

情報通信工学実験 $A \cdot B$

1. 情報通信 (情報・セキュリティ)

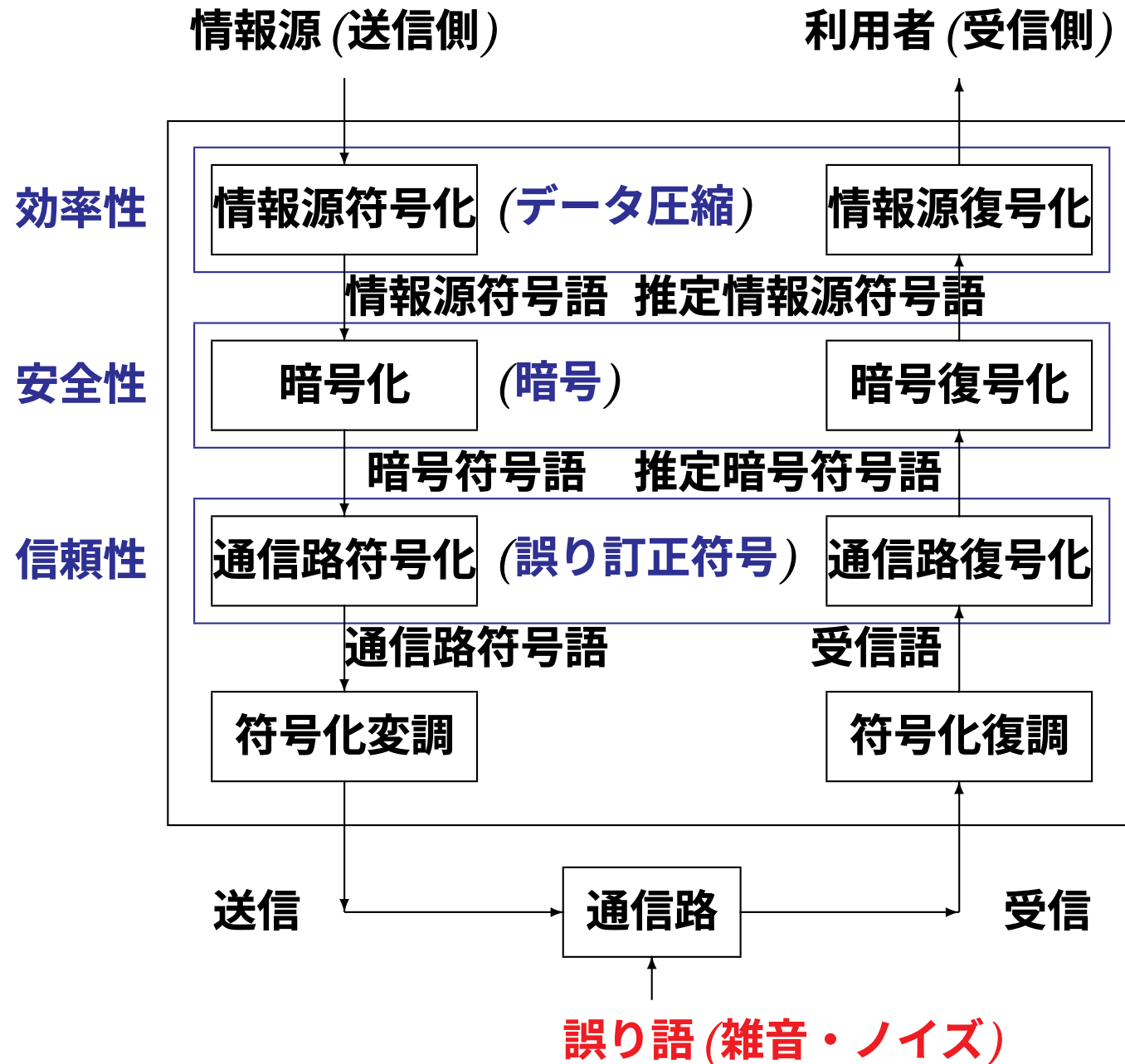
栗原正純 kuri@ice.uec.ac.jp
電気通信大学情報通信工学科
〒182-8585 東京都調布市調布ヶ丘1-5-1
www.lit.ice.uec.ac.jp/kuri/C3/indexexplain.html

情報通信工学実験 A・B
実験項目 1. 情報通信 — 情報・セキュリティ —

1. 「データ圧縮の理解と実装」
— ハフマン符号の理解と実装 (プログラミング) —
2. 「暗号化の理解と実装」
— *RSA* 暗号の理解と実装 (プログラミング) —
3. 「誤り訂正符号の理解と実装」
— リード・ソロモン符号と最小距離復号の
理解と実装 (プログラミング) —

キーワード：『符号化』

デジタル通信システム



「暗号化の理解と実装」 — *RSA* 暗号の理解と実装 (プログラミング) —

目的

提出レポートの内容

1. はじめに
2. 暗号化
 - 2.1 暗号の具体例 (シフト暗号)
 - 2.2 暗号化システムの形式的記述
 - 2.3 二つの暗号システム $\Rightarrow$ 公開鍵暗号 と 秘密鍵暗号
3. 数学的準備 (整数の諸性質)
4. *RSA* 暗号 $\leftarrow$ (公開鍵暗号)
5. 課題
6. プログラミング

目的（課題）

1. 暗号の一つである *RSA* 暗号の具体的な暗号化と復号化の方法について理解する。
2. 次に、*RSA* 暗号の暗号化と復号化のプログラムを作成し、計算機上で実装する。
具体的には、5 節の課題を解く。

提出レポートの内容

1. 「*RSA* 暗号」をキーワードにして「暗号」と「認証」について調べたことを1ページ以内（A4サイズ）に簡潔にまとめ、記述する。
2. プログラミングで工夫した点を記述する。
3. 印刷したプログラムのソースをレポートに添付する。
4. 参考文献 を明記する。
自分のアイデアと他人のアイデアを明確に区別すること。
5. 紙のレポートとは別に、
ソースプログラムをメールにて担当教員宛に送る。
kuri@ice.uec.ac.jp
その際、そのファイルのコンパイル方法、実行方法を明記する。
 1. *Subject: 3jikken(name)*
 2. 「氏名」と「学籍番号」を書くこと。

1. はじめに

本テキストの目的：

本実験課題で扱う ***RSA* 暗号**とよばれる暗号化アルゴリズムの説明、および、その実装のための諸注意などを説明することにある。

R.L.Rivest, A. Shamir and L. Adleman,

“A Method for Obtaining Digital Signatures and Public-Key Cryptosystems,”

Communications of the ACM, 21(1978), pp.120–126, 1978.

