

「誤り訂正符号」に関連した話題

栗原正純
UEC Tokyo
電気通信大学 情報通信工学科
2007/5/2(修正2007/10/05)

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

1

符号の構成

- 次の2ページを使い、GF(2)上のハミング符号を構成する。
- キーワードは、生成行列、検査行列、符号語。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

2

検査行列 H と 生成行列 G 2元(7, 4, 3)線型符号

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [P \ I]$$
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [I \ P^T]$$

$$H G^T = 0$$

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

3

符号語の構成

	8	4	2	1	A	B	C
1	0	0	0	1	0	1	1
2	0	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1	1	0
4	0	1	0	0	1	1	0
5	0	1	0	1	1	0	1
6	0	1	1	0	0	1	1
7	0	1	1	1	0	0	0
8	1	0	0	0	1	1	1
9	1	0	0	1	1	0	0
10	1	0	1	0	0	1	0
11	1	0	1	1	0	0	1
12	1	1	0	0	0	0	1
13	1	1	0	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1	0	0
15	1	1	1	1	1	1	1

(8 $\leftrightarrow$ 111) (4 $\leftrightarrow$ 110) (2 $\leftrightarrow$ 101) (1 $\leftrightarrow$ 011)
(A $\leftrightarrow$ 100) (B $\leftrightarrow$ 010) (C $\leftrightarrow$ 001)

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

4

2種類のクイズ

- 1つ目は、間違えなく(誤りなく)回答する場合のクイズです。
- 2つ目は、間違えた(誤りがある)回答を許す場合のクイズです。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

5

それでは、1つ目のクイズです。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

6

方法1の概略(正直な回答)

1. 1から15までの数字の中から1つ数字を選び、覚えて下さい。口には出さない。
2. 次に、いくつかの数字が書かれた4枚のカードをそれぞれ示します。それぞれのカードの中に、上記で覚えた数字があれば Yes、なければ No と答えて下さい。
3. 4回の Yes or No の回答より、あなたが選んだ数字を当てます。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

7

では、はじめます。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

8

以下に示す数字の中から、数字を1つ選んで、覚えて下さい。
その数字を口に出してはいけません。

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

9

- それでは、次に、いくつかの数字が書かれた4枚のカードを示します。
- それぞれのカードの中に、覚えた数字があれば、**Yes**と答え、なければ**No**と教えてください。
- ここでは、答える代わりに、各自の手元で、順番に **Yes or No** をメモしてください。
- ただし、**間違わずに、正しく**教えてください。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

10

111(7) (1枚目)

8	9	10	11
12	13	14	15

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

11

110(6) (2枚目)

4	5	6	7
12	13	14	15

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

12

101(5) (3枚目)

2	3	6	7
10	11	14	15

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

13

011(4) (4枚目)

1	3	5	7
9	11	13	15

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

14

以上です

- それでは、Yes or No の結果を元に、あなたの選んだ数字を推測してみます。
- そのための準備を次に示します。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

15

- **1枚目**のカードで**Yes**と答えた人には、**8点**をあげます。**No**と答えた人には、残念ですが、**0点**です。
- **2枚目**のカードで**Yes**と答えた人には、**4点**をあげます。**No**と答えた人には、残念ですが、**0点**です。
- **3枚目**のカードで**Yes**と答えた人には、**2点**をあげます。**No**と答えた人には、残念ですが、**0点**です。
- **4枚目**のカードで**Yes**と答えた人には、**1点**をあげます。**No**と答えた人には、残念ですが、**0点**です。
- それでは、あなたの**合計得点**は、いくつになりましたか。
- **その得点の数字が、覚えた数字になっています。**
- いかがですか？

