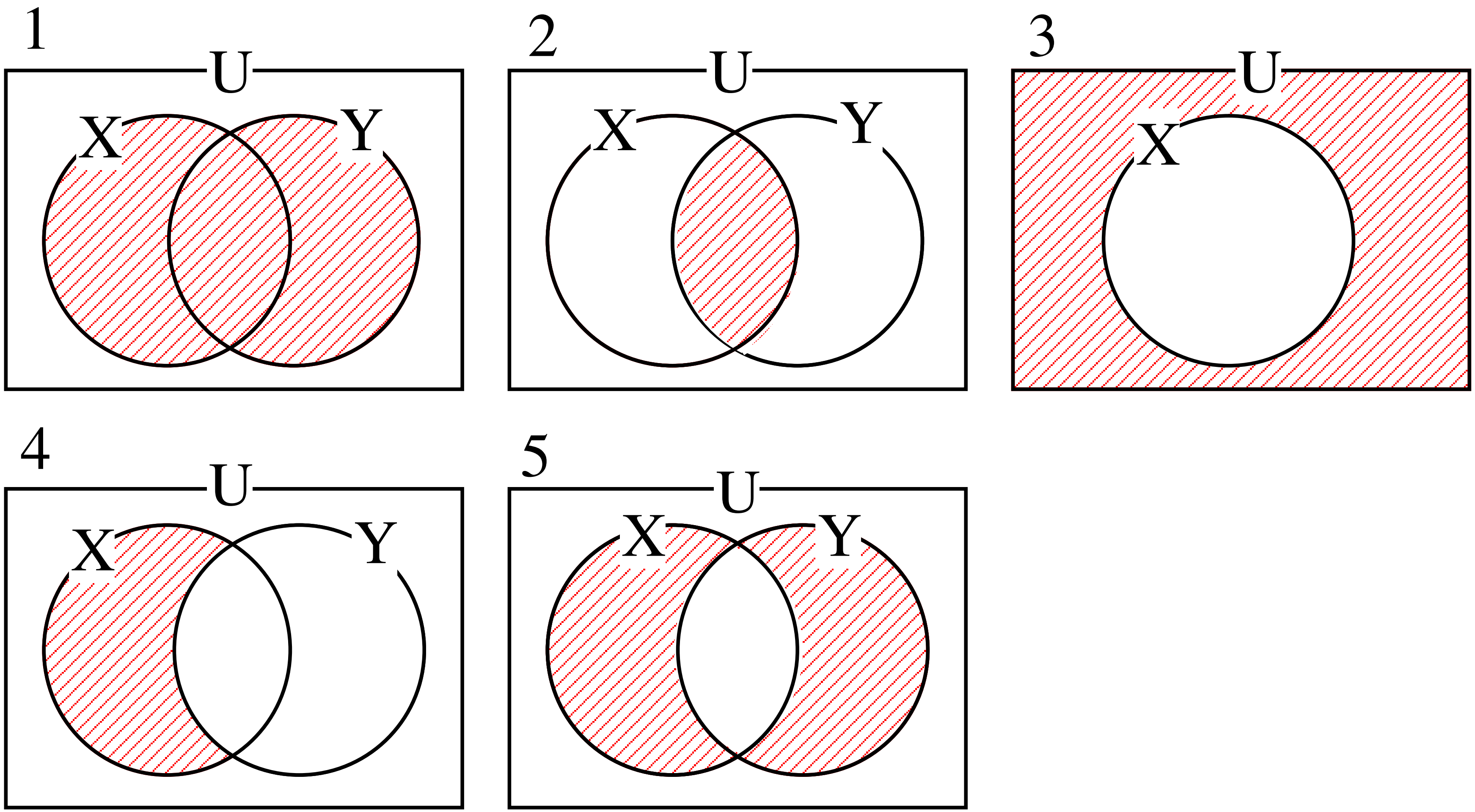
6. $X \ominus Y := (X - Y) \cup (Y - X)$. ($X$ と Y の**対称差**)

（注意）

1. 上記定義における集合 U を**全体集合**という。

2. “$x \in X$ または $x \in Y$” は，“$x \in X$ かつ $x \in Y$” となる場合を含む。
$X \cap Y \subseteq X \cup Y$

ベン図(Venn diagram)

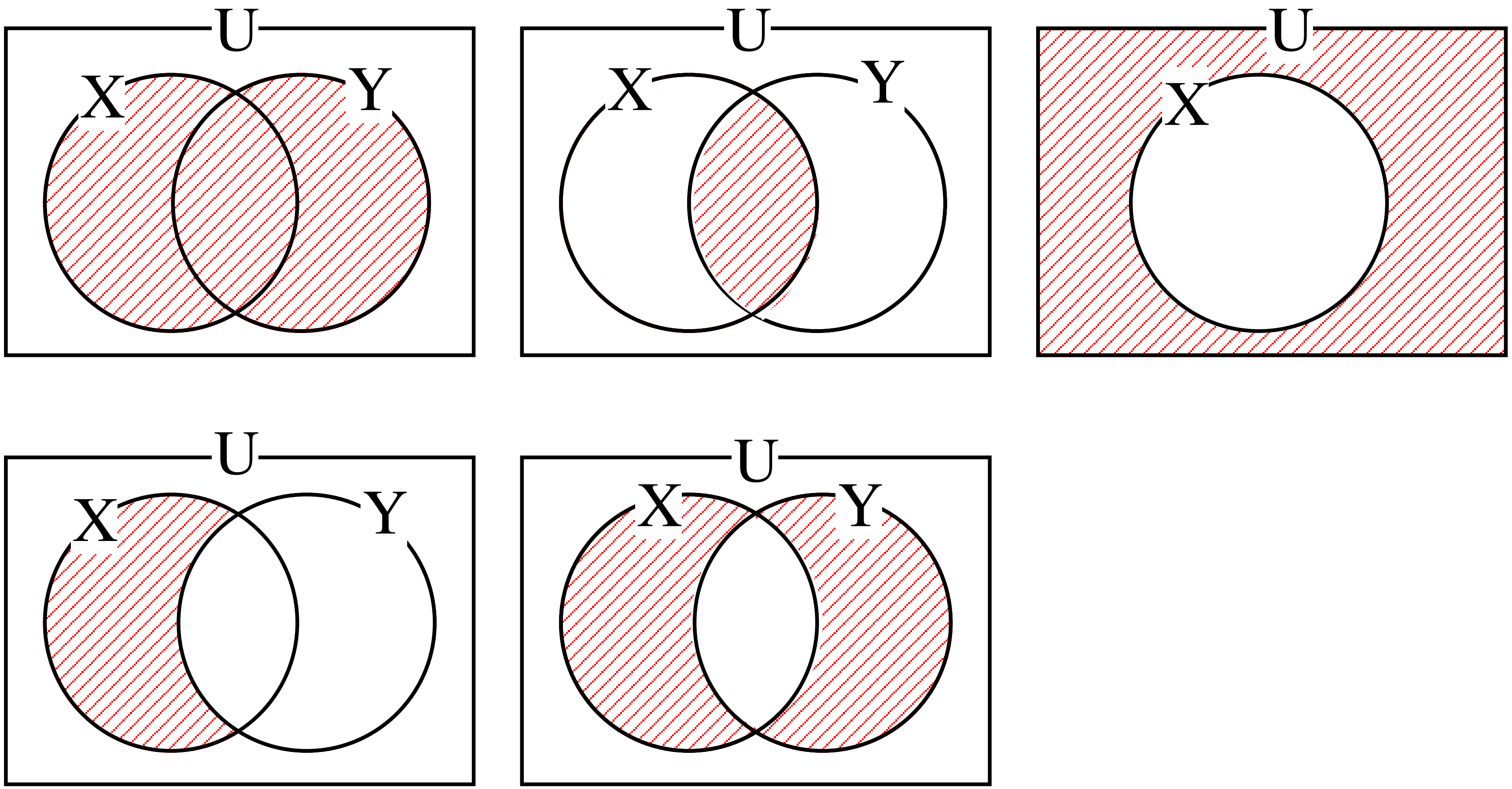


1. $X \cup Y$, **2.** $X \cap Y$, **3.** X^c, **4.** $X - Y = X \cap Y^c$,
5. $X \ominus Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.

