ロピタルの定理について

── 文書整形 LaTeX の例 ──

電気通信大学 調布太郎

平成 22 年 4 月 1 日

微分積分学は実数値関数に関する諸種の形の極限演算を扱う数学である [1]。以下にロピタルの定理について説明し、例を挙げる。

1　ロピタルの定理

文献 [1] によると微分積分学におけるコーシー (Cauchy) の平均値の定理の応用として、**不定形の極限値**を求めることができる**ロピタル** (L'Hospital) **の定理**がある (文献 [2] も参照)。そこで、以下にロピタルの定理を説明しよう。

実数値関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対し、$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \lim_{x\to a} g(x) = \beta$ であっても、$\alpha = 0, \beta = 0$ の場合は $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が存在するとは限らない。それが存在する場合、$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ を $\frac{0}{0}$ **の不定形の極限値**という。以下に、ロピタルの定理を示す。

定理（ロピタルの定理：$\frac{0}{0}$ の不定形の極限値）
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ であっても、$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するときは、

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1}$$

が成り立つ。ここで、$f'(x), g'(x)$ はそれぞれ $f(x)$ と $g(x)$ の導関数である[1]。

2　極限値の計算例

第 1 節で説明した、ロピタルの定理を $\frac{0}{0}$ の不定形の極限値 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$ に適用し、具体的に極限値を計算してみよう。ただし、$a > 0$ とする。分母、分子の微分はそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a^x - 1) &= a^x \log_e a, \\ \frac{d}{dx}(x) &= 1 \end{aligned}$$

で、$x \to 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} a^x \log_e a &= \log_e a \lim_{x\to 0} a^x \\ &= \log_e a, \\ \lim_{x\to 0} 1 &= 1. \end{aligned}$$

[1]導関数 $f'(x)$ を求めることを $f(x)$ を微分するという。

以上より、ロピタルの定理より、

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{a^x \log_e a}{1} && (2)\\
&= \log_e a \lim_{x \to 0} a^x && (3)\\
&= \log_e a && (4)
\end{aligned}
$$

となる。

3　グラフで確認

第 2 節の式 (4) より、$\frac{0}{0}$ の不定形の極限値 $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$ は $\log_e a$ となる。このことを gnuplot でグラフを描いて確認してみよう。例えば、$a = e$ とした場合について確認すると図 1 のグラフのようになる[2]。ただし、プロットは、以下のように指定した。

```
plot [-3:3][-1:4] (( exp(1) )**(x) - 1)/(x), log( exp(1) )
```

確かに、$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \log_e e = 1$ が成り立っているようだ。

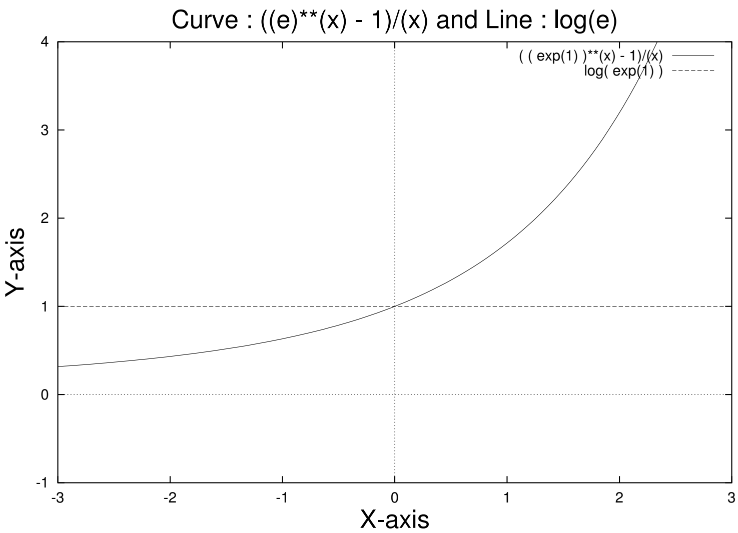

図 1: 曲線 $y = \frac{e^x - 1}{x}$ と 直線 $y = \log_e e = 1$

参考文献

[1] 鶴見茂, 微分積分学, 理工学社, 1971

[2] 松坂和夫, 解析入門 2, 岩波書店, 2002

[2] e は数学定数の一つでネイピア (Napier) の数といい、自然対数の底として用いられる。$e = 2.71828 \cdots$ と続く超越数である。