一般的な暗号については、

暗号に関連する講義や暗号の専門書に譲る。

2. 暗号化

2.1 暗号の具体例（シフト暗号）

Aさん から **Bさん** へ伝えたい**メッセージ**を **第三者のCさん** に見られても分からないように、メッセージを**暗号化**することを考える。

定義 1. [シフト暗号] **メッセージ** および メッセージを暗号化した **暗号文** はいずれも 26文字からなるアルファベット, $A, B, \dots, Z$ により構成されているものとする。アルファベットの各文字を辞書式順序に並べる。

$A \ B \ C \ D \ E \ F \ G \ H \ I \ J \ K \ L \ M \ N \ O \ P \ Q \ R \ S \ T \ U \ V \ W \ X \ Y \ Z$

1. 暗号化: メッセージ $\rightarrow$ 暗号文

各文字を順序に従ってを 右へ k だけ循環シフト させる変換

2. 復元 (復号化): 暗号文 $\rightarrow$ もとのメッセージ

各文字を順序に従ってを 左へ k だけ循環シフト させる変換

暗号化： $k = 5$ とする。

右へ 5 だけシフト

“ *I* ” $\rightarrow$... *H I J K L M N O P* ... $\rightarrow$ “ *N* ”

右へ 5 だけ循環(巡回)シフト

“ *W* ” $\rightarrow$... *V W X Y Z A B C D* ... $\rightarrow$ “ *B* ”

