

クイズ 「狼と山羊とキャベツ」

栗原正純

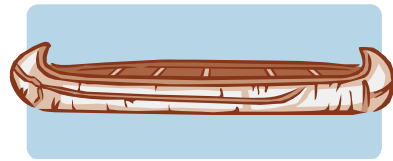
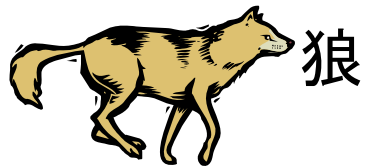
UEC Tokyo

電気通信大学 情報通信工学科

(2007. 6. 4)

(2008/11/28修正)

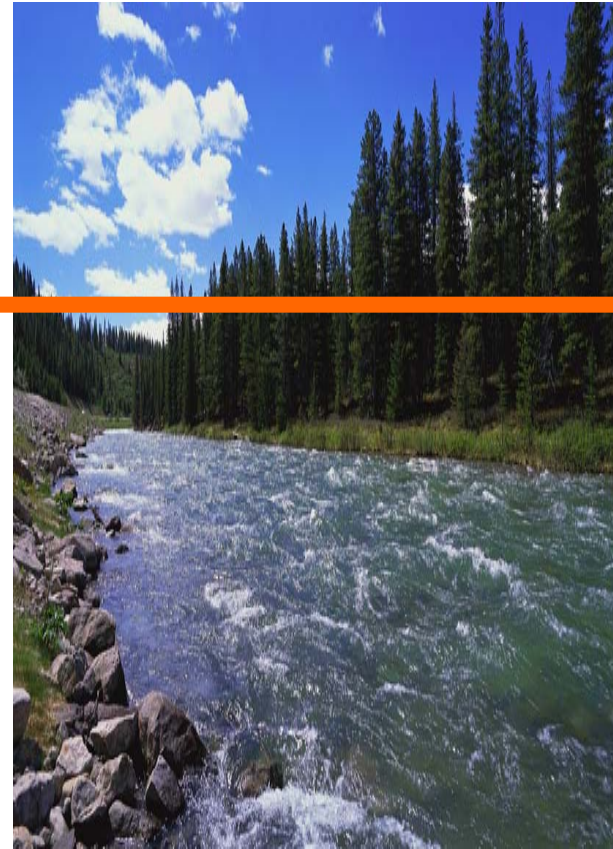
男、狼、山羊、キャベツ、船、川



船

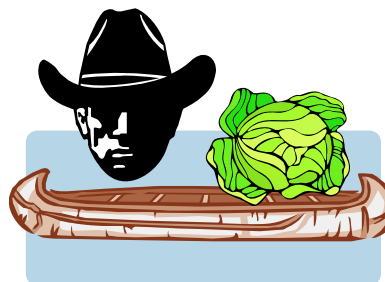
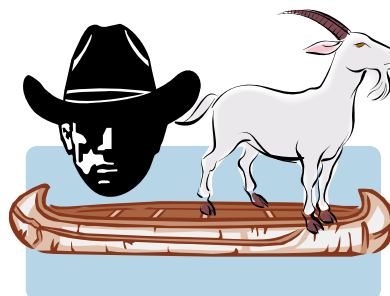
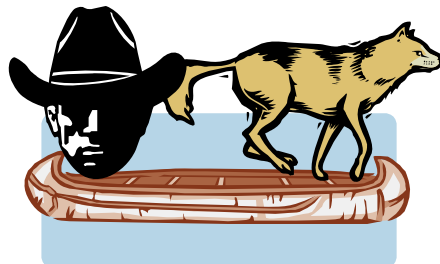
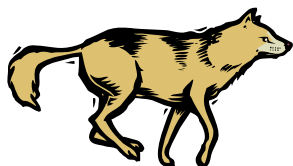