(注意: 直観的に理解する場合, ベン図は便利ではあるが, 証明するときの本質には用いない)

例 14. $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$, $X = \{3,4,5\}$, $Y = \{1,2,3,4,6\}$ とするとき、$X \cup Y$, $X \cap Y$, X^c, $X - Y$, $X \ominus Y$ をそれぞれ外延的記法で表せ。

(解答) $X \cup Y = \{1,2,3,4,5,6\}$, $X \cap Y = \{3,4\}$, $X^c = \{1,2,6,7,8\}$, $X - Y = \{5\}$, $X \ominus Y = \{1,2,5,6\}$.



定理 15. U **を全体集合とする。**
U **の任意の部分集合** X **に対し、以下が成立する。**

1. $X \cup U = U$, $X \cap U = X$.
2. $X \cup \phi = X$, $X \cap \phi = \phi$.
3. $X \cup X^c = U$, $X \cap X^c = \phi$.
4. $(X^c)^c = X$.

1. $\underline{X \cup U = U}$

(証明) **(**$X \cup U \subseteq U$ **かつ** $X \cup U \supseteq U$ **を示せばよい)**

仮定より，$X \subseteq U$ **である．**

まず，$\subseteq$ **を示す:**

任意の $x \in X \cup U$ **に対し,** $X \subseteq U$ **より,** $x \in U$**．ゆえに,** $X \cup U \subseteq U$**.**

次に，$\supseteq$**を示す:**

任意の $x \in U$ **に対し,** $x \in X \cup U$ **より,** $X \cup U \supseteq U$**.**

以上より、$X \cup U = U$**.** ∎

2. $\underline{X \cap U = X}$

(証明) $\subseteq$**)** **任意の** $x \in X \cap U$ **に対し,** $X \subseteq U$ **より,** $x \in X$ **は明らか.**

ゆえに, $X \cap U \subseteq X$**.**

$\supseteq$**)** **任意の** $x \in X$ **に対し,** $x \in X \subseteq U$ **より,** $x \in X$ **かつ** $x \in U$**.**

すなわち，$x \in X \cap U$**．ゆえに、** $X \cap U \supseteq X$**.**

以上より、$X \cap U = X$**.** ∎

例 16. X, Y を集合とする．このとき，次を証明せよ。

1. $X \subseteq Y$ ならば $X \cap Y = X$ が成り立つ。
2. $X \cap Y = X$ ならば $X \subseteq Y$ が成り立つ。

定理 17. 任意の集合 $X,\ Y,\ Z$ に対し、以下の等式が成立する。

1. $X \cup Y = Y \cup X$,
   $X \cap Y = Y \cap X$. (<u>**交換律**</u>)
2. $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$,
   $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$. (<u>**結合律**</u>)
3. $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$,
   $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$. (<u>**分配律**</u>)
4. $X \cup X = X$,
   $X \cap X = X$. (<u>**ベキ等律**</u>)
5. $(X \cup Y) \cap X = X$,
   $(X \cap Y) \cup X = X$. (<u>**吸収律**</u>)

1. $\underline{(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)}$ **(分配律)**

(証明) $A :=$ 左辺, $B :=$ 右辺 とする.

まず, $A \subseteq B$ を示す:

任意の $x \in A$ に対し, $x \in X \cup Y$ かつ $x \in Z$.

このとき, $x \in X$ または $x \in Y$ である.

そこで, i) $x \in X$ かつ $x \in Z$ ならば $x \in X \cap Z$ より, $x \in B$.

または, ii) $x \in Y$ かつ $x \in Z$ ならば $x \in Y \cap Z$ より, $x \in B$.

したがって, 常に $x \in B$. ゆえに, $A \subseteq B$.

次に, $A \supseteq B$ を示す:

任意の $x \in B$ に対し, $x \in X \cap Z$ または $x \in Y \cap Z$.

そこで, i) $x \in X \cap Z$ ならば $x \in X \cup Y$ かつ $x \in Z$ より, $x \in A$.

または, ii) $x \in Y \cap Z$ ならば $x \in X \cup Y$ かつ $x \in Z$ より, $x \in A$.

したがって, 常に $x \in A$ が成り立つ. ゆえに, $A \supseteq B$.

以上より, $A = B$ が成り立つ. ∎

2. $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$ (分配律)

(証明) $A :=$ 左辺, $B :=$ 右辺 とする.

まず, $A \subseteq B$ を示す:

任意の $x \in A$ に対し, $x \in X \cap Y$ または $x \in Z$.

そこで, i) $x \in X \cap Y$ ならば $x \in X \cup Z$ かつ $x \in Y \cup Z$ より, $x \in B$.

または, ii) $x \in Z$ ならば $x \in X \cup Z$ かつ $x \in Y \cup Z$ より, $x \in B$.

したがって, 常に $x \in B$. ゆえに, $A \subseteq B$.

次に, $A \supseteq B$ を示す:

任意の $x \in B$ に対し, $x \in X \cup Z$ かつ $x \in Y \cup Z$.

そこで, i) $x \in Z$ ならば, 明らかに $x \in A$.

または, ii) $x \notin Z$ ならば $x \in X$ かつ $x \in Y$ より, $x \in X \cap Y$.

ゆえに, $x \in A$.