暗号システムの概念図

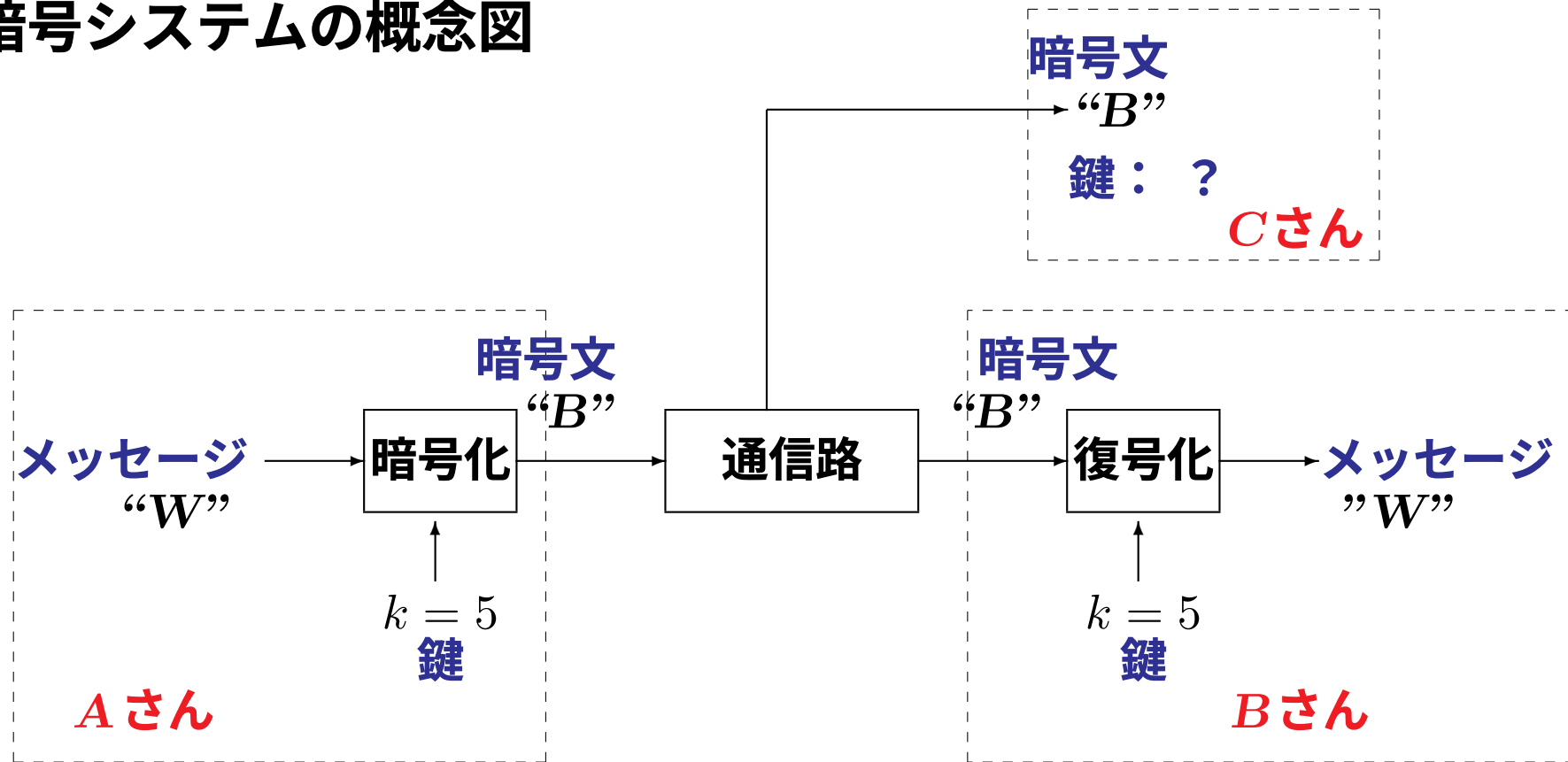


Figure 1: シフト暗号を用いたデータ伝送の様子

Aさん から **Bさん** へ暗号文を送信する前に、**鍵情報 k** を **共有**しておく必要がある。

しかも、この情報は第三者の **Cさん** には知られていないものとする。

例 2. 例えば、 $k = 5$ として、A さんが B さんに伝えたいメッセージ

WEWILLMEETATCHOFUSTATION

を暗号化するとその暗号文は、

BJBNQQRJYFYHMTKZXIFYNTS

となる。これを B さんに送信すればよい。

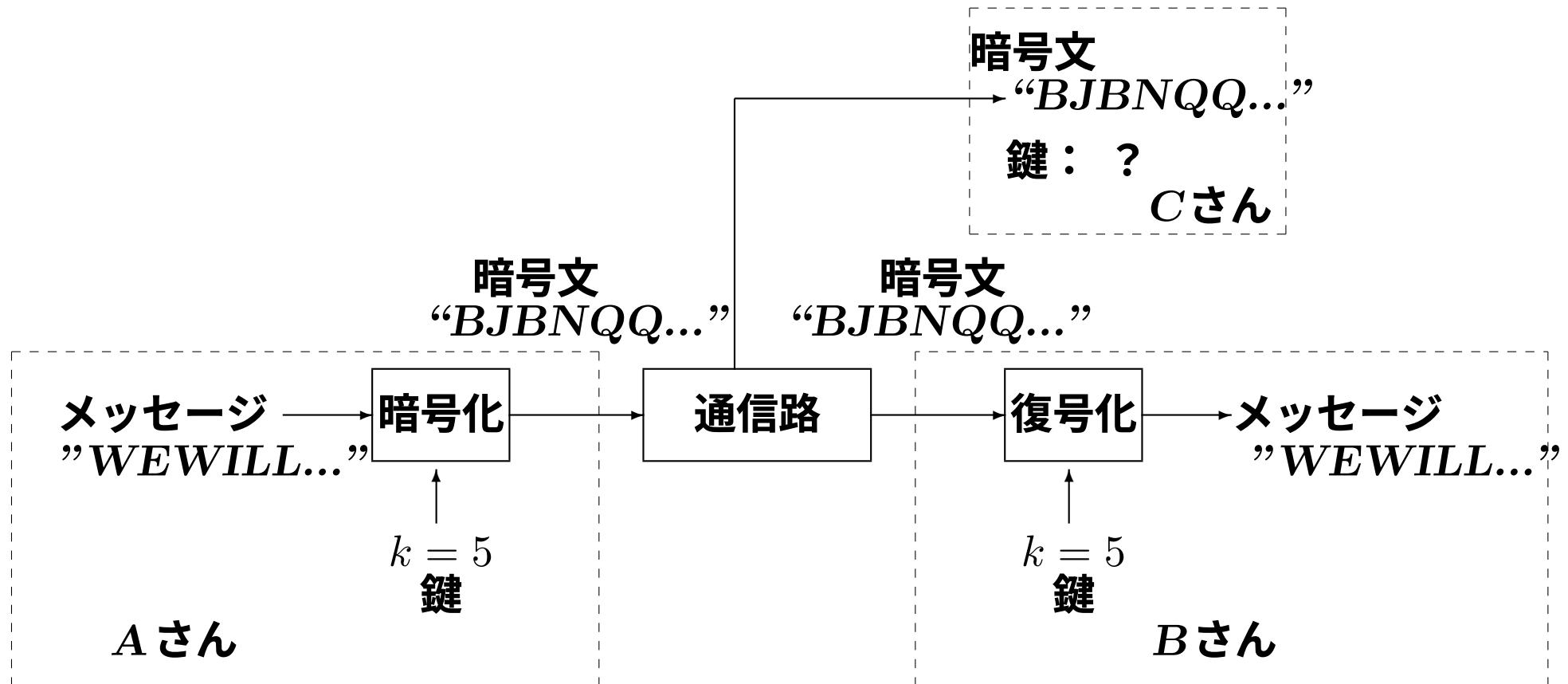


Figure 2: シフト暗号を用いたデータ伝送の様子

暗号システムの形式的記述

暗号の目的：

1. **Aさん** と **Bさん** の二人の間で、盗聴可能な通信路 (公開通信路) を利用して、情報を通信することができる こと。
2. ただし、**第三者の Cさん** には、その情報の内容が分からない方法で、通信できなければならない。

1. 平文 (ひらぶん) M : 伝達したいメッセージや情報
2. 暗号化用の鍵 K_e
3. 暗号文 C : 平文 M を暗号化用の鍵 K_e で暗号化したもの
4. 公開通信路 : 盗聴可能な通信路
5. 復号化用の鍵 K_d

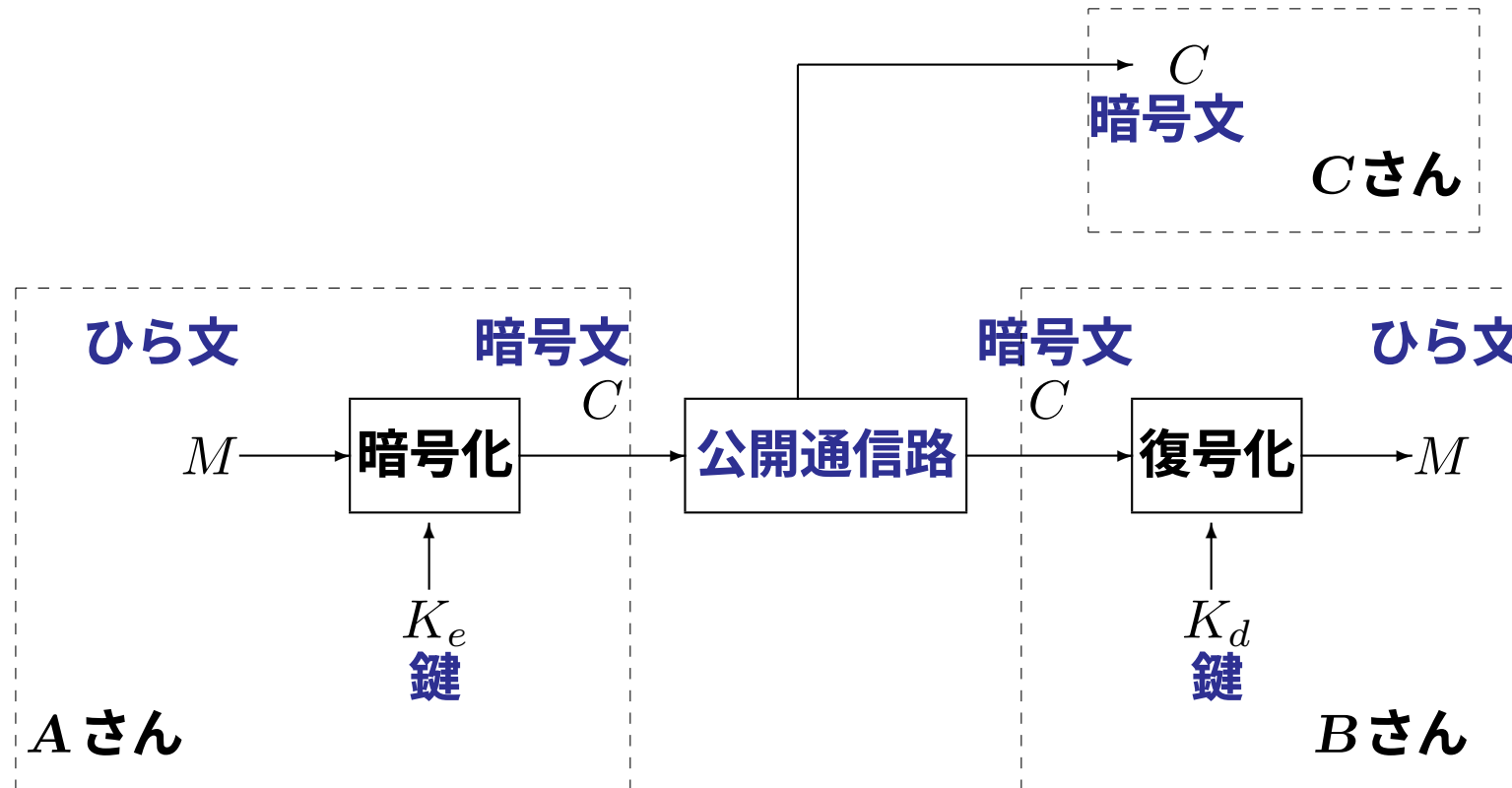


Figure 3: 形式的記述に対応する暗号システムの概略図

定義 3. 暗号システムは次の 6 項目を満たす 5 つの要素 $(\mathcal{M}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ から構成されるものとする (定義しよう)。