キャベツ

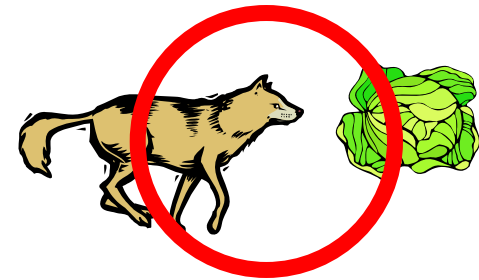
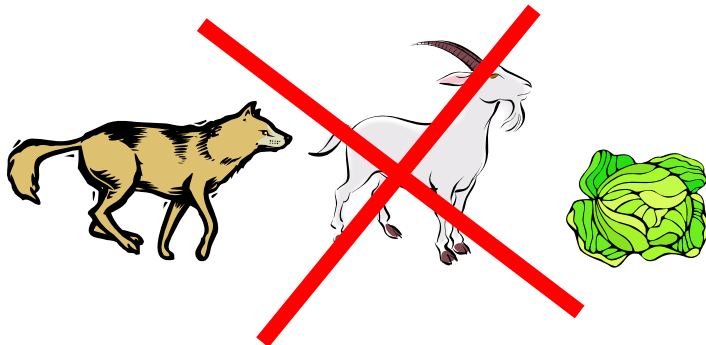
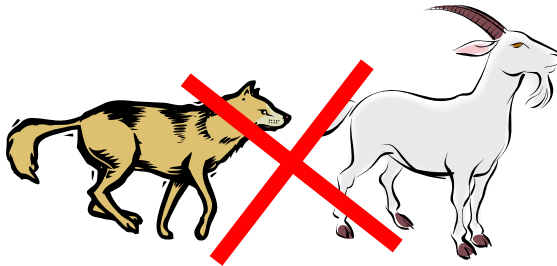
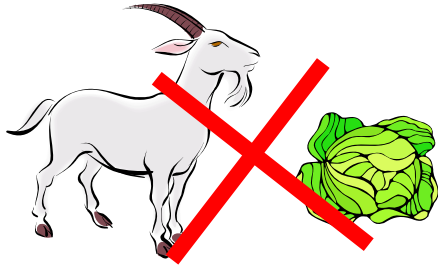


川

船に乗る組合せ



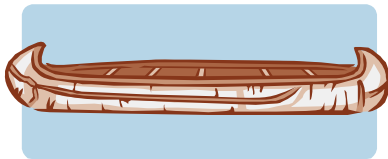
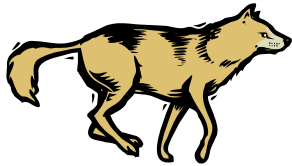
男がそばにいないと食べ(食べられ)てしまう組合せと安全な組合せ



男がいなくても安全な組合せ



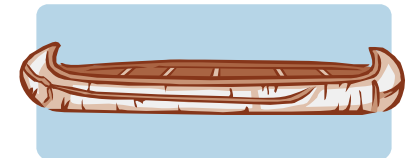
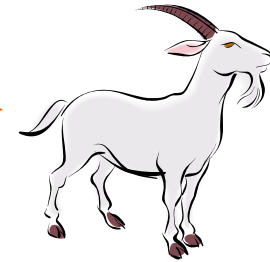
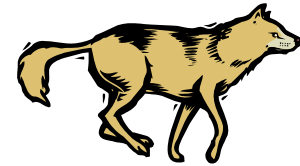
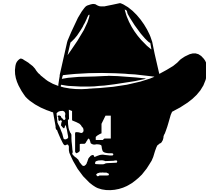
左岸から右岸に渡りたい



2009/4/18

UEC Tokyo

つまり、この状態にしたい



問題 1/2

- 川の左岸から右岸へ、男が、自分自身以外に1つの荷物しか乗せられない船で、狼、山羊、キャベツを安全に運ぶには、どうしたらよいかを考えよう。
- ただし、男と一緒にいないと、狼は山羊を食べてしまうし、山羊はキャベツを食べてしまう。
- また、船が移動するときは、必ず、男が乗って運転する必要がある。

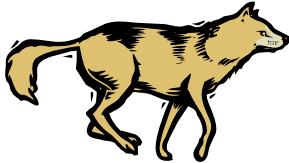
問題 2/2

- 問1. どのような順番で運べばよいか、具体的な手順(方法)を示せ。
- 問2. 少なくとも船を何回利用する必要があるかを示せ。すなわち、利用する最小回数を示せ。
- 問3. 最小回数で実行できる手順は何通りあるかを示せ。また、その手順のすべてを示せ。

