

ロピタルの定理について

電気通信大学 調布太郎

平成 22 年 4 月 1 日

以下に、ロピタルの定理について説明し、不定形の極限値の計算例を示す。

1 ロピタルの定理

実数値関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対し、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ であっても、 $\alpha = 0$, $\beta = 0$ の場合は $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が存在するとは限らない。それが存在する場合、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ を $\frac{0}{0}$ の不定形の極限値という。以下に、ロピタルの定理を示す。

定理 (ロピタルの定理 : $\frac{0}{0}$ の不定形の極限値)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ であっても、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するときは、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (1)$$

が成り立つ。ここで、 $f'(x)$, $g'(x)$ はそれぞれ $f(x)$ と $g(x)$ の導関数である¹。

2 極限値の計算例

ロピタルの定理を $\frac{0}{0}$ の不定形の極限値 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ に適用し、具体的に極限値を計算してみよう。ただし、 $a > 0$ とする。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \log_e a}{1} \quad (2)$$

$$= \log_e a \lim_{x \rightarrow 0} a^x \quad (3)$$

$$= \log_e a. \quad (4)$$

ゆえに、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a$ となる。

¹ 導関数 $f'(x)$ を求めることを $f(x)$ を微分するという。