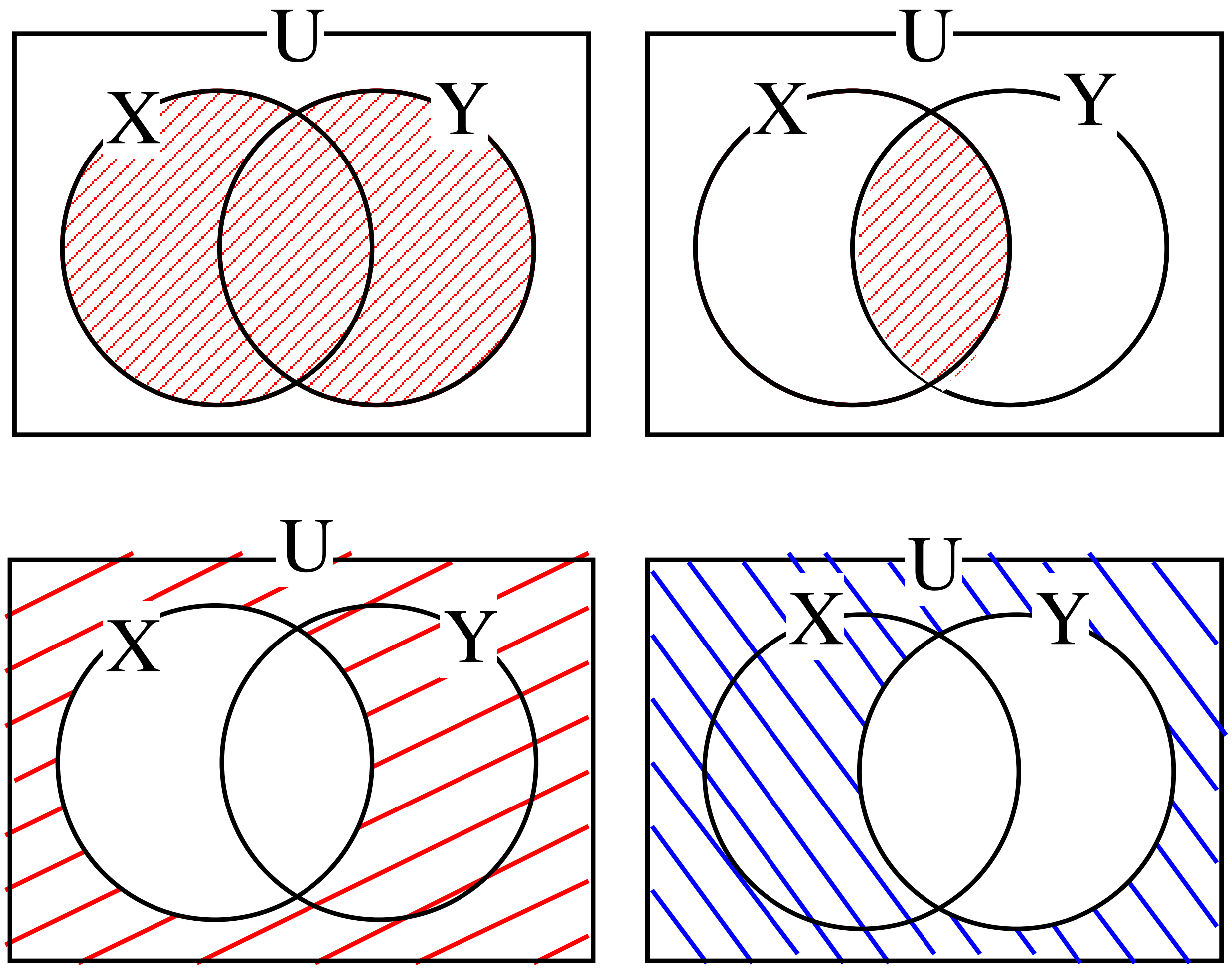
したがって, 常に $x \in A$. ゆえに, $A \supseteq B$.

以上より, $A = B$ が成り立つ. ∎

定理 18. **(ド・モルガンの法則)**
和集合, 共通集合, 補集合の間には, 以下のような関係がある.

1. $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$.

2. $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$.



2. $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$.

(証明)

$\subseteq$) **任意の** $x \in (X \cap Y)^c$ **に対し，**$x \notin X \cap Y$ **であるから,**

$x \notin X$ **または** $x \notin Y$ **である.**

すなわち, $x \in X^c$ **または** $x \in Y^c$ **であるから** $x \in X^c \cup Y^c$.

ゆえに, $(X \cap Y)^c \subseteq X^c \cup Y^c$ **が成り立つ.**

$\supseteq$) **任意の** $x \in X^c \cup Y^c$ **に対し，**$x \in X^c$ **または** $x \in Y^c$ **である.**

$x \in X^c$ **ならば** $x \notin X$ **である．すなわち、**$x \notin X \cap Y$.

同様に, $x \in Y^c$ **ならば** $x \notin Y$ **である．すなわち、**$x \notin X \cap Y$.

したがって, $x \in (X \cap Y)^c$.

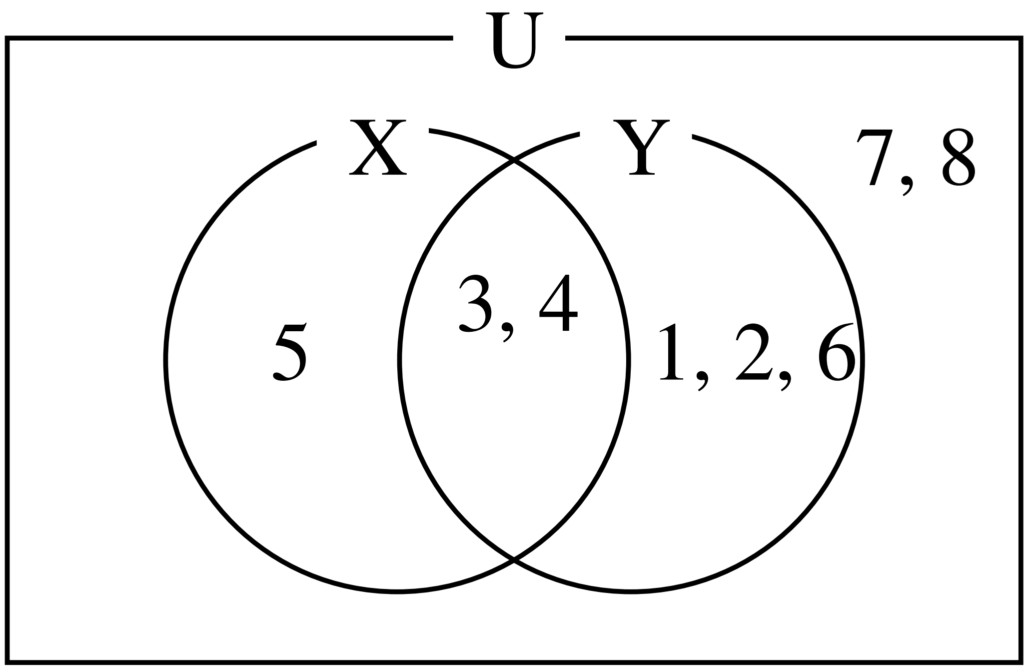
ゆえに, $(X \cap Y)^c \supseteq X^c \cup Y^c$ **が成り立つ.**

以上より、$(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$. ∎

例 19. **(ド・モルガンの法則)**
全体集合を $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ **とする.**
そして, $X = \{3,4,5\}$**,** $Y = \{1,2,3,4,6\} \subseteq U$ **とする.**
このとき, $X \cup Y = \{1,2,3,4,5,6\}$**,** $X \cap Y = \{3,4\}$**,**
$X^c = \{1,2,6,7,8\}$**,** $Y^c = \{5,7,8\}$**.**
これより、

$$(X \cup Y)^c = \{7,8\} = X^c \cap Y^c,$$

$$(X \cap Y)^c = \{1,2,5,6,7,8\} = X^c \cup Y^c.$$



例 20. 任意の集合 $X,\ Y,\ Z$ に対し、以下が成り立つことを示せ。

1. $(X \cup Y) - Z = (X - Z) \cup (Y - Z)$
2. $(X - Y) - Z = X - (Y \cup Z)$
3. $X - (Y - Z) = (X - Y) \cup (Y \cap Z)$

1. $\underline{(X \cup Y) - Z = (X - Z) \cup (Y - Z)}$

(証明) $A :=$ **左辺，** $B :=$ **右辺 とする．差集合の定義より，**

$A = (X \cup Y) \cap Z^c$**,** $X - Z = X \cap Z^c$**,** $Y - Z = Y \cap Z^c$ **に注意する.**