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

16

では、2つ目のクイズをはじめます

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

17

その前に、1つ目と2つ目のクイズの違いについて

- 1つ目と2つ目のクイズの違いは、Yes or No の回答を「**正しく答える場合**」と「**間違っても構わない場合**」の違いになります。
- つまり、示されたカードの中に記憶した数字があるのに、Yesではなく、Noと間違って(誤って)回答しても構わないということです。
- 逆も同じく、カードの中に、記憶した数字がないのに、Noではなく、Yesと回答しても構わないです。
- ただし、間違い回答は1回までです。もちろん、間違えなしの0回でも構いません。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

18

方法2の概略(間違えのある回答)

1. 1から15までの数字の中から1つ数字を選び、覚えて下さい。口には出さない。
2. 次に、示す**7枚**のカードの中に、その数字があれば Yes、なければ No と答えて下さい。
3. **ただし、1回までだけ、Yes または No の回答を間違えてもいいです。**
つまり、1回までだけ ウソ の回答をしてよいです。
4. **それでも、その Yes or No の回答より、あなたが選んだ数字を当てます。**

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

19

以下に示す数字の中から、数字を1つ選んで、覚えて下さい。
その数字を口に出してはいけません。

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

20

- それでは、次に、いくつかの数字が書かれた7枚のカードを示します。
- それぞれのカードの中に、覚えた数字があれば、**Yes**と答え、なければ**No**と答えてください。
- ここでは、答える代わりに、各自の手元で、順番に **Yes** or **No** をメモしてください。
- ただし、1回まで**間違っ**て答えて構いませんが、後で各回答が正しいか間違えかの区別がつくように、その回答には記しを付けておいてください。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

21

111(7) (1枚目)

8	9	10	11
12	13	14	15

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

22

110(6) (2枚目)

4	5	6	7
12	13	14	15

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

23

101(5) (3枚目)

2	3	6	7
10	11	14	15

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

24

011(4) (4枚目)

1 3 5 7
9 11 13 15

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

25

100(3) (5枚目)

2 3 4 5
8 9 14 15

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

26

010(2) (6枚目)

1 3 4 6
8 10 13 15

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

27

001(1) (7枚目)

1 2 5 6
8 11 12 15

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

28

お疲れさま

- それでは、Yes or No の結果を元に、あなたの選んだ数字を推測してみます。
- そのための準備を次に示します。
- 今度は7回分の回答に対応する計算をしますので、気をつけて計算して下さい。
- ご協力お願いしますね。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

29

- 1枚目: Yesは111点、Noは0点。
- 2枚目: Yesは110点、Noは0点。
- 3枚目: Yesは101点、Noは0点。
- 4枚目: Yesは 11点、Noは0点。
- 5枚目: Yesは100点、Noは0点。
- 6枚目: Yesは 10点、Noは0点。
- 7枚目: Yesは 1点、Noは0点。
- それでは、あなたの合計得点は、いくつになりましたか。
- 得点の範囲は、0から444点です。
- さらに、あなたの得点に対し、次の計算をして下さい。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

30

- 各桁の数字に対し、偶数ならば0、奇数ならば1に置き換えて下さい。
- たとえば、233ならば011、321ならば101というように。
- 0と1だけで表されるその数字はどうなりましたか。
- そこで、推測します。その0と1の数字と同じ得点に対応するカードであなたは間違えて回答していませんか。

- 1枚目: 111点
- 2枚目: 110点
- 3枚目: 101点
- 4枚目: 11点
- 5枚目: 100点
- 6枚目: 10点
- 7枚目: 1点

- たとえば、011ならば11点に対応する4枚目のカードで間違えの回答をしていると考える。
- もし、その0と1の数字がすべて0ならば、あなたは間違えの回答をしていませんね。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

31

- 間違えの回答したことが判明した人は、回答のYes or Noを正しい回答に訂正して下さい。
- すなわち、Yes→No、No→Yesに訂正する。
- それでは、最後の作業です。
- 訂正した回答に対し、1つ目のクイズと同様に次の計算をして下さい。
- 1枚目: Yesは8点、Noは0点。
- 2枚目: Yesは4点、Noは0点。
- 3枚目: Yesは2点、Noは0点。
- 4枚目: Yesは1点、Noは0点。
- それでは、あなたの合計得点は、いくつになりましたか。
- その得点の数字が、覚えた数字になっています。
- いかがですか？