それぞれを簡略しアルファベットで表す



M Man 男



W Wolf 狼



G Goat 山羊



C Cabbage キャベツ

組合せ(状態)の列挙

		左岸				右岸				
状態		W	G	C	M		W	G	C	M
	0	1	1	1	1					
	1	1	1	1						1
	2	1	1						1	1
	3	1	1		1				1	

“1” いる

“0” いない。“0”を省略。

各行には4個の1がたつ。

たとえば、

0: すべてが、左岸にいる状態。

状態 1: 男のみが、右岸にいる状態。

2: 男とキャベツのみが、右岸にいる状態。

3: キャベツのみが右岸にある状態。

組合せ(状態)の列挙

状態	左岸					右岸			
	W	G	C	M		W	G	C	M
0	1	1	1	1					
1	1	1	1						1
2	1	1		1				1	
3	1	1						1	1
4	1		1	1			1		
5	1		1				1		1
6	1			1			1	1	
7	1						1	1	1
8		1	1	1		1			
9		1	1			1			1
10		1		1		1		1	
11		1				1		1	1
12			1	1		1	1		
13			1			1	1		1
14				1		1	1	1	
15						1	1	1	1

安全性が確保される状態

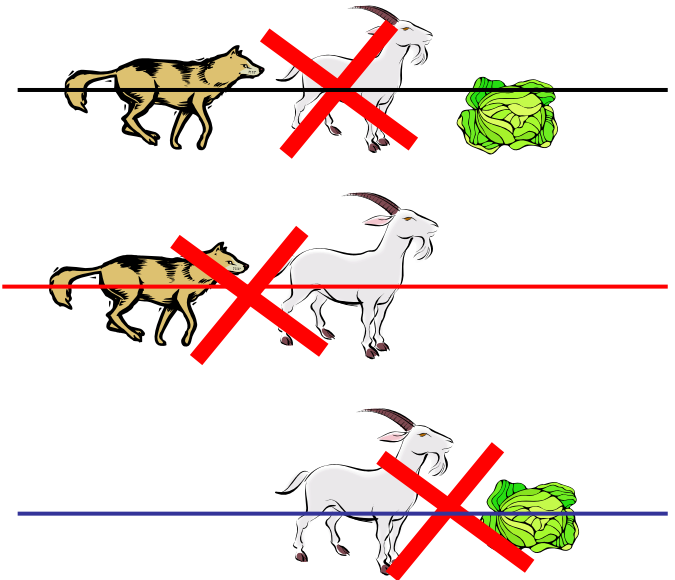
左岸

右岸

状態	W	G	C	M		W	G	C	M
0	1	1	1	1					
1	1	1	1						1
2	1	1		1				1	
3	1	1						1	1
4	1		1	1			1		
5	1		1				1		1
6	1			1			1	1	
7	1						1	1	1
8		1	1	1		1			
9		1	1			1			1
10		1		1		1		1	
11		1				1		1	1
12			1	1		1	1		
13			1			1	1		1
14				1		1	1	1	
15						1	1	1	1