$\subseteq$ **) 任意の** $x \in A$ **に対し，** $x \in X \cup Y$ **かつ** $x \in Z^c$**.**

$x \in X$ **または** $x \in Y$ **である.**

i) $x \in X$ **かつ** $x \in Z^c$ **ならば,** $x \in X \cap Z^c = X - Z$ **より,** $x \in B$**.**

ii) $x \in Y$ **かつ** $x \in Z^c$ **ならば,** $x \in Y \cap Z^c = Y - Z$ **より,** $x \in B$**.**

ゆえに，常に， $x \in B$ **であるから,** $A \subseteq B$**.**

$\supseteq$ **)** $A = (X \cup Y) \cap Z^c$ **であるから，**

任意の $x \in B$ **に対し，** $x \in X - Z$ **または** $x \in Y - Z$**.**

i) $x \in X - Z = X \cap Z^c$ **ならば,** $x \in X$ **かつ** $x \in Z^c$ **より，** $x \in A$**.**

ii) $x \in Y - Z = Y \cap Z^c$ **ならば,** $x \in Y$ **かつ** $x \in Z^c$ **より，** $x \in A$**.**

ゆえに，常に， $x \in A$ **であるから,** $A \supseteq B$**.**

以上より， $A = B$ **が成り立つ．** ∎

$$(X \cup Y) - Z = (X - Z) \cup (Y - Z)$$

(別証明)

$$\begin{aligned} (X \cup Y) - Z &= (X \cup Y) \cap Z^c \quad \textbf{(差集合の定義より)} \\ &= (X \cap Z^c) \cup (Y \cap Z^c) \quad \textbf{(分配律より)} \\ &= (X - Z) \cup (Y - Z) \quad \textbf{(差集合の定義より)}. \end{aligned}$$

2. $\underline{(X - Y) - Z = X - (Y \cup Z)}$

(証明)

$$
\begin{aligned}
(X - Y) - Z &= (X \cap Y^c) \cap Z^c && \textbf{(差集合の定義より)} \\
&= X \cap (Y^c \cap Z^c) && \textbf{(結合律より)} \\
&= X \cap (Y \cup Z)^c && \textbf{(ド・モルガンの法則より)} \\
&= X - (Y \cup Z). && \textbf{(差集合の定義より)}
\end{aligned}
$$

3. $\underline{X - (Y - Z) = (X - Y) \cup (Y \cap Z)}$

(証明)

$$
\begin{aligned}
X - (Y - Z) &= X \cap (Y \cap Z^c)^c && \textbf{(差集合の定義より)} \\
&= X \cap (Y^c \cup Z) && \textbf{(ド・モルガンの法則より)} \\
&= (X \cap Y^c) \cup (X \cap Z) && \textbf{(分配律より)} \\
&= (X - Y) \cup (X \cap Z). && \textbf{(差集合の定義より)}
\end{aligned}
$$

定義 21. 集合 $X_1, \ldots, X_n$ に対し、以下を定義する。

1. ($X_1, \ldots, X_n$ の**和集合**)

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i := \{x \mid \text{ある } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ に対し、} x \in X_i\}.$$

2. ($X_1, \ldots, X_n$ の**積集合**，**共通集合**)

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i := \{x \mid \text{すべての } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ に対し、} x \in X_i\}.$$

（例） $X_1 = \{1, 2\}$，$X_2 = \{2, 3\}$ とする。このとき，

$\bigcup_{i=1}^{2} X_i = \{1, 2, 3\}$，

$\bigcap_{i=1}^{2} X_i = \{2\}$.

定理 22. **任意の自然数 n と、任意の n 個の集合 $X_1, \ldots, X_n$ に対し，以下の等式が成り立つ。**

1.

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cup \cdots \cup X_n$$

2.

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap \cdots \cap X_n$$

2. $\bigcap_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap \cdots \cap X_n$

(証明)

集合の数 n に関する数学的帰納法で示す。

$n = 1$のとき、$X_1 = X_1$.

$n = k$のとき、$\cap_{i=1}^{k} X_i = X_1 \cap \cdots \cap X_k$ が成り立つと仮定する。

$n = k+1$のとき、$\cap_{i=1}^{k+1} X_i = X_1 \cap \cdots \cap X_{k+1}$が成り立つことを示そう。

そのために、まず、$\cap_{i=1}^{k+1} X_i = (\cap_{i=1}^{k} X_i) \cap X_{k+1}$が成り立つことを示す。

$\subseteq$) $x \in \cap_{i=1}^{k+1} X_i$ とする。

集合$\cap_{i=1}^{n} X_i$の定義より、すべての$i \in \{1, \ldots, k+1\}$に対し、$x \in X_i$.

したがって、$x \in \cap_{i=1}^{k} X_i$ かつ $x \in X_{k+1}$ である。

すなわち、$x \in \cap_{i=1}^{k} X_i \cap X_{k+1}$.

ゆえに、$\cap_{i=1}^{k+1} X_i \subseteq (\cap_{i=1}^{k} X_i) \cap X_{k+1}$.

$\supseteq$) $x \in (\cap_{i=1}^{k} X_i) \cap X_{k+1}$ とする。

$x \in \cap_{i=1}^{k} X_i$ より、すべての$i \in \{1, \ldots, k\}$に対し、$x \in X_i$ であり、さらに、 $x \in X_{k+1}$ が成り立つ。

したがって、すべての$i \in \{1, \ldots, k+1\}$に対し、$x \in X_i$ より、$x \in \cap_{i=1}^{k+1} X_i$である。

ゆえに、$\cap_{i=1}^{k+1} X_i \supseteq (\cap_{i=1}^{k} X_i) \cap X_{k+1}$.

以上より、$\cap_{i=1}^{k+1} X_i = (\cap_{i=1}^{k} X_i) \cap X_{k+1}$が成り立つ.

ゆえに、$n = k$の仮定より,

$\cap_{i=1}^{k+1} X_i = (\cap_{i=1}^{k} X_i) \cap X_{k+1} = X_1 \cap \cdots \cap X_k \cap X_{k+1}$

が成り立つ。

以上のことから，数学的帰納法により，任意の自然数 n に対して

$\cap_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap \cdots \cap X_n$

は成り立つ．∎

定理 23. **(拡張されたド・モルガンの法則)**
任意の集合 $X_1, \ldots, X_n$ **に対し, 以下が成り立つ.**

1. $$\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} X_i^c.$$

2. $$\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} X_i^c.$$

定義 24. $\mathcal{S}$ を集合族(すなわち、集合を要素とする集合)とする。

1. (**和集合**)
$$\bigcup_{X \in \mathcal{S}} X := \{x \mid \text{ある } X \in \mathcal{S} \text{ に対し}, x \in X\}.$$
2. (**積集合**, **共通集合**)
$$\bigcap_{X \in \mathcal{S}} X := \{x \mid \text{すべての } X \in \mathcal{S} \text{ に対し}, x \in X\}.$$

(集合族 $\mathcal{S}$ の要素を集合 $X_1, \ldots, X_n$ とすれば $\mathcal{S} = \{X_1, \ldots, X_n\}$.)

この記法を用いると、前定理は以下のように記述できる.