1. $\mathcal{M}$: **平文**の全体からなる有限集合

2. $\mathcal{C}$: **暗号文**の全体からなる有限集合

3. $\mathcal{K}$: **暗号化鍵**の全体からなる有限集合

4. $\mathcal{E}$: 各鍵 $K \in \mathcal{K}$ に対し定まる**暗号化の規則**の全体からなる集合
鍵 K による規則 $e_K \in \mathcal{E}$ は $\mathcal{M}$ から $\mathcal{C}$ への写像と考える。

$$\boxed{M \in \mathcal{M} \text{ に対し、} e_K(M) = C \in \mathcal{C}} \quad \mathcal{M} \xrightarrow{e_K} \mathcal{C}$$

5. $\mathcal{D}$: 各鍵 $K \in \mathcal{K}$ に対し定まる**復号化の規則**の全体からなる集合
鍵 K による規則 $d_K \in \mathcal{D}$ は $\mathcal{C}$ から $\mathcal{M}$ への写像と考える。

$$\boxed{C \in \mathcal{C} \text{ に対し、} d_K(C) = M' \in \mathcal{M}} \quad \mathcal{C} \xrightarrow{d_K} \mathcal{M}$$

6. 任意の暗号化鍵 $K \in \mathcal{K}$ と平文 $M \in \mathcal{M}$ に対し、以下を満たす。

$$\boxed{d_K(e_K(M)) = M} \quad \mathcal{M} \xrightarrow{e_K} \mathcal{C} \xrightarrow{d_K} \mathcal{M}$$

シフト暗号の形式的記述

1. シフト処理 $\Rightarrow$ 算術演算 : アルファベットの文字を数字に対応させる.

$$\{A, B, \dots, Z\} \Leftrightarrow \mathbf{Z}_{26} := \{65, 66, \dots, 90\}$$

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>	<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
<i>N</i>	<i>O</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>R</i>	<i>S</i>	<i>T</i>	<i>U</i>	<i>V</i>	<i>W</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

2. 算術演算:

足し算 $\oplus$ と引き算 $\ominus$ の定義 : 任意の $a, b \in \mathbf{Z}_{26}$ に対し、

$$a \oplus b = c \quad \text{such that} \quad a + b \equiv c \pmod{26} \text{ and } 65 \leq c \leq 90$$

$$a \ominus b = c \quad \text{such that} \quad a - b \equiv c \pmod{26} \text{ and } 65 \leq c \leq 90$$

常に $a \oplus b \in \mathbf{Z}_{26}$ と $a \ominus b \in \mathbf{Z}_{26}$ が成り立つ。

ASCII

下位\上位	0	1	2	3	4	5	6	7
0	NUL	DLE	SP	0	@	P	'	p
1	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
2	STX	DC2	”	2	B	R	b	r
3	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
4	EOT	DC4	\$	4	D	T	d	t
5	ENQ	NAC	%	5	E	U	e	u
6	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
7	BEL	ETB	,	7	G	W	g	w
8	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
9	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
A	LF/NL	SUB	*	:	J	Z	j	z
B	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
C	FF	FS	,	<	L	\	l	
D	CR	GS	-	=	M	]	m	}
E	SO	RS	.	>	N	^	n	~
F	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

大文字 “ A ” の 2進数表現、10進数表現

ASCII の表より、

上位 : 4 $\Leftrightarrow$ 0100

下位 : 1 $\Leftrightarrow$ 0001

これより、

A $\Leftrightarrow$ 01000001 $\Leftrightarrow$ 65

なぜなら、

$$01000001 \Leftrightarrow 2^6 + 2^0 = 64 + 1 = 65$$

1. $(a, b) = (70, 76)$ **の場合** : $70 \oplus 76 = 68$

$$70 + 76 = 146 \equiv 120 \equiv 94 \equiv 68 \pmod{26}$$

$$(65 \leq 68 \leq 90)$$

2. $(a, b) = (78, 89)$ **の場合** : $78 \oplus 89 = 89$

3. $(a, b) = (70, 76)$ **の場合** : $70 \ominus 76 = 72$

$$70 - 76 = -6 \equiv 20 \equiv 46 \equiv 72 \pmod{26}$$

$$(65 \leq 72 \leq 90)$$

4. $(a, b) = (89, 78)$ **の場合** : $89 \ominus 78 = 89$

以上より、シフト暗号を形式的に記述する: $(\mathcal{M}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$

1. $\mathcal{M} = \mathbf{Z}_{26} = \{65, 66, \dots, 90\}.$

2. $\mathcal{C} = \mathbf{Z}_{26} = \{65, 66, \dots, 90\}.$

3. $\mathcal{K} = \mathbf{Z}_{26} = \{65, 66, \dots, 90\}.$

4. $\mathcal{E}: \quad e_K(M) := M \oplus K \quad \text{for } K \in \mathcal{K}, M \in \mathcal{M}.$

5. $\mathcal{D}: \quad d_K(C) := C \ominus K \quad \text{for } K \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{C}.$

6. $d_K(e_K(M)) = d_K(M \oplus K) = (M \oplus K) \ominus K = M \oplus (K \ominus K) = M$