安全でない組合せ

W	G	C	M
1	1	1	
1	1		
	1	1	

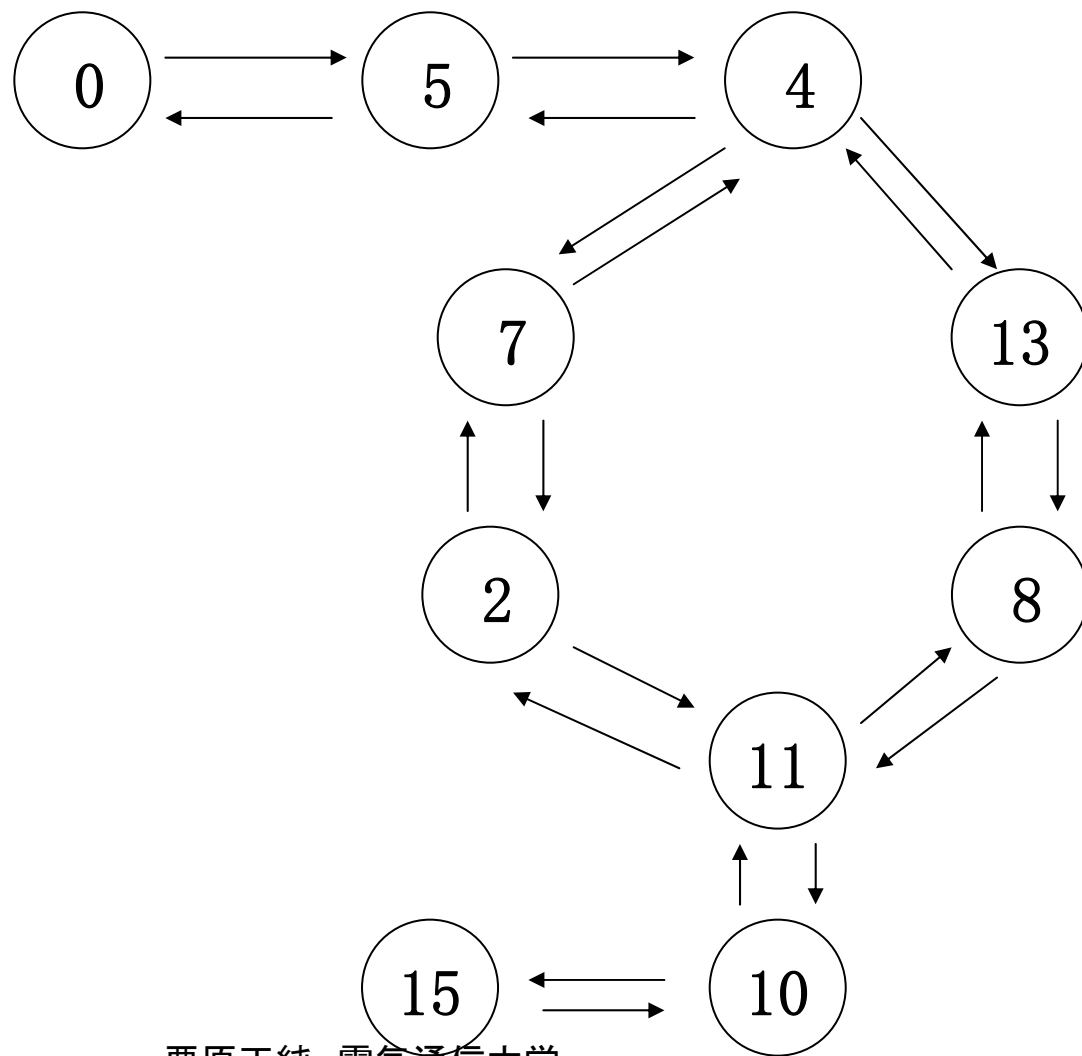


可能な状態遷移の表

状態	W	G	C	M		W	G	C	M	状態遷移
0	1	1	1	1						0 → 5
1	1	1	1						1	1 →
2	1	1		1				1		2 → 7,11
3	1	1						1	1	3 →
4	1		1	1			1			4 → 5,7,13
5	1		1				1		1	5 → 0,4
6	1			1			1	1		6 →
7	1						1	1	1	7 → 2,4
8		1	1	1		1				8 → 11,13
9		1	1			1			1	9 →
10		1		1		1		1		10 → 11,15
11		1				1		1	1	11 → 2,8,10
12			1	1		1	1			12 →
13			1			1	1		1	13 → 4,8
14				1		1	1	1		14 →
15						1	1	1	1	15 → 10

グラフ表現(状態遷移図)

状態遷移		
0	→	5
2	→	7,11
4	→	5,7,13
5	→	0,4
7	→	2,4
8	→	11,13
10	→	11,15
11	→	2,8,10
13	→	4,8
15	→	10



行列表現

状態遷移		
0	→	5
2	→	7,11
4	→	5,7,13
5	→	0,4
7	→	2,4
8	→	11,13
10	→	11,15
11	→	2,8,10
13	→	4,8
15	→	10

