2009年度基礎セミナー
偽コイン問題と符号化

栗原 正純
電気通信大学情報通信工学科
〒 182–8585 東京都調布市調布ヶ丘 1–5–1
kuri@ice.uec.ac.jp

2009 年 6 月 29 日

問題 1 いま、ここに、*8* 枚のコインと正確に重さを計測できる天秤 *(*てんびん*)* だけが用意されている。*8* 枚のコインの中に *1* 枚だけニセのコインがある。本物とニセのコインの外見はまったく同じで区別がつけられない。ニセのコインと本物のコインの重さがわずかに異なることは分かっているが、どちらが重いか、または、軽いかは分からない。

このとき、天秤を数回利用してニセのコインを見つけ出し、ニセのコインの重さが本物より重いか、または、軽いかを判断する方法を示せ。ただし、天秤を利用する回数は少ない方が望ましい。

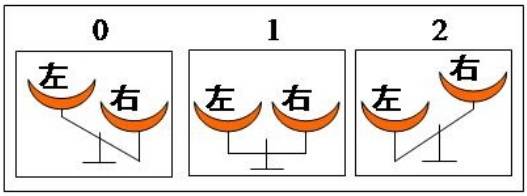
問題を解決する方法として下記の方法を示す。8 枚のコインに、それぞれの区別をつけるために 1 から 8 までの番号をつける。下記表の「ステージ」欄は、天秤を利用する場面を表す。ステージ I では、天秤の左皿に 1,2,3 番のコインを乗せ、右皿に 4,5,6 番のコインを乗せて計測することを表す。

ステージ表 (8 枚)

ステージ	左皿に 乗せるコイン	右皿に 乗せるコイン	結果
I	$(1,2,3)$	$(4,5,6)$	
II	$(1,4,7)$	$(3,6,8)$	
III	$(1,6,8)$	$(2,3,4)$	

ステージ	左皿に乗せるコイン	右皿に乗せるコイン	結果 (コード)		
I	①②③	④⑤⑥	0	1	2
II	①④⑦	③⑥⑧	0	1	2
III	①⑥⑧	②③④	0	1	2

結果の欄には、計測結果を 0,1,2 のいずれかの数字で記入する。計測結果の記入法は次のとおり。左皿側が軽いときには 0, 右皿側が軽いときには 2, そして、天秤がつり合ったときには 1 とする。



得られた結果 (3 桁の数字) からニセコインおよびその重さの重軽の判断には、以下のコード表を利用する。1L は 1 番のコインがニセのコインで軽い (Light) ことを示し、そのコードは 000 である。一方、1H は 1 番のコインがニセのコインで重い (Heavy) ことを示し、そのコードは 222 である。他の場合も同様である。

コード表 (8 枚)

コイン No. と 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III	コイン No. と 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III
$1L$	000	$1H$	222
$2L$	012	$2H$	210
$3L$	022	$3H$	200
$4L$	202	$4H$	020
$5L$	211	$5H$	011
$6L$	220	$6H$	002
$7L$	101	$7H$	121
$8L$	120	$8H$	102

例えば、2 番のコインをニセのコインと仮定し、さらに、本物より軽いと仮定する。すると、ステージ I の結果は、0 となる。なぜなら、ステージ I での計測で、天秤の左皿側が軽いと分かるから。同様にして、ステージ II, III の結果は、それぞれ 1,2 となる。以上より、ステージ I,II,III の結果は、ぞれぞれ 0,1,2 となる。これより、コードは 012 となる。

次に、コード表から 012 というコードを探すと、2L が該当する。これより、ニセのコインは、2 番のコインで、それは本物より軽いという結論が導き出されるというわけである。

さて、コード表からステージ表が一意に作成される。すなわち、コード表から各ステージにおいて、天秤の左右の皿にどのコインを乗せるのかが決まる。その決め方は次の通り。コード表の左から 2 列目の欄の 3 桁の数字 (コード) に着目する。3 桁の数字 abc に対し、a をステージ I 対応、b をステージ II 対応、c をステージ III 対応の数字とする。ステージ I 対応の数字が、0 のコインは左皿に乗せ、2 のコインは右皿に乗せる。1 のコインは天秤の皿には乗せない。以下、ステージ II,III でも同じである。この手続きにより、各ステージで、皿に乗せるコインを決定することができる。