定理 25. (拡張されたド・モルガンの法則)
任意の集合 $X_1, \ldots, X_n$ に対し, 以下が成り立つ.

1. $(\cup_{X \in \mathcal{S}} X)^c = \cap_{X \in \mathcal{S}} X^c$.
2. $(\cap_{X \in \mathcal{S}} X)^c = \cup_{X \in \mathcal{S}} X^c$.

定義 26. (n 重対, **順序対**)

"もの" $x_1, \dots, x_n$ に対し、$(x_1, \dots, x_n)$ を $x_1, \dots, x_n$ の

n 重対 (じゅうつい) という。

特に、(x_1, x_2) を x_1 と x_2 の **順序対** という。($(x_1, x_2) \neq (x_2, x_1)$)

定義 27. (直積)

$X_1, \dots, X_n$ を集合とする。

$$X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}$$

を $X_1, \dots, X_n$ の **直積**, または **直積集合** という。

$X_1 = \cdots = X_n = X$ のとき、$X^n := X_1 \times \cdots \times X_n$ と表す。

(注意) もし，$X_i = \phi$ ならば $X_1 \times \cdots \times X_n = \phi$.

なぜなら，どのような n 重対 $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ に対しても，
$x_i \notin X_i = \phi$ であるから $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \notin X_1 \times \cdots \times X_i \times \cdots \times X_n$.

例 28. （直積集合）

1. $X = \{2, 1\}$, $Y = \{3, 2, 4\}$ のとき、$X \times Y$ を外延的記法で表せ。

2. $\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{N}^2, x^2 + y^2 \leq 8\}$ を外延的記法で表せ。

3. $\{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbf{N}^3, x + y + z = 4\}$ を外延的記法で表せ。

4. 任意の X, Y, Z に対し、以下が成り立つことを示せ。

$$(X \cap Z) \times Y = (X \times Y) \cap (Z \times Y).$$

5. X, Y, Z, W を集合とする。以下が成り立つことを証明せよ。

$$(X \cap Y) \times (Z \cap W) = (X \times Z) \cap (Y \times W)$$

1. $X = \{2, 1\}$, $Y = \{3, 2, 4\}$ のとき、$X \times Y$ を外延的記法で表せ。

(解答) $X \times Y = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$.

2. $\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{N}^2, x^2 + y^2 \leq 8\}$ を外延的記法で表せ。

(解答) $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.

3. $\{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbf{N}^3, x + y + z = 4\}$ を外延的記法で表せ。

(解答) $\{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$.

4. $\underline{(X \cap Z) \times Y = (X \times Y) \cap (Z \times Y)}$

(解答)

$\subseteq$) **任意の**$(a, b) \in (X \cap Z) \times Y$**に対し，**

$a \in X$ **かつ** $a \in Z$ **かつ** $b \in Y$ **である．**

したがって，$(a, b) \in X \times Y$ **かつ** $(a, b) \in Z \times Y$**.**

ゆえに，$(a, b) \in (X \times Y) \cap (Z \times Y)$**.**

$\supseteq$) **上記の逆を示せばよい．**

任意の $(a, b) \in (X \times Y) \cap (Z \times Y)$ **に対し，**

$(a, b) \in X \times Y$ **かつ** $(a, b) \in Z \times Y$**.**

すなわち，$a \in X$ **かつ** $a \in Z$**. さらに，**$b \in Y$**.**

ゆえに， $(a, b) \in (X \cap Z) \times Y$**.**

以上より，左辺$=$**右辺.** ∎

5. $\underline{(X \cap Y) \times (Z \cap W) = (X \times Z) \cap (Y \times W)}$

(解答) $\subseteq$ **) 任意の** $(a,b) \in (X \cap Y) \times (Z \cap W)$ **に対し，**

$a \in X \cap Y$ **かつ** $b \in Z \cap W$.

したがって，"$a \in X$ **かつ** $a \in Y$" **かつ** "$b \in Z$ **かつ** $b \in W$."

順序を換え，"$a \in X$ **かつ** $b \in Z$" **かつ** "$a \in Y$ **かつ** $b \in W$."

ゆえに，$(a,b) \in X \times Z$ **かつ** $(a,b) \in Y \times W$ **より，**

$(a,b) \in (X \times Z) \cap (Y \times W)$.

$\supseteq$ **) 上記の逆を示せばよい．任意の** $(a,b) \in (X \times Z) \cap (Y \times W)$ **に対し，**

$(a,b) \in X \times Z$ **かつ** $(a,b) \in Y \times W$.

すなわち，"$a \in X$ **かつ** $b \in Z$" **かつ** "$a \in Y$ **かつ** $b \in W$."

順序を換え，"$a \in X$ **かつ** $a \in Y$" **かつ** "$b \in Z$ **かつ** $b \in W$."

ゆえに，$a \in X \cap Y$ **かつ** $b \in Z \cap W$ **より，**

$(a,b) \in (X \cap Y) \times (Z \cap W)$.

以上より，左辺＝右辺. ∎

（例）

X, Y, Z, W を集合とする。
以下の等式が正しければ証明し、そうでなければ反例を挙げよ。

1. $(X \cup Y) \times (Z \cup W) = (X \times Z) \cup (Y \times W)$
2. $(X - Y) \times (Z - W) = (X \times Z) - (Y \times W)$
3. $(X \ominus Y) \times (Z \ominus W) = (X \times Z) \ominus (Y \times W)$
4. $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$
5. $(X - Y) \times Z = (X \times Z) - (Y \times Z)$
6. $(X \ominus Y) \times Z = (X \times Z) \ominus (Y \times Z)$

定義 29. **(べき集合)**

X を集合とする。

X の部分集合の全体からなる集合を X の<u>**ベキ集合**</u>とよび、2^X と表す:

$2^X := \{Y \mid Y \subseteq X\}$.

注意

ベキ集合 2^X は、X 自身と 空集合 ϕ を要素として含む。

冪集合, 巾集合, power set

例 30.　(べき集合)

1. $X = \{a\}$ とするとき、2^X を外延的記法で表せ。

2. $X = \{a, b\}$ とするとき、2^X を外延的記法で表せ。

3. $X = \{a, b, c\}$ とするとき、2^X を外延的記法で表せ。

4. $X = \{\phi, \{a\}\}$ とするとき、2^X を外延的記法で表せ。

5. $\{a\} \neq \{\{a\}\}$であることに注意する。

6. $2^{\{\phi\}}$ を外延的記法で表せ。
   (ヒント: $X = \{a\}$のaをϕに置き換えて考える。)

7. $2^{2^{\{\phi\}}}$ を外延的記法で表せ。

8. $X = \{a, b\}$とするとき、$2^X \times X$を外延的記法で表せ.

1. $\underline{X = \{a\}}$

(解答) $2^X = \{\phi, X\}$.

2. $\underline{X = \{a, b\}}$

(解答) $2^X = \{\phi, \{a\}, \{b\}, X\}$.

3. $\underline{X = \{a, b, c\}}$

(解答) $2^X = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, X\}$.

4. $\underline{X = \{\phi, \{a\}\}}$

（解答） $2^X = \{\phi, \{\phi\}, \{\{a\}\}, X\}$.

6. $\underline{2^{\{\phi\}}}$

（解答） $2^{\{\phi\}} = \{\phi, \{\phi\}\}$.

7. $\underline{2^{2^{\{\phi\}}}}$

（解答） $2^{2^{\{\phi\}}} = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$.

