

ハミング符号を作ろう (単一誤り訂正符号の構成)

栗原正純
電気通信大学
UEC Tokyo

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

1

コード表

1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
1							8						
2							9						
3							10						
4							11						
5							12						
6							13						
7							14						
							15						

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

5

目次

- 4桁の数当てゲーム
最初に、4桁の0,1を用いた1から15までの
数当てゲームの作成
- 7桁の数当てゲーム
7桁の0,1を用いた誤り回答を含む1から15
までの数当てゲームの作成
(ハミング符号の構成)

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

2

4桁数当てゲーム

- 0000から1111までが書かれた16枚の
「01カード」を作る。

01カード

	1	0	1	0			
--	---	---	---	---	--	--	--

- 0000を取り除いた15枚をランダムに並べて、
1~15までの番号をつける。

8	1	0	1	0			
---	---	---	---	---	--	--	--

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

6

4桁の数当てゲーム

用意するもの

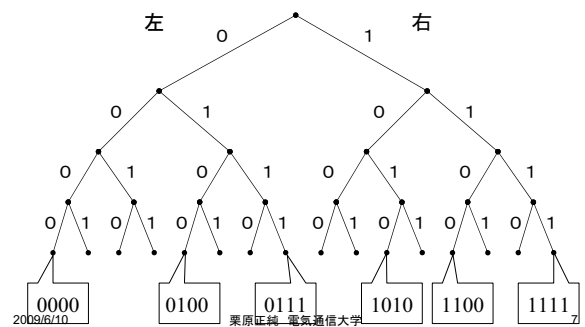
- 1と0だけの数字で書かれた4桁の数字0000
から1111までを書いた「01カード」: 16枚
- 空欄の「コード表」

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

3

2進木 (4桁の数の割り当て)



2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

「0,1のカード」

0000~1111 の設定(16枚に切り分ける)

0	0	0	0					1	0	0	0				
0	0	0	1					1	0	0	1				
0	0	1	0					1	0	1	0				
0	0	1	1					1	0	1	1				
0	1	0	0					1	1	0	0				
0	1	0	1					1	1	0	1				
0	1	1	0					1	1	1	0				
0	1	1	1					1	1	1	1				

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

4

例(コード表)「0,1の表」

1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
							8	1	0	0	0		
							9	1	0	0	1		
							10	1	0	1	0		
							11	1	0	1	1		
							12	1	1	0	0		
							13	1	1	0	1		
							14	1	1	1	0		
							15	1	1	1	1		

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

8

数字カードの作成(4枚)

- 1桁目に1が立っている数字を「(1)」というタイトルを書いた紙(カード)に書き出す。
- 以下同様に、2～4桁目についても、それぞれにおいて、上記と同じ作業をする。
- すると、4枚のカードは次のようになる。

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

9

例 (4)

1 3 5 7 9 11 13 15

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

13

例 (1)

8 9 10 11 12 13 14 15

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

10

4桁の数当てゲーム

- カード1～4を使って1～15までの数を当てる。
- 各カードに書かれた数字の中に選んだ数があるかないかの回答を4回してもらい、コード表を用いて、選んだ数を推測する。
- 「ある」は1、「ない」は0として4桁のコードを作成する。
- コード表の4桁の0,1と一致するもの(数)が、選んだ数となるはずである。

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

14

例 (2)

4 5 6 7 12 13 14 15

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

11

7桁の数当てゲーム

- 先ほどまでのコード表に、さらに、工夫をすることで、誤り回答を含む場合でも正しい数字を推定できるゲームを作る。

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

15

例 (3)

2 3 6 7 10 11 14 15

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

12

用意するもの

- 4桁の数字0000から1111までを書いたコード表(先ほど作成したものを使用する)
- 集合{A,B,C}の中から1個の要素を取り出して書いたABCカード:3枚
- 集合{A,B,C}の中から2個の要素を取り出して書いたABCカード:3枚
- 集合{A,B,C}の中から3個の要素を取り出して書いたABCカード:1枚

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

16

ABCが書かれたカード(ABCカード) (ABC の設定) 7枚に切り分ける

ABCカード



1	2	3	4	5	6	7
A			A	A		A
	B		B		B	B
		C		C	C	C

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

17

例

(すでに作業済み)

	0	0	0	0				8	1	0	0	0			
1	0	0	0	1				9	1	0	0	1			
2	0	0	1	0				10	1	0	1	0			
3	0	0	1	1				11	1	0	1	1			
4	0	1	0	0				12	1	1	0	0			
5	0	1	0	1				13	1	1	0	1			
6	0	1	1	0				14	1	1	1	0			
7	0	1	1	1				15	1	1	1	1			

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

21

選択条件

- ABCカードの中から3枚を選ぶ。
- ただし、3枚のABCカードの書かれた各アルファベットの個数が奇数個になるように、3枚のABCカードを選択する。
- 例えば、以下の例は、条件を満たしている。
Aは1個、Bは1個、Cは3個：

例

	A	
		B
C	C	C

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

18

ABC と 4桁の0,1 の対応表の作成

- 次ページのように、「ABCの表」と4桁の「0,1 の表」を組み合わせる。
- この結果を用紙に記入する。

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

22

ABCカードの並べ合わせ 「ABCの表」

- ABCカードの残りの4枚をランダムに並べる。その後に、先ほど選んだ3枚をランダムに並べる。
- 例えば、

例

A	A	A		A	
B	B	B			B
C			C	C	C

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

19

例(対応表)

