

「誤り訂正符号」に関連した話題

栗原正純

UEC Tokyo

電気通信大学 情報通信工学科

2007/5/2(修正2007/10/05)

符号の構成

- 次の2ページを使い、 $GF(2)$ 上のハミング符号を構成する。
- キーワードは、生成行列、検査行列、符号語。

検査行列 H と生成行列 G 2元(7, 4, 3)線型符号

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [P \ I]$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [I \ P^T]$$

$$H G^T = 0$$

符号語の構成

	8	4	2	1	A	B	C
1	0	0	0	1	0	1	1
2	0	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1	1	0
4	0	1	0	0	1	1	0
5	0	1	0	1	1	0	1
6	0	1	1	0	0	1	1
7	0	1	1	1	0	0	0
8	1	0	0	0	1	1	1

	8	4	2	1	A	B	C
9	1	0	0	1	1	0	0
10	1	0	1	0	0	1	0
11	1	0	1	1	0	0	1
12	1	1	0	0	0	0	1
13	1	1	0	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1	0	0
15	1	1	1	1	1	1	1

$(8 \Leftrightarrow 111)$ $(4 \Leftrightarrow 110)$ $(2 \Leftrightarrow 101)$ $(1 \Leftrightarrow 011)$
 $(A \Leftrightarrow 100)$ $(B \Leftrightarrow 010)$ $(C \Leftrightarrow 001)$

2種類のクイズ

- 1つ目は、間違えなく(誤りなく)回答する場合のクイズです。
- 2つ目は、間違えた(誤りがある)回答を許す場合のクイズです。

それでは、1つ目のクイズです。

方法1の概略(正直な回答)

1. **1から15までの**数字の中から1つ数字を選び、覚えて下さい。口には出さない。
2. 次に、いくつかの数字が書かれた4枚のカードをそれぞれ示します。それぞれのカードの中に、上記で覚えた数字があれば**Yes**、なければ**No**と答えて下さい。
3. 4回の**Yes or No**の回答より、あなたが選んだ数字を当てます。

では、はじめます。

以下に示す数字の中から、数字を1つ選んで、覚えて下さい。

その数字を口に出してはいけません。

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	

- それでは、次に、いくつかの数字が書かれた4枚のカードを示します。
- それぞれのカードの中に、覚えた数字があれば、**Yes**と答え、なければ**No**と教えてください。
- ここでは、答える代わりに、各自の手元で、順番に **Yes or No** をメモしてください。
- ただし、**間違わずに、正しく**教えてください。

111(7) (1枚目)

8 9 10 11

12 13 14 15

110(6) (2枚目)

4	5	6	7
12	13	14	15

101(5) (3枚目)

2	3	6	7
10	11	14	15

011(4) (4枚目)

1	3	5	7
9	11	13	15

以上です

- それでは、Yes or No の結果を元に、あなたの選んだ数字を推測してみます。
- そのための準備を次に示します。

- 1枚目のカードでYesと答えた人には、8点をあげます。Noと答えた人には、残念ですが、0点です。
- 2枚目のカードでYesと答えた人には、4点をあげます。Noと答えた人には、残念ですが、0点です。
- 3枚目のカードでYesと答えた人には、2点をあげます。Noと答えた人には、残念ですが、0点です。
- 4枚目のカードでYesと答えた人には、1点をあげます。Noと答えた人には、残念ですが、0点です。
- それでは、あなたの合計得点は、いくつになりましたか。
- その得点の数字が、覚えた数字なっています。
- いかがですか？

では、2つ目のクイズをはじめます

その前に、1つ目と2つ目のクイズのの違いについて

- 1つ目と2つ目のクイズの違いは、Yes or No の回答を「**正しく答える場合**」と「**間違っても構わない場合**」の違いになります。
- つまり、示されたカードの中に記憶した数字があるのに、Yesではなく、Noと間違っても(誤って)回答しても構わないということです。
- 逆も同じく、カードの中に、記憶した数字がないのに、Noではなく、Yesと回答しても構わないです。
- ただし、間違え回答は1回までです。もちろん、間違えなしの0回でも構いません。

方法2の概略(間違えのある回答)

1. 1から15までの数字の中から1つ数字を選び、覚えて下さい。口には出さない。
2. 次に、示す7枚のカードの中に、その数字があれば Yes、なければ No と答えて下さい。
3. ただし、1回までだけ、Yes または No の回答を間違えてもいいです。
つまり、1回までだけ ウソ の回答をしてよいです。
4. それでも、その Yes or No の回答より、あなたが選んだ数字を当てます。

以下に示す数字の中から、数字を1つ選んで、覚えて下さい。

その数字を口に出してはいけません。

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	

- それでは、次に、いくつかの数字が書かれた7枚のカードを示します。
- それぞれのカードの中に、覚えた数字があれば、**Yes**と答え、なければ**No**と教えてください。
- ここでは、答える代わりに、各自の手元で、順番に **Yes or No** をメモしてください。
- ただし、1回まで**間違っ**て答えて構いませんが、後で各回答が正しいか間違えかの区別がつくように、その回答には記しを付けておいてください。

111(7) (1枚目)

8

9

10

11

12

13

14

15

110(6) (2枚目)

4	5	6	7
12	13	14	15

101(5) (3枚目)

2	3	6	7
10	11	14	15

011(4) (4枚目)

1	3	5	7
9	11	13	15

100(3) (5枚目)

2	3	4	5
8	9	14	15

010(2) (6枚目)

1	3	4	6
8	10	13	15

001(1) (7枚目)

1	2	5	6
8	11	12	15

お疲れさま

- それでは、Yes or No の結果を元に、あなたの選んだ数字を推測してみます。
- そのための準備を次に示します。
- 今度は7回分の回答に対応する計算をしますので、気をつけて計算して下さい。
- ご協力お願いしますね。