8. $X = \{a, b\}$ **とするとき、**$2^X \times X$ **を外延的記法で表せ.**

(解答) $2^X = \{\phi, \{a\}, \{b\}, X\}$ **より,**

$$2^X \times X = \{(\phi, a), (\{a\}, a), (\{b\}, a), (X, a), \\ (\phi, b), (\{a\}, b), (\{b\}, b), (X, b)\}.$$

定義 31. (有限集合, 無限集合)
有限個の要素からなる集合を有限集合という。それ以外の集合を無限集合という。有限集合 X の要素数を $|X|$ と表す。

(注意)

1. 空集合 ϕ は有限集合であり、$|\phi| = 0$ である。
2. 有限集合 X, Y に対し、$X \cap Y = \phi$ ならば $|X \cup Y| = |X| + |Y|$ が成り立つ。
3. 一般に、有限集合 $X_1, \ldots, X_n$ に対し、$X_i \cap X_j = \phi \ (i \neq j)$ ならば、$|X_1 \cup \cdots \cup X_n| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$ が成り立つ。
4. 上記のことから、有限集合の要素数を数え上げる1つの方法として、それを互いに共通部分をもたない、いくつかの部分集合に分割し、それぞれの要素数を数えて足し合わせればよい。

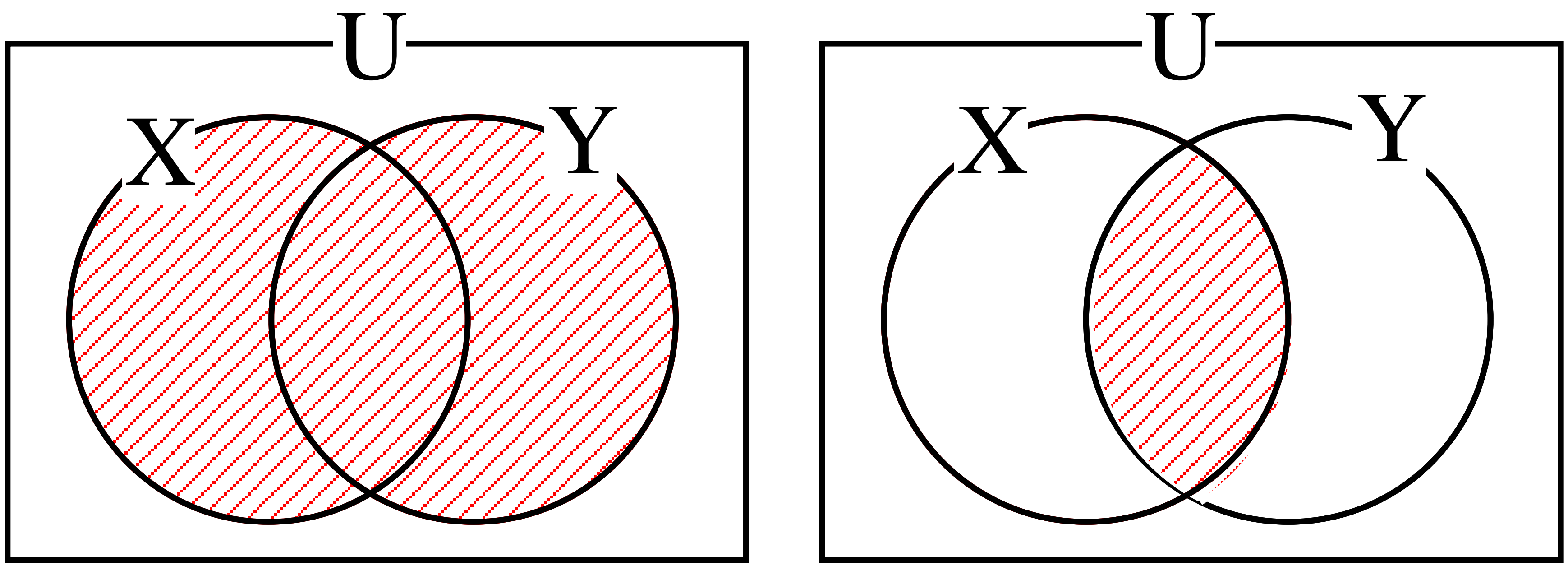
定理 32. (包除原理)

有限集合 X, Y に対し、以下の等式が成り立つ。

1. $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$. (包除原理)
   (Principle of inclusion and exclusion)

2. $|X \times Y| = |X| \times |Y|$.

3. $|2^X| = 2^{|X|}$.



1. $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ (**包除原理**)

(証明) **互いに共通部分をもたないような部分集合で、集合 X, $X \cup Y$ を次のように表す。**

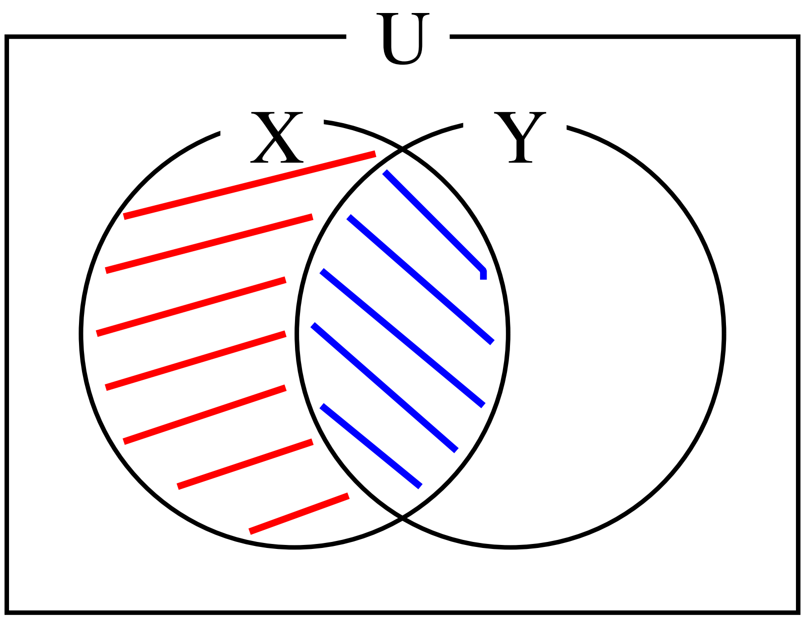
$$X = (X - Y) \cup (X \cap Y), \; X \cup Y = (X - Y) \cup Y.$$

