```
\documentclass[a4j,10pt]{jarticle} % ファイル名 small.tex
% プリアンブル
\title{ ロピタルの定理について }   % 表題
\author{ 電気通信大学 調布太郎 }   % 著者名
\date{ 平成 22 年 4 月 1 日 }      % 日付

\begin{document}                     % document 環境
% 文書の本体
\maketitle                           % maketitle コマンド

以下に、ロピタルの定理について説明し、不定形の極限値の計算例を示す。

\section{ロピタルの定理}             % 第 1 節

実数値関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対し、
$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$
であっても、$\alpha=0,$  $\beta=0$ の場合は
$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
が存在するとは限らない。それが存在する場合、
$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
を $\frac{ 0 }{ 0 }$ {\gt の不定形の極限値}という。
以下に、ロピタルの定理を示す。
\begin{quote}                        % quota 環境
{\bf 定理} ({\bf ロピタルの定理} :
{\bf $\frac{ 0 }{ 0 }$ の不定形の極限値}) \\
$\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$
であっても、$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
が存在するときは、
\begin{eqnarray}                     % eqnarray 環境
\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}
= \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}
\end{eqnarray}
が成り立つ。
ここで、$f'(x), $ $g'(x)$ はそれぞれ $f(x)$ と $g(x)$ の
導関数である\footnote{
導関数 $f'(x)$ を求めることを $f(x)$ を微分するという。}。
\end{quote}

\section{極限値の計算例}             % 第 2 節

ロピタルの定理を $\frac{0}{0}$ の不定形の極限値
$\displaystyle{ \lim_{x \to 0} \frac{ {a}^{x} - 1 }{ x } }$
に適用し、具体的に極限値を計算してみよう。
ただし、$a > 0$ とする。
\begin{eqnarray}                     % eqnarray 環境
\lim_{x \to 0} \frac{ {a}^{x} - 1 }{ x }
&=& \lim_{x \to 0} \frac{ {a}^{x} \log_{e}a }{ 1 } \\
&=& \log_{e}a  \lim_{x \to 0} {a}^{x} \\
&=& = \log_{e}a .
\end{eqnarray}
ゆえに、
$\displaystyle{ \lim_{x \to 0} \frac{ {a}^{x} - 1 }{ x } }
= \log_{e}a $
となる。
\end{document}
```

ロピタルの定理について

電気通信大学 調布太郎

平成 22 年 4 月 1 日

以下に、ロピタルの定理について説明し、不定形の極限値の計算例を示す。

1 ロピタルの定理

実数値関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対し、$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \lim_{x\to a} g(x) = \beta$ であっても、$\alpha = 0, \beta = 0$ の場合は $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が存在するとは限らない。それが存在する場合、$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ を $\frac{0}{0}$ **の不定形の極限値**という。以下に、ロピタルの定理を示す。

定理 (**ロピタルの定理：$\frac{0}{0}$ の不定形の極限値**)
$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = 0$ であっても、$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するときは、

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1}$$

が成り立つ。ここで、$f'(x), g'(x)$ はそれぞれ $f(x)$ と $g(x)$ の導関数である[1]。

2 極限値の計算例

ロピタルの定理を $\frac{0}{0}$ の不定形の極限値 $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$ に適用し、具体的に極限値を計算してみよう。ただし、$a > 0$ とする。

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{a^x \log_e a}{1} && (2) \\ &= \log_e a \lim_{x\to 0} a^x && (3) \\ &= = \log_e a. && (4) \end{aligned}$$

ゆえに、$\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \log_e a$ となる。

[1] 導関数 $f'(x)$ を求めることを $f(x)$ を微分するという。