シフト数 k に対応する暗号化鍵 $K \in \mathbf{Z}_{26}$ は、

$k \equiv K \pmod{26}$ を満たすもの

$k = 5$ の場合、 $5 \equiv 83 \pmod{26}$ より、 $K = 83 \in \mathbf{Z}_{26}$

例 4. (続き) メッセージ

WEWILLMEETATCHOFUSTATION

を数字に対応させて変換すると

87 69 87 73 76 76 77 69 69 84 65 84 67 72 79 70 85 83 84 65 84 73 79 78

となる。シフト数 $k = 5$ の場合、鍵は $K = 83$ となり、その暗号文は、

66 74 66 78 81 81 82 74 74 89 70 89 72 77 84 75 90 88 89 70 89 78 84 83

となる。

ここで、各文字を数字で表現した場合に「区切り文字」として、空白を挿入していることに注意する。

876987737676776969846584677279708583846584737978

667466788181827474897089727784759088897089788483

2.3 二つの暗号システム

暗号システムを

秘密鍵暗号システム

と

公開鍵暗号システム

の二つに分類する。

2.3.1 秘密鍵暗号システム

1. 暗号化鍵 K から 復号化の規則 d_K を導出する困難さが
暗号化の規則 e_K を導出するのと同程度
2. 暗号化鍵 K を第三者には秘密にする

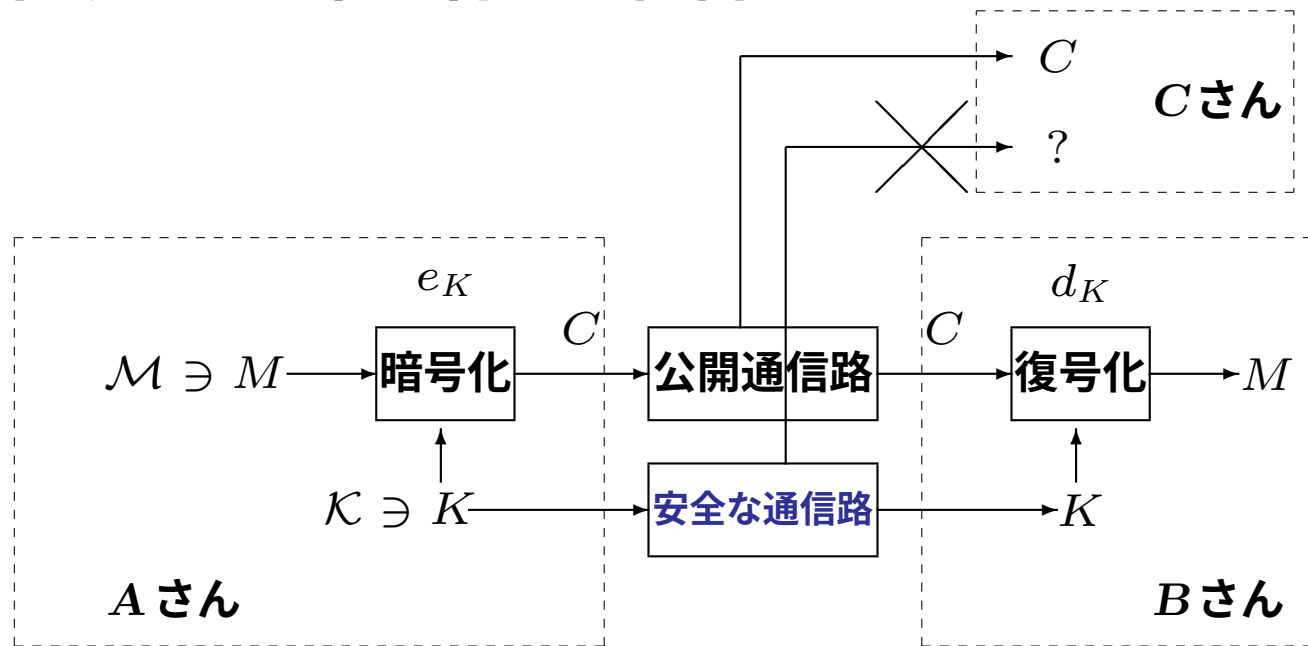


Figure 4: 秘密鍵暗号システム

秘密鍵暗号システムの問題点

第三者には知られないように暗号化鍵 K を共有する必要がある
⇒ 安全な通信路を利用して送信する必要がある

2.3.2 公開鍵暗号システム

1. 暗号化鍵 K から 復号化の規則 d_K を導出する困難さが 暗号化の規則 e_K を導出するのと比較して計算量的に実行不可能である
2. 暗号化鍵 K を第三者にも公開することができる
3. ゆえに、安全な通信路を利用して通信する必要がない
4. 公開された暗号化鍵 K とは異なる秘密鍵 K_d により暗号文を復号化することができる
5. **RSA 暗号**は、この公開鍵暗号システム的一种である