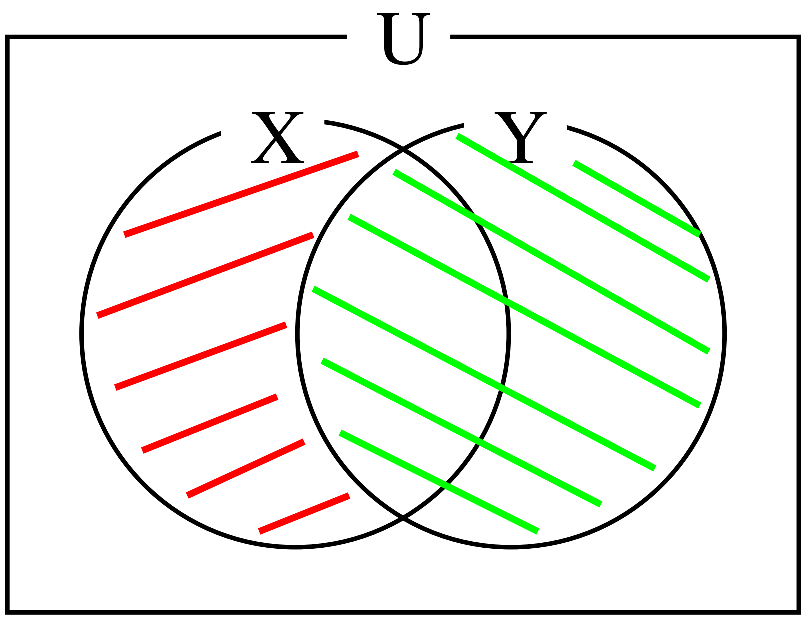
それぞれより、

$$|X| = |X - Y| + |X \cap Y|, \; |X \cup Y| = |X - Y| + |Y|.$$

これらより、$|X - Y|$の項を消すと、

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|. \; ∎$$





2. $|X \times Y| = |X| \times |Y|$

(証明) $X \times Y$ **の要素は、要素** $x \in X$ **と** $y \in Y$ **の順序対** (x, y) **である。**

x と y がとりうる値の個数はそれぞれ $|X|$ と $|Y|$ である。

したがって、それらから得られる順序対の全体の個数は $|X| \times |Y|$ となる。

ゆえに， $|X \times Y| = |X| \times |Y|$. ∎

3. $|2^X| = 2^{|X|}$

(証明) **(考え方)**

$X = \{x_1,\ x_2,\ x_3\}$, $|X| = 3$ について考える．

$\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ (b_1, b_2, b_3)	X の部分集合
$(0, 0, 0)$	$\{\ \} = \phi$
$(1, 0, 0)$	$\{x_1\}$
$(0, 1, 0)$	$\{x_2\}$
$(0, 0, 1)$	$\{x_3\}$
$(1, 1, 0)$	$\{x_1, x_2\}$
$(1, 0, 1)$	$\{x_1, x_3\}$
$(0, 1, 1)$	$\{x_2, x_3\}$
$(1, 1, 1)$	$\{x_1, x_2, x_3\}$

$\Rightarrow \quad 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 2^{|X|}$

$$\begin{cases} b_i = 1 & \text{ならば要素 } x_i \text{ を部分集合に含める} \\ b_i = 0 & \text{ならば要素 } x_i \text{ を部分集合に含めない} \end{cases}$$

(証明) 仮定より、X は有限集合であるから、

$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $|X| = n$ としても、一般性は失われない。

X の部分集合を決める方法として、以下のことを考える。

0 と 1 からなる集合を $B = \{0, 1\}$ とし、その n 重の直積集合を B^n とする。

B^n の要素は、$(b_1, \ldots, b_n)$ という n 重対となる。

そこで、$(b_1, \ldots, b_n)$ を用いて、次のように X の部分集合を定める。

b_i の値が、$\begin{cases} b_i = 1 & \text{ならば要素 } x_i \text{ を部分集合に含める} \\ b_i = 0 & \text{ならば要素 } x_i \text{ を部分集合に含めない} \end{cases}$

この方法により、B^n の要素から過不足なく、X のすべての部分集合を定めることができる。

B^n の要素数は 2^n 個であるから、すべての部分集合の個数も 2^n 個である。

ゆえに、$|2^X| = 2^n = 2^{|X|}$. ∎

(別解) $\underline{|2^X| = 2^{|X|}}$

n個の中から k を選び出す組合せの数は $\binom{n}{k} = {}_nC_k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ である。

したがって、X の部分集合で要素数が k であるものは $\binom{n}{k}$ 個である。

これより、X の部分集合の総数 $|2^X|$ は $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ となる。

すなわち，$|2^X| = 2^n = 2^{|X|}$.

ここで、2項定理 $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m}$ に

$x = y = 1$ を代入すると、$\displaystyle\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n$ が得られる。∎

2項定理 $(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m}$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^3 &= \binom{3}{0} \cdot x^3 + \binom{3}{1} \cdot x^2 y + \binom{3}{2} \cdot x^1 y^2 + \binom{3}{3} \cdot y^3 \\
&= 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 y + 3 \cdot x^1 y^2 + 1 \cdot y^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2^3 = (1+1)^3 &= \binom{3}{0} \cdot 1 + \binom{3}{1} \cdot 1 + \binom{3}{2} \cdot 1 + \binom{3}{3} \cdot 1 \\
&= 1 + 3 + 3 + 1 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

例 33. n個の中からkを選び出す組合せの数 $\binom{n}{k}$ が $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ と表されることは、良く知られている。その式には、割算が含まれていることが分かる。では、その式の値が常に整数になるのは、なぜだろうか。この問題を解くヒントとなる事柄を以下に記載する.

1. 「$k,\ 0 \leq k \leq n,$ に対し、$\binom{n}{k}$ は整数になる」ことを示せ。
   上記を命題$P(n)$として、nに関する数学的帰納法で証明する方法が考えられる。

2. n個の中からk個を選んで得られる順列の総数は
   $${}_nP_k = n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

3. n個の中からk個を選んで得られる組合せの総数は
   $$\binom{n}{k} = {}_nC_k = \frac{{}_nP_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

4. 「連続する k 個の自然数の積は $k!$ で割り切れる」ことを示せ。
   kに関する数学的帰納法で証明する方法が考えられる。

$\boldsymbol{5.}$ 式 $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ において、その分子 $n!$ は連続する n 個の自然数の積である。それは、連続する $(n-k)$ 個と k 個の自然数の積に分解できる。したがって、上記のことが正しければ、$\frac{n!}{(n-k)!k!}$ の値は、常に整数となることが分かる。

例 34. (包除原理)
有限集合 X, Y, Z を有限集合 U の部分集合とするとき，
以下が成り立つことを示せ。

1. $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$

2. $$\begin{aligned}|X \cap Y| &= |U| - |X^c| - |Y^c| + |X^c \cap Y^c| \\ &= |X| + |Y| + |X^c \cap Y^c| - |U|\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}|X \cap Y \cap Z| = |U| - |X^c| - |Y^c| - |Z^c| \\ +|X^c \cap Y^c| + |X^c \cap Z^c| + |Y^c \cap Z^c| - |X^c \cap Y^c \cap Z^c|\end{aligned}$$

4. $|X^c \cap Y^c \cap Z| = |Z| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$

5. 1 から 250 までの自然数の中で、2 でも 7 でも割り切れず、かつ 5 で割り切れるものは、いくつあるか。(包除原理を用いて考えよ。)

1. $\underline{|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z|}$

$$\underline{-|X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|}$$

(解答)

$$\begin{aligned} |(X \cup Y) \cup Z| &= |(X \cup Y)| + |Z| - |(X \cup Y) \cap Z| \\ &= |X| + |Y| - |X \cap Y| + |Z| - |(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)| \\ &= |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| \\ &\quad -|X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|. \end{aligned}$$

ここで、 $(X \cap Z) \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap (Z \cap Z) = X \cap Y \cap Z$ **より，**

$$\begin{aligned} |(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)| &= |X \cap Z| + |Y \cap Z| - |(X \cap Z) \cap (Y \cap Z)| \\ &= |X \cap Z| + |Y \cap Z| - |X \cap Y \cap Z| \end{aligned}$$