したがって、他の枚数の偽コイン問題に対する解法として、コード表のみを示せば十分である。それでは、以下に、コインの数が n 枚で、その中の 1 枚のコインがニセのコインである場合の問題を解決するコード表を列挙する。ただし、$n = 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12$ の場合について示す。

コード表 (3 枚)

コイン No. 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III	コイン No. 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III
$1L$	02	$1H$	20
$2L$	21	$2H$	01
$3L$	10	$3H$	12

コード表 (4 枚)

コイン No. 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III	コイン No. 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III
$1L$	010	$1H$	212
$2L$	011	$2H$	211
$3L$	202	$3H$	020
$4L$	221	$4H$	001

コード表 (6 枚)

コイン No. 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III	コイン No. 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III
$1L$	000	$1H$	222
$2L$	001	$2H$	221
$3L$	212	$3H$	010
$4L$	211	$4H$	011
$5L$	122	$5H$	100
$6L$	120	$6H$	102

コード表 (6 枚)

コイン No. 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III	コイン No. 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III
$1L$	001	$1H$	221
$2L$	021	$2H$	201
$3L$	211	$3H$	011
$4L$	212	$4H$	010
$5L$	101	$5H$	121
$6L$	120	$6H$	102

コード表 (8 枚)

コイン No. 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III	コイン No. 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III
$1L$	000	$1H$	222
$2L$	012	$2H$	210
$3L$	022	$3H$	200
$4L$	221	$4H$	001
$5L$	212	$5H$	010
$6L$	211	$6H$	011
$7L$	100	$7H$	122
$8L$	110	$8H$	112

コード表 (9 枚)

コイン No. 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III	コイン No. 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III
$1L$	000	$1H$	222
$2L$	012	$2H$	210
$3L$	022	$3H$	200
$4L$	221	$4H$	001
$5L$	211	$5H$	011
$6L$	202	$6H$	020
$7L$	101	$7H$	121
$8L$	110	$8H$	112
$9L$	120	$9H$	102

コード表 (11 枚)

コイン No. 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III	コイン No. 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III
$1L$	000	$1H$	222
$2L$	002	$2H$	220
$3L$	021	$3H$	201
$4L$	022	$4H$	200
$5L$	221	$5H$	001
$6L$	212	$6H$	010
$7L$	211	$7H$	011
$8L$	202	$8H$	020
$9L$	100	$9H$	122
$10L$	110	$10H$	112
$11L$	120	$11H$	102

コード表 (12 枚)

コイン No. 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III	コイン No. 重軽 (HL)	ステージの結果 I, II, III
$1L$	000	$1H$	222
$2L$	012	$2H$	210
$3L$	021	$3H$	201
$4L$	022	$4H$	200
$5L$	221	$5H$	001
$6L$	212	$6H$	010
$7L$	211	$7H$	011
$8L$	202	$8H$	020
$9L$	100	$9H$	122
$10L$	101	$10H$	121
$11L$	110	$11H$	112
$12L$	120	$12H$	102

ステージ表 (12 枚)

ステージ	左皿に 乗せるコイン	右皿に 乗せるコイン	結果
I	$(1, 2, 3, 4)$	$(5, 6, 7, 8)$	
II	$(1, 8, 9, 10)$	$(3, 4, 5, 12)$	
III	$(1, 9, 11, 12)$	$(2, 4, 6, 8)$	

参考文献

[1] 松山廣, 兵庫県立大学, 偽コインの問題,
http://www.sci.hyogo-u.ac.jp/matsuyam/lecture_note/mathin96.pdf

[2] 栗原正純, 偽コイン問題, http://www.code.ice.uec.ac.jp/kuri/C3/2009kuriharacoin.pdf