$R =$

	0	2	4	5	7	8	10	11	13	15
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
11	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
13	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

行列 R^k の一行目

$$R^1 = \begin{matrix} & 0 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 10 & 11 & 13 & 15 \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$R^2 = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$R^3 = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$R^4 = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$R^5 = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & 0 & 0 & 2 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$R^6 = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 6 & 7 & 16 & 1 & 3 & 7 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$R^7 = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 3 & 12 & 24 & 23 & 1 & 0 & 16 & 23 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

行列 R のベキ乗計算の結果より

- ・状態0から状態15へのパスの本数を表す成分に、行列 R の7乗 R^7 のときに初めて非ゼロ成分の2が出現した。
- ・したがって、状態0から状態15への最短のパスの長さは7であり、その本数は2本であることが分かる。

結論

問1の解答は、状態遷移図を表すグラフ表現の結果から得られる。

また、問題2, 3の解答も、グラフ表現の結果から最小回数は7回であり、その手順は2通りある。手順は、問題1の解答と同様に、グラフ表現の状態遷移図から得られる。

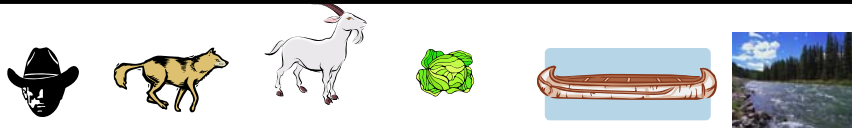
行列表現およびそのベキ乗の結果からは、最小回数および最小回数を実現する手順が何通りあるかを計算で得られるという特徴があることが分かる。

具体的な手順を説明するには、グラフ表現を利用した方が分かりやすい。

1(状態)

手順(その1)

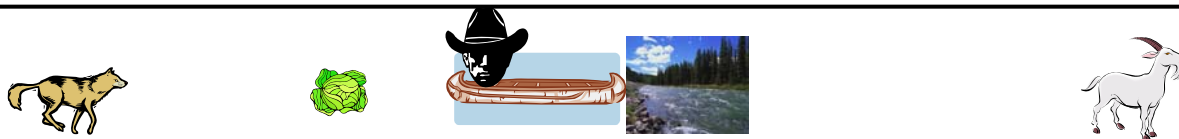
1(0)



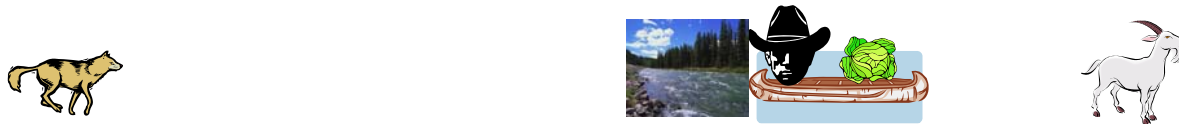
2(5)



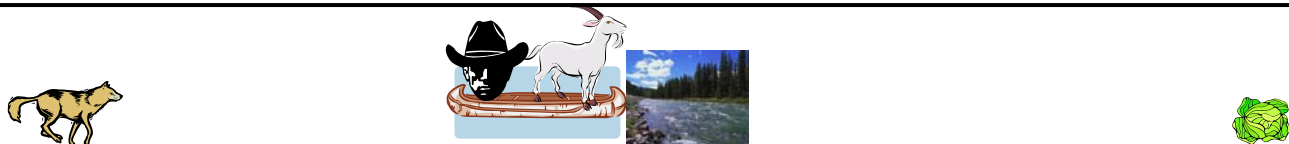
3(4)



4(7)



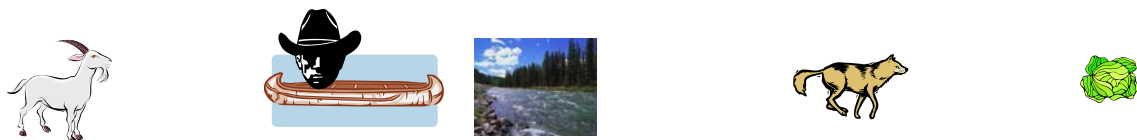
5(2)



6(11)



7(10)



8(15)