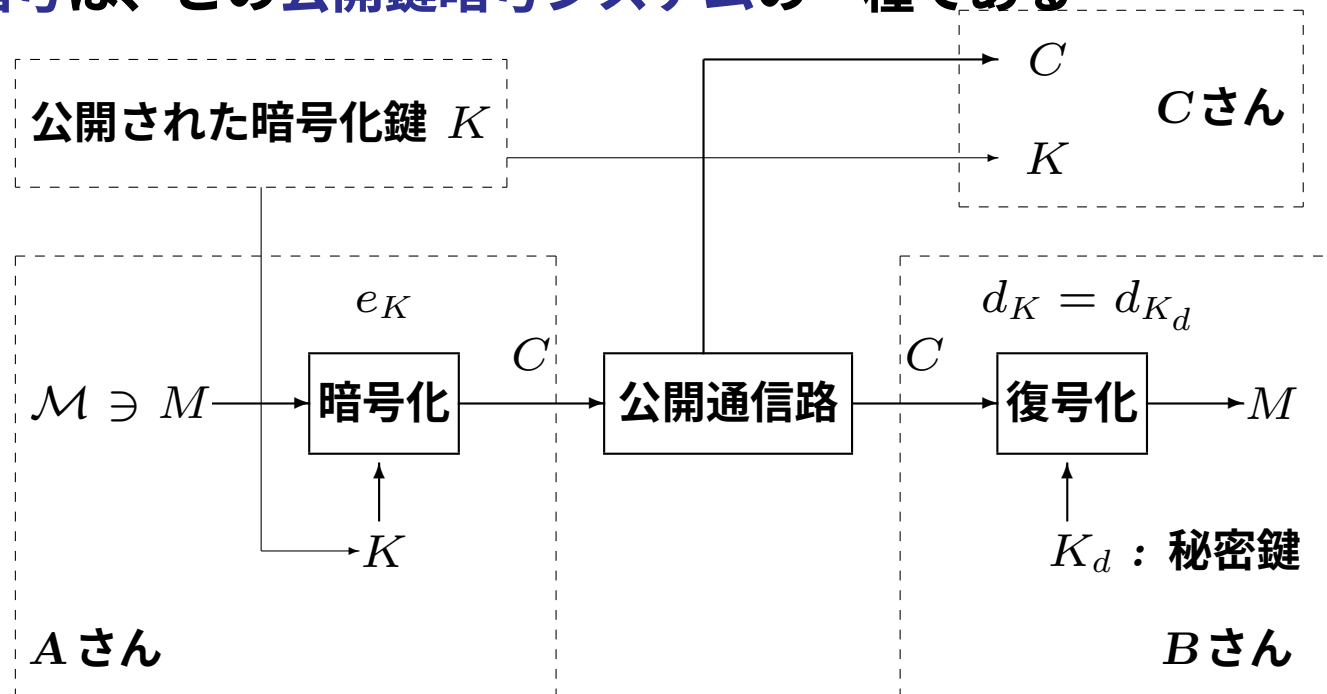
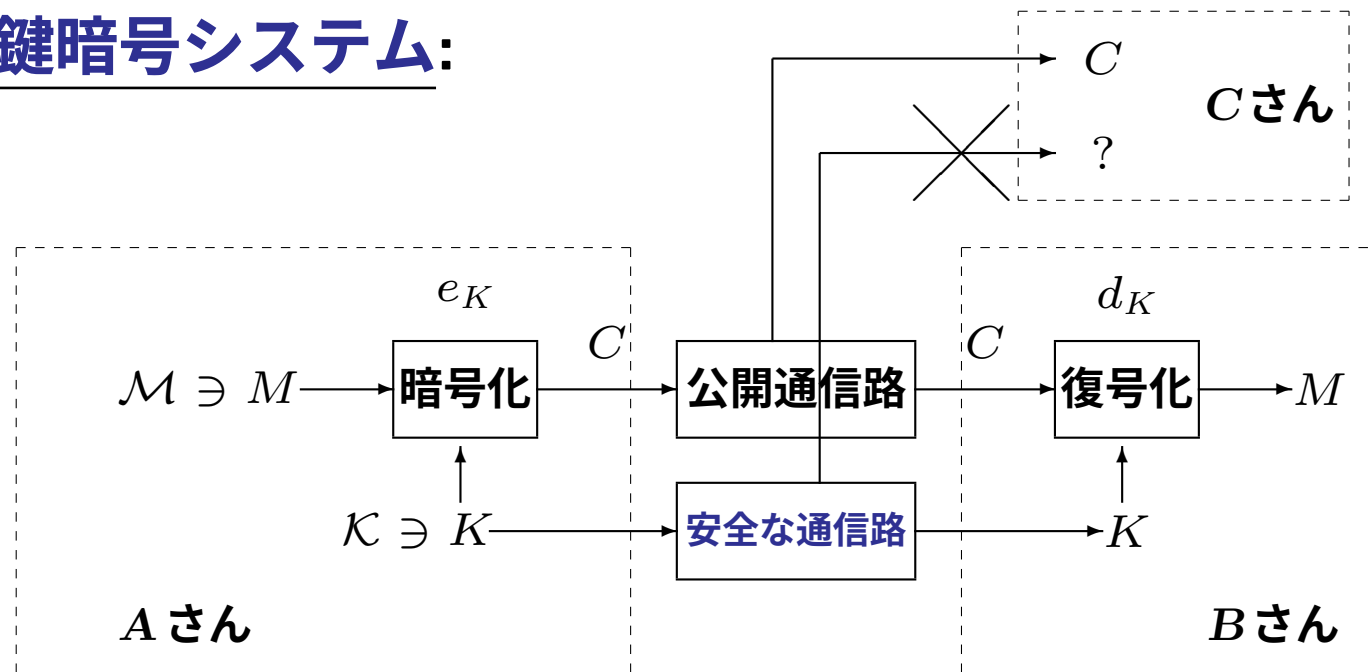
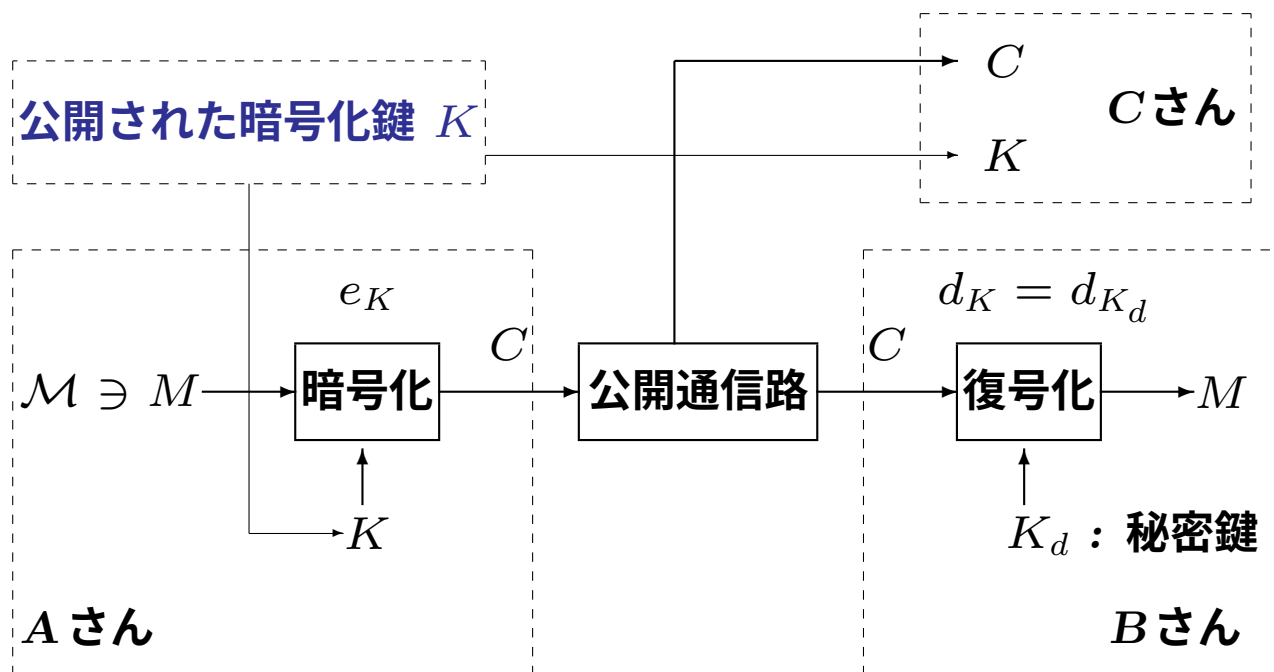


Figure 5: 公開鍵暗号システム

秘密鍵暗号システム:



公開鍵暗号システム:



整理：

1. **秘密鍵暗号システム**：「暗号化鍵 K_e 」 = 「復号化鍵 K_d 」
⇒ 鍵 $K_e = K_d$ を第三者に分からないように通信し、共有する必要がある
2. **公開鍵暗号システム**：「暗号化鍵 K_e 」 $\neq$ 「復号化鍵 K_d 」
⇒ 暗号化鍵を共有する必要はない