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

32

お疲れさまでした

- 以上のクイズの中に、誤り訂正符号という分野の理論が使われています。
- 詳しくは、符号理論関連の講義で学ぶことができますし、いくつかの書籍も出版されていますので、それらを参考にしてください。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

33

以下のページは、クイズの回答が正しいことを示す、概略の説明になります。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

34

正直な回答に対応する場合

YesまたはNoを1と0に対応させ、出したカード順に1と0を並べる。その2進列を10進に変換すればよい。

たとえば、数字の6を選ぶと、それぞれのカードに対する回答は次のようになる。

カード	111	110	101	011
回答	No	Yes	Yes	No
変換	0	1	1	0

0110を10進に変換すれば6である。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

35

間違え回答に対応する場合1/4 (NoをYesと間違えて回答する場合)

たとえば、数字の6を選ぶとする。

011のカードで間違え回答(No→Yes)する。

カード	111	110	101	011	100	010	001
回答	No	Yes	Yes	Yes	No	Yes	Yes
変換	0	1	1	1	0	1	1

1に対応するカード番号のベクトル和を計算する:

$(110)+(101)+(011)+(010)+(001)=(011)$

これより、011のカードでの回答に誤りがあることを発見。
正しい回答は、0110011となり、上位4ビットより、選んだ数字は6であることを推定する。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

36

間違え回答に対応する場合2/4 (YesをNoと間違えて回答した場合)

たとえば、数字の6を選ぶとする。

101のカードで間違え回答(Yes→No)する。

カード	111	110	101	011	100	010	001
回答	No	Yes	No	No	No	Yes	Yes
変換	0	1	0	0	0	1	1

1に対応するカード番号のベクトル和を計算する:

$(110)+(010)+(001)=(101)$

これより、101のカードでの回答に誤りがあることを発見。
正しい回答は、0110011となり、上位4ビットより、選んだ数字は6であることを推定する。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

37

間違え回答に対応する場合3/3 (NoをYesと間違えて回答した場合)

たとえば、数字の6を選ぶとする。

101のカードで間違え回答(Yes→No)する。

カード	111	110	101	011	100	010	001
回答	No	Yes	Yes	No	Yes	Yes	Yes
変換	0	1	1	0	1	1	1

1に対応するカード番号のベクトル和を計算する:

$(110)+(101)+(100)+(010)+(001)=(100)$

これより、100のカードでの回答に誤りがあることを発見。
正しい回答は、0110011となり、上位4ビットより、選んだ数字は6であることを推定する。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

38

間違え回答に対応する場合4/4 (間違えなく回答した場合)

たとえば、数字の6を選ぶとする。

カード	111	110	101	011	100	010	001
回答	No	Yes	Yes	No	No	Yes	Yes
変換	0	1	1	0	0	1	1

1に対応するカード番号のベクトル和を計算する:

$(110)+(101)+(010)+(001)=(000)$

これより、回答に誤りがないと判断。

回答は正しいので、0110011の上位4ビットより、選んだ数字は6であることを推定する。

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

39

回答回数と誤り訂正能力

- 回答の回数を4回から7回にすることで誤り(間違え回答、ウソ)を正しく訂正することができる。うれしい！(メリット)
- しかし、回答の回数が増えることで、カードの枚数や時間を多く必要とする。手間が掛かる！(デメリット)
- メリットとデメリットのバランスを考える。具体的には、何を要求されているのかに依存する。
- 7回より少ない回数で、1回以下の誤りを訂正できるか？
- 間違え回答の回数を2回まで増やした場合、7回の回答で正しく数字を当てることができるだろうか？
- 2回までの間違え回答に対応できるようにするには、どのようにすればよいのか？そもそも、そのようなことは可能だろうか？

2009/4/17

栗原正純 電気通信大学
UEC Tokyo

40

以上。