- 1枚目: Yesは111点、Noは0点。
- 2枚目: Yesは110点、Noは0点。
- 3枚目: Yesは101点、Noは0点。
- 4枚目: Yesは 11点、Noは0点。
- 5枚目: Yesは100点、Noは0点。
- 6枚目: Yesは 10点、Noは0点。
- 7枚目: Yesは 1点、Noは0点。
- それでは、あなたの合計得点は、いくつになりましたか。
- 得点の範囲は、0から444点です。
- さらに、あなたの得点に対し、次の計算をして下さい。

- 各桁の数字に対し、偶数ならば0、奇数ならば1に置き換えて下さい。
- たとえば、233ならば011、321ならば101というように。
- 0と1だけで表されるその数字はどうなりましたか。
- そこで、**推測します**。その0と1の数字と同じ得点に対応するカードであなたは間違えて回答していませんか。

- 1枚目： 111点
- 2枚目： 110点
- 3枚目： 101点
- 4枚目： 11点
- 5枚目： 100点
- 6枚目： 10点
- 7枚目： 1点

- たとえば、011ならば11点に対応する4枚目のカードで間違えの回答をしていると考える。
- もし、その0と1の数字がすべて0ならば、あなたは間違えの回答をしていませんね。

- 間違えの回答したことが判明した人は、回答の Yes or Noを正しい回答に訂正して下さい。
- すなわち、Yes→No、No→Yesに訂正する。
- それでは、最後の作業です。
- 訂正した回答に対し、1つ目のクイズと同様に次の計算をして下さい。
- 1枚目：Yesは8点、Noは0点。
- 2枚目：Yesは4点、Noは0点。
- 3枚目：Yesは2点、Noは0点。
- 4枚目：Yesは1点、Noは0点。
- それでは、あなたの合計得点は、いくつになりましたか。
- その得点の数字が、覚えた数字なっています。
- いかがですか？

お疲れさまでした

- 以上のクイズの中に、誤り訂正符号という分野の理論が使われています。
- 詳しくは、符号理論関連の講義で学ぶことができますし、いくつかの書籍も出版されていますので、それらを参考にして下さい。

以下のページは、クイズの回答が正しいことを示す、概略の説明になります。

正直な回答に対応する場合

YesまたはNoを1と0に対応させ、出したカード順に1と0を並べる。その2進列を10進に変換すればよい。

たとえば、数字の6を選ぶと、それぞれのカードに対する回答は次のようになる。

カード	111	110	101	011
回答	No	Yes	Yes	No
変換	0	1	1	0

0110を10進に変換すれば6である。

間違え回答に対応する場合1/4 (NoをYesと間違えて回答する場合)

たとえば、数字の6を選ぶとする。

011のカードで間違え回答(No→Yes)する。

カード	111	110	101	011	100	010	001
回答	No	Yes	Yes	Yes	No	Yes	Yes
変換	0	1	1	1	0	1	1

1に対応するカード番号のベクトル和を計算する:

$$(110) + (101) + (011) + (010) + (001) = (011)$$

これより、011のカードでの回答に誤りがあることを発見。

正しい回答は、0110011となり、上位4ビットより、選んだ数字は6であることを推定する。

間違え回答に対応する場合2/4 (YesをNoと間違えて回答した場合)

たとえば、数字の6を選ぶとする。

101のカードで間違え回答(Yes→No)する。

カード	111	110	101	011	100	010	001
回答	No	Yes	No	No	No	Yes	Yes
変換	0	1	0	0	0	1	1

1に対応するカード番号のベクトル和を計算する:

$$(110) + (010) + (001) = (101)$$

これより、101のカードでの回答に誤りがあることを発見。
正しい回答は、0110011となり、上位4ビットより、選んだ数字は6であることを推定する。

間違い回答に対応する場合3/3 (NoをYesと間違えて回答した場合)

たとえば、数字の6を選ぶとする。

101のカードで間違い回答(Yes→No)する。

カード	111	110	101	011	100	010	001
回答	No	Yes	Yes	No	Yes	Yes	Yes
変換	0	1	1	0	1	1	1

1に対応するカード番号のベクトル和を計算する:

$$(110) + (101) + (100) + (010) + (001) = (100)$$

これより、100のカードでの回答に誤りがあることを発見。

正しい回答は、0110011となり、上位4ビットより、選んだ数字は6であることを推定する。

間違え回答に対応する場合4/4 (間違えなく回答した場合)

たとえば、数字の6を選ぶとする。

カード	111	110	101	011	100	010	001
回答	No	Yes	Yes	No	No	Yes	Yes
変換	0	1	1	0	0	1	1

1に対応するカード番号のベクトル和を計算する:

$$(110) + (101) + (010) + (001) = (000)$$

これより、回答に誤りがないと判断。

回答は正しいので、0110011の上位4ビットより、選んだ数字は6であることを推定する。

回答回数と誤り訂正能力

- 回答の回数を4回から7回にすることで誤り(間違え回答、ウソ)を正しく訂正することができる。うれしい！(メリット)
- しかし、回答の回数が増えることで、カードの枚数や時間を多く必要とする。手間が掛かる！(デメリット)
- メリットとデメリットのバランスを考える。具体的には、何を要求されているのかに依存する。
- 7回より少ない回数で、1回以下の誤りを訂正できるか？
- 間違え回答の回数を2回まで増やした場合、7回の回答で正しく数字を当てることができるだろうか？
- 2回までの間違え回答に対応できるようにするには、どのようにすればよいか？そもそも、そのようなことは可能かどうか？

以上。