公開鍵暗号システムの手続き

- i. 暗号文を受け取る側の Bさんは、Bさん専用の 暗号化鍵 と 復号化鍵 を作成し、暗号化鍵は 一般に公開し、復号化鍵は 秘密 にしておく。
- ii. Aさんは、Bさんに伝えたい 平文 を公開されている 暗号化鍵 を用いて 暗号文 を作成し、公開通信路を利用して Bさんに送信すればよい
- iii. Bさんさんは、自分しか知らない 復号化鍵 を用いて 暗号文 を復号し、平文 を得る
- iv. 第三者の Cさんは、公開されている 暗号化鍵 と公開通信路を利用して 暗号文 を入手できるが、その二つだけでは暗号文を元の平文に容易には復号できない

4. RSA 暗号

はじめに、いくつかの整数を選択したり、計算したりする。

1. 任意の互いに異なる素数 p と q を選び、その積 $p \times q$ を計算する。

$$n := p \times q$$

2. $(p - 1)$ と $(q - 1)$ の最小公倍数 (*least common multiple*) L を計算し、 L と互いに素で L より小さな任意の整数 e を選ぶ。

$$L := \text{lcm}(p - 1, q - 1)$$

$$e \text{ such that } \gcd(e, L) = 1 \quad \text{and} \quad 1 < e < L$$

3. 次式を満たす整数 d_e を計算する。 (拡張 *Euclid* 法を利用する)

$$d_e \text{ such that } e \times d_e \equiv 1 \pmod{L}$$

1. **Select** (p, q)
2. $n := p \times q$
3. $L := \text{lcm}(p - 1, q - 1)$
4. e **such that** $\text{gcd}(e, L) = 1$ **and** $1 < e < L$
5. d_e **such that** $e \times d_e \equiv 1 \pmod{L}$

たとえば、

1. $(p, q) = (17, 19)$
2. $n = p \times q = 17 \times 19 = 323$
3. $L = \text{lcm}(17 - 1, 19 - 1) = \text{lcm}(16, 18) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 144$
4. $e = 5$ **such that** $\text{gcd}(e, 144) = 1$ **and** $1 < e < 144$
 $e \in \{5, 7, 11, 13, \dots, 143\}$
5. $d_e = 29$ **such that** $5 \times d_e \equiv 1 \pmod{144}$

このとき、**RSA暗号の形式的な記述** $(\mathcal{M}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ は以下のようになる:

1. $\mathcal{M} = \mathbf{Z}_n$

2. $\mathcal{C} = \mathbf{Z}_n$

3. $\mathcal{K} = \{(e, n) \mid \gcd(e, L) = 1 \text{ and } 1 < e < L\}$

4. $\mathcal{E} : e_K(M) := M^e \pmod{n} \text{ for } K = (e, n) \in \mathcal{K}, M \in \mathcal{M}$

5. $\mathcal{D} : d_K(C) := C^{d_e} \pmod{n} \text{ for } K = (d_e, n) \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{C}$

6. $d_K(C) = d_K(e_K(M)) = M$ **が成り立つ:**

$$C^{d_e} = (M^e)^{d_e} = M^{e \times d_e} \equiv M \pmod{n}$$

i. 任意の互いに異なる素数 p, q に対し、 $n := p \times q$ とする。

ii. $L := \text{lcm}(p-1, q-1)$.

iii, $d_e : e \times d_e \equiv 1 \pmod{L}$ を満たす整数。

iv. **公開:** 暗号化鍵 (e, n)

v. **秘密:** p, q, d_e ; d_e : 秘密鍵; (d_e, n) : 復号化鍵.

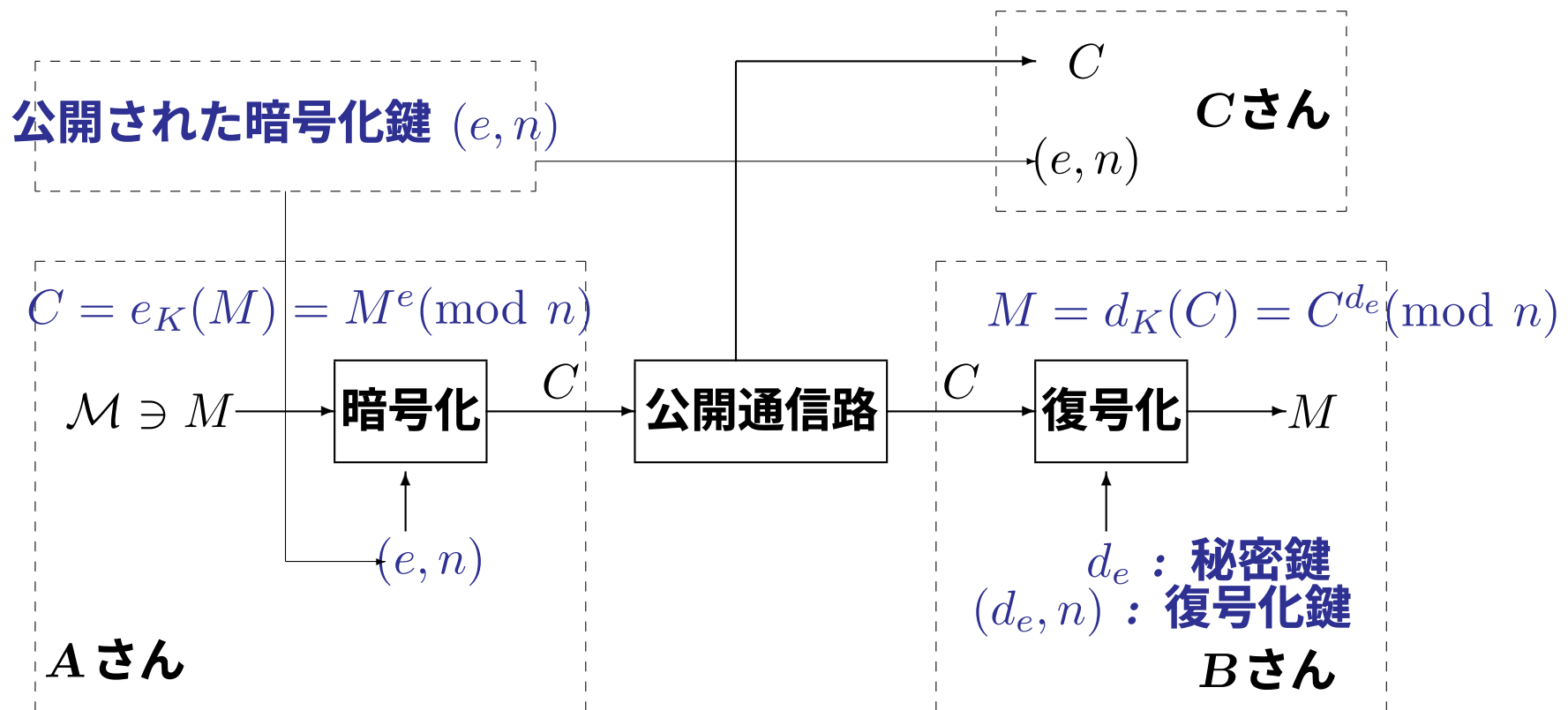


Figure 6: RSA 暗号を用いた公開鍵暗号システム

RSA 暗号の暗号化規則 e_K と 復号化規則 d_K の合成写像は、 $d_K(C) = d_K(e_K(M)) = M$ となる。つまり、

$$C^{d_e} = (M^e)^{d_e} = M^{e \times d_e} \equiv M \pmod n$$

RSA 暗号において、この関係の成立が保証されていることが大切

例 5. 26文字のアルファベットからなる平文を *RSA* 暗号で暗号化することを考える。

1. 二つの素数 p, q を、 $n = pq \geq 26$ を満たす $(p, q) = (17, 19)$ とする
 $\Rightarrow n = 323$