となることを最後の等式に用いた．∎

2. $|X\cap Y| = |U| - |X^c| - |Y^c| + |X^c\cap Y^c| = |X| + |Y| + |X^c\cap Y^c| - |U|$

(解答) 補集合の定義とド・モルガンの法則より,

$$U = (X\cup Y)\cup(X\cup Y)^c = (X\cup Y)\cup(X^c\cap Y^c)$$

$$U = X\cup X^c,\ U = Y\cup Y^c.$$

これらより、

$$|U| = |X\cup Y| + |X^c\cap Y^c| = |X| + |Y| - |X\cap Y| + |X^c\cap Y^c|.$$

ゆえに、

$$\begin{aligned}|X\cap Y| &= |X| + |Y| + |X^c\cap Y^c| - |U| \\ &= |U| - |X^c| - |Y^c| + |X^c\cap Y^c|.\end{aligned}$$

ここで, $|U| = |X| + |X^c|$, $|U| = |Y| + |Y^c|$ **より,**

$|X| + |Y| = 2|U| - |X^c| - |Y^c|$ **となることを用いた.** ∎

3. $\underline{|X \cap Y \cap Z| = |U| - |X^c| - |Y^c| - |Z^c|}$

$\underline{+|X^c \cap Y^c| + |X^c \cap Z^c| + |Y^c \cap Z^c| - |X^c \cap Y^c \cap Z^c|}$

(解答) 前記の結果 $|X \cap Y| = |U| - |X^c| - |Y^c| + |X^c \cap Y^c|$ **より，**

$$|(X \cap Y) \cap Z| = |U| - |(X \cap Y)^c| - |Z^c| + |(X \cap Y)^c \cap Z^c|.$$

そこで、

$$|(X \cap Y)^c| = |X^c \cup Y^c| = |X^c| + |Y^c| - |X^c \cap Y^c|$$

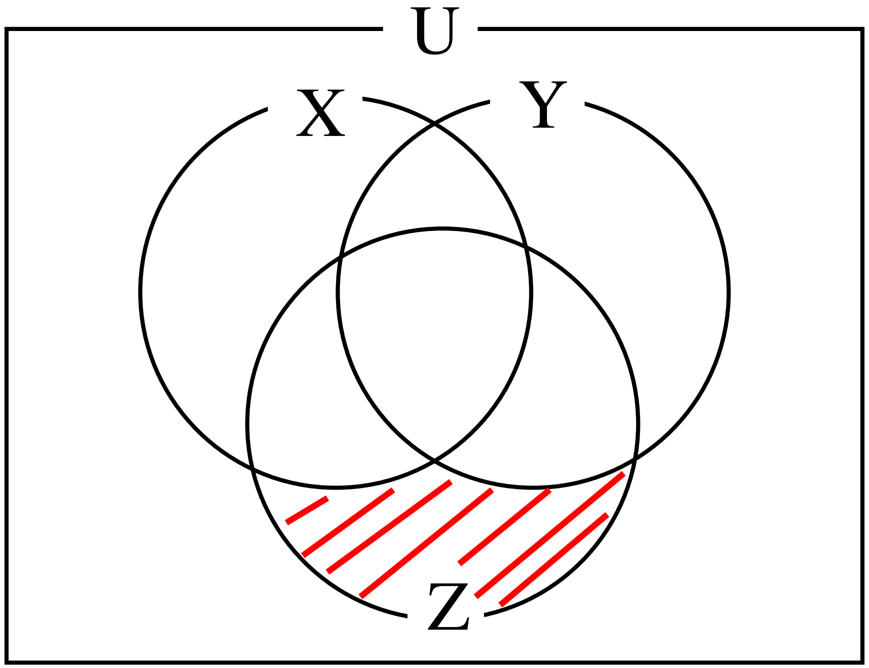
と

$$\begin{aligned}|(X \cap Y)^c \cap Z^c| &= |(X^c \cup Y^c) \cap Z^c| = |(X^c \cap Z^c) \cup (Y^c \cap Z^c)| \\ &= |X^c \cap Z^c| + |Y^c \cap Z^c| - |(X^c \cap Z^c) \cap (Y^c \cap Z^c)| \\ &= |X^c \cap Z^c| + |Y^c \cap Z^c| - |X^c \cap Y^c \cap Z^c|\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}|(X \cap Y) \cap Z| &= |U| - |X^c| - |Y^c| - |Z^c| \\ &\quad +|X^c \cap Y^c| + |X^c \cap Z^c| + |Y^c \cap Z^c| - |X^c \cap Y^c \cap Z^c|. \ \blacksquare\end{aligned}$$

4. $|X^c \cap Y^c \cap Z| = |Z| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$



5. $|X^c \cap Y^c \cap Z| = |Z| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$

(解答) **集合** $X \cup Y \cup Z$ **は共通部分もたない部分集合の和集合**

$$(X \cup Y) \cup Z = ((X^c \cap Y^c) \cap Z) \cup (X \cup Y)$$

と書ける。これより、

$$|X \cup Y \cup Z| = |X^c \cap Y^c \cap Z| + |X \cup Y| = |X^c \cap Y^c \cap Z| + |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

そして、$|X \cup Y \cup Z|$ **の公式を用いて、**

$$|X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$
$$= |X^c \cap Y^c \cap Z| + |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

となる。これを整理すると、

$$|X^c \cap Y^c \cap Z| = |Z| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$

となる。 ∎

6. **1から250までの自然数の中で、2 でも 7 でも割り切れず、かつ 5 で割り切れるものは、いくつあるか。**

(解答)

$U = \{1, \ldots, 250\}$,

$X = \{x \mid x \in U, x$ **は2で割り切れる**$\}$,

$Y = \{y \mid y \in U, y$ **は7で割り切れる**$\}$,

$Z = \{z \mid z \in U, z$ **は5で割り切れる**$\}$.

このとき，求める集合は $X^c \cap Y^c \cap Z$ **と表すことができる．**

$|Z| = 50$, $|X \cap Z| = 25$, $|Y \cap Z| = 7$, $|X \cap Y \cap Z| = 3$.

ゆえに， $|X^c \cap Y^c \cap Z| = |Z| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$ **より，**

$|X^c \cap Y^c \cap Z| = 50 - 25 - 7 + 3 = 21$ **となる。**■

包除原理 $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ **に関し，**

一般に、集合 $X_1, \ldots, X_n$ **に対し、以下が成り立つ。**

$$|X_1 \cup \cdots \cup X_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_k}|.$$

また、直積集合の $|X \times Y| = |X| \times |Y|$ **に関しても、一般に、**

$$|X_1 \times \cdots \times X_n| = |X_1| \times \cdots \times |X_n|$$

が成り立つ。

References

[1] 尾関和彦, (情報技術者のための) 離散系数学入門, 共立出版, 2004.

[2] 尾関和彦, 太田和夫, 國廣昇, “離散数学第一” 及び “離散数学第一演習問題集” 電気通信大学情報通信工学科講義資料, 2004.

[3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 2003.

[4] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 2003.

[5] S. Lipschutz著, 成嶋弘監訳, 離散数学 (コンピュータサイエンスの基礎数学), オーム社, 2004(H16).

[6] 小倉久和, 情報の基礎離散数学 (– 演習を中心とした –), 近代科学社, 2006.

[7] 町田元, 横森貴, 計算機数学, 森北出版, 1990.