例

A	A	A		A	
B	B	B			B
C			C	C	C

8	1	0	0	0			
9	1	0	0	1			
10	1	0	1	0			
11	1	0	1	1			
12	1	1	0	0			
13	1	1	0	1			
14	1	1	1	0			
15	1	1	1	1			

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

23

切り分けた16枚の並べ合わせ (すでに作業済み)

- 切り分けた16枚の中から0000を取り除いた、15枚をランダムに順に並べる。
- 次に、左端の1マスの中に、1から15の番号を書き込む。

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

20

「ABCの表」と「4桁の0,1 の表」の対応表(コード表)の作成

- この結果を「コード表」に記入する。

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

24

例(コード表)

1	2	3	4	5	6	7
A		A	A		A	
B	B	B				B
C				C	C	C

1	2	3	4	5	6	7
A		A	A		A	
B	B	B				B
C				C	C	C

1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0			
1	0	0	0	1		
2	0	0	1	0		
3	0	0	1	1		
4	0	1	0	0		
5	0	1	0	1		
6	0	1	1	0		
7	0	1	1	1		

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

25

例(コード表)

1	2	3	4	5	6	7
A	A	A		A		
B	B	B				B
C			C	C	C	

1	2	3	4	5	6	7
A	A	A		A		
B	B	B				B
C			C	C	C	

1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0			
1	0	0	0	1	1	1
2	0	0	1	0		1
3	0	0	1	1	1	
4	0	1	0	0	1	1
5	0	1	0	1		1
6	0	1	1	0	1	1
7	0	1	1	1		

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

29

表の完成に向けて

- 現在、空欄になっている残りの3桁に対し、それぞれ0、1を決定する。
- 決定する規則は、1の立っている桁のABCカードの各アルファベットの総数が偶数個になるように、空欄の3桁に対し、0、1を決定する。一意に決定できる。
- 決定の規則については、次の説明を参照。

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

26

数字カードの作成(7枚)

- 作り方は、4枚の数字カードを作成したときとほぼ同じです。
- 1桁目に1が立っている数字を「ABC(1)」というタイトルを書いた紙(カード)に書き出す。
- 以下同様に、2～7桁目のそれぞれにおいて、上記と同じ作業をする。
- ただし、1枚目から4枚目のカードは、最初の数当てゲームで作成したものと同じになることに注意する。
- すると、7枚のカードは次のようになる。

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

30

表の完成(3桁の0,1の決定)について

A		A	A		A	
B	B	B				B
C				C	C	C

0	0	1	1	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---

- 水色の部分での、1の立っている部分(2箇所)のみに着目する。
- すると、Aが2個、Bが1個、Cが0個であることが分かる。
- まず、Bを偶数個にするために、(B C)の桁に 1 を立てる。これにより、Bは2個で偶数個になる。
- Cが1個(奇数個)になったので、(C)の桁に 1 を立てる。
- 以上で、A,B,Cのいずれも偶数個になる。
- 最後に、(A C)の桁には 0 を入れる。

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

27

例 ABC(1)

8 9 10 11 12 13 14 15

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

31

(続き)表の完成(3桁の01の決定)について

A		A	A		A	
B	B	B				B
C				C	C	C

0	0	1	1	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---

つまり、7桁の0,1が決定されたとき、1が立っているABCカードに書かれた各アルファベットの総数が偶数個になっていればよい。

この場合、4つの1が立っている。そして、Aは2個、Bも2個、Cも2個で、各アルファベットは偶数個になっている。

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

28

例 B(2)

4 5 6 7 12 13 14 15

2009/6/10

栗原正純 電気通信大学

32

例 AB(3)

2 3 6 7 10 11 14 15

例 BC(7)

2 3 4 5 8 9 14 15

例 A(4)

1 3 5 7 9 11 13 15

数当てゲーム2

- カード1~7を使って誤りを含む回答があっても、「選んだ数」を当てる。
- 各カードに書かれた数字の中に選んだ数があるかないかの回答を7回してもいい。コード表を用いて、「選んだ数」を推測しよう。
- 「ある」は“1”、「ない」は“0”として7桁のコードを作成する。
- 7桁のコードで1の立っている桁のABCの各個数を計算する。
- 奇数個のアルファベットだけを書き出す（アルファベットの組）。すると、アルファベットの組みと同じABCカードの位置でウソの回答をしているはずである。
- すべて偶数個の場合はウソをついていないはず。
- ウソの回答が見つければ、そのカードでの回答を正しいものに修正する。
- 修正後、上位4桁の0,1と一致するコードを、コード表から選び、そのコードに対応する数字が最初に「選んだ数」と推測する。ただしいます。

例 C(5)

1 3 4 6 8 10 13 15

例 (コード表) (0を省略記述)

	A		A	A		A			A	A	A		A			
	B	B	B						B					B		
	C				C	C	C		C			C	C	C		
	0	0	0	0					8	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1			9	1	0	0	1			1
2	0	0	1	0			1	1	10	1	0	1	0	1		
3	0	0	1	1	1			1	11	1	0	1	1		1	
4	0	1	0	0	1			1	12	1	1	0	0		1	
5	0	1	0	1			1	1	13	1	1	0	1	1		
6	0	1	1	0	1	1			14	1	1	1	0			1
7	0	1	1	1					15	1	1	1	1	1	1	1

例 AC(6)

1 2 5 6 8 11 12 15

以上