2. $(p - 1)$ と $(q - 1)$ の最小公倍数 $\Rightarrow L = 144$

3. $1 < e < 144 = L$ を満たし、 L と互いに素な整数 $e \Rightarrow e = 5$

4. 秘密鍵 d_e を計算する $\Rightarrow d_e = 29$

公開鍵（暗号化鍵） : $K = (e, n) = (5, 323)$

秘密鍵 : $d_e = 29$

復号化鍵 : $(d_e, n) = (29, 323)$

文字 “ C ” $\Leftrightarrow$ 数字 “67” : これを 暗号化/復号化 してみよう。

ひら文 $M = 67$,

暗号化鍵 $K = (e, n) = (5, 323)$, 復号化鍵 $(d_e, n) = (29, 323)$.

暗号化 : $C = M^e = (67)^5 \equiv 288 \pmod{323} \Rightarrow e_K(67) = 288$

復号化 : $M' = C^{d_e} = (288)^{29} \equiv 67 \pmod{323} \Rightarrow d_K(288) = 67$

電卓でもできる、

$$1) (67)^2 = 67 \times 67 = 4489 \equiv 290 \pmod{323},$$

$$2) (67)^3 \equiv 290 \times 67 = 19430 \equiv 50 \pmod{323},$$

$$3) (67)^4 \equiv 50 \times 67 = 3350 \equiv 120 \pmod{323},$$

$$4) (67)^5 \equiv 120 \times 67 = 8040 \equiv 288 \pmod{323}.$$

各結果は、0 から $322 \times 322 = 103684$ の間の数字であることに注意

数式処理システム *Mathematica*(マセマティカ)による計算例

IED: hostname

ied1

IED: math

Mathematica 5.2 for Sun Solaris (UltraSPARC)

Copyright 1988-2005 Wolfram Research, Inc.

-- Terminal graphics initialized --

In[1]:= (67)^(5)

Out[1]= 1350125107

In[2]:= Mod[(67)^(5), 323]

Out[2]= 288

In[3]:= (288)^(29)

Out[3]= 210078759859150987224561197336654397674351288252695054617776181894709\

> 248

In[4]:= Mod[(288)^(29), 323]

Out[4]= 67

In[5]:= Quit

IED:

1. **暗号化**: 暗号化鍵 $(e, n) = (5, 323)$ を用いて**メッセージ** :

WEWILLMEETATCHOFUSTATION

を暗号化 : まず, 各文字を**数字に変換**:

87 69 87 73 76 76 77 69 69 84 65 84 67 72 79 70 85 83 84 65 84 73 79 78

暗号文:

83 103 83 99 247 247 229 103 103 50 12 50 288 21 129 185 187 87 50 12 50 99 129 10

2. **復号化**: 秘密鍵を含む復号化鍵 $(d_e, n) = (29, 323)$ を用いて暗号文 (各数字) を復号する.

注意 : 暗号文に区切り記号の空白がないと...

83103839924724722910310350125028821129185187875012509912910

5. 課題 *RSA* 暗号の理解と実装に関連する実験テーマとして以下の 5 個の課題を必修とする。

1. *RSA* 暗号の暗号化および復号化のプログラムを作成し、実装せよ。
具体的には、以下のような暗号化および復号化の仕様を満たすこと。

暗号化:

入力	: 暗号化鍵 (e, n) と ひら文のファイル.
出力	: 暗号化されたファイル.

復号化:

入力	: 復号化鍵 (d_e, n) と 暗号化されたファイル.
出力	: 元のひら文のファイル.

このとき、ひら文のファイルと暗号化されたファイルのサイズを比較せよ。

2. 1 から 10000 までの間に存在する 素数 をすべて求めるプログラムを作成し、実装せよ。
3. 異なる素数 p と q に対し、 $p-1$ と $q-1$ の最小公倍数 $L = \text{lcm}(p-1, q-1)$ を求めるプログラムを作成し、実装せよ。
4. 整数 L に対し、 $\text{gcd}(e, L) = 1$ かつ $1 < e < L$ を満たす正整数 e を求めるプログラムを作成し、実装せよ。
5. 整数 L と e に対し、 $ed \equiv 1 \pmod{L}$ を満たす正整数 d を求めるプログラムを作成し、実装せよ。

6. プログラミング

6.1 プログラミングの準備

6.2 参考プログラム

<http://www.lit.ice.uec.ac.jp/kuri/C3>

1. *RSA* 暗号の暗号化（符号化）と復号化プログラム (*rsa.c*)
2. ファイルをコピーするプログラム (*fcopy.c*)
3. ファイルデータの表示プログラム (*fdisp.c*)
4. 文字の変換プログラム (*fchg.c*)
5. 拡張 *Euclid* 法のプログラム (*euclid2.c*)
6. シフト暗号の暗号化・復号化プログラム (*shift.c*)

References

- [1] *Douglas R. Stinson*, 暗号理論の基礎, 櫻井幸一監訳、共立出版, 1996.
- [2] 池野信一, 小山謙二, 現代暗号理論 (電子情報通信学会)、コロナ社, 1986.
- [3] 松坂和夫、代数系入門 (第 28 刷発行)、岩波書店、2003.
- [4] 石田信、代数系入門 (第 12 刷発行)、実教出版、1990.
- [5] *R.L.Rivest, A. Shamir and L. Adleman*, “A Method for Obtaining Digital Signatures and Public-Key Cryptosystems,” *Communications of the ACM*, 21(1978), pp.120–126, 1978.
- [6] 棕田 (むくだ) 實, はじめての C (改訂第三版), 技術評論社, 1995(平成 7 年).
- [7] 平林雅英, ANSI C 言語辞典 (初版 第 10 刷発行), 技術評論社, 2000